



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$ab: 2^9 \cdot 3^{19} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$(a \cdot b \cdot c)^2: 2^{42} \cdot 3^{44} \cdot 5^{53}$$

$$(a \cdot b \cdot c)_{\min}: 2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{27}$$

Покажем, что меньше быть не может

Допустим, что макс. степень 2, на которую делится abc , равна 21
может

$ab: 2^9$ т.е. макс. степень 2, на которую делится c , равна 11

$bc: 2^{14}$, т.е. макс. степень 2, на которую может делиться a , равна 6

$11 + 6 = 17 < 19 \Rightarrow ac \nmid 2^{19}$ — не может быть

$$\text{Все } abc: 2^{21}:$$

$$ab: 2^9 \Rightarrow c: 2^{12}$$

$$bc: 2^{14} \Rightarrow a: 2^7$$

$$12 + 7 = 19 \Rightarrow ac: 2^{19}$$

Аналогично для степеней 3 и 5

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{22} \cdot 5^{27}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

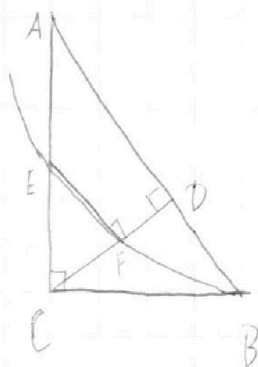
6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1} \quad \text{Пусть } AD = 3x; \quad DB = x$$

$$CD^2 = AD \cdot DB, \quad CD = x\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 2x$$

$$AB = 4x$$

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



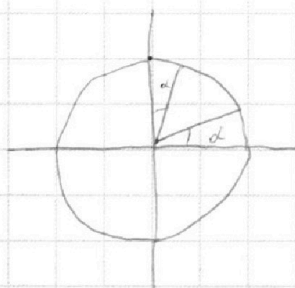
№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

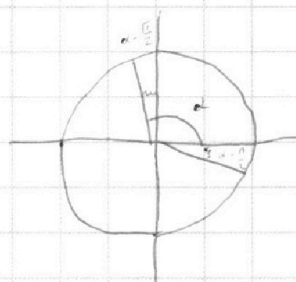
$$5 \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$x \in [-3\pi; 2\pi]$$



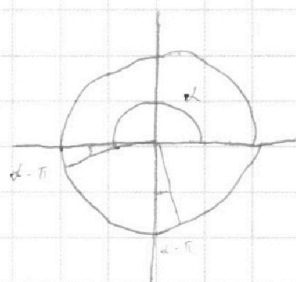
I чет:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



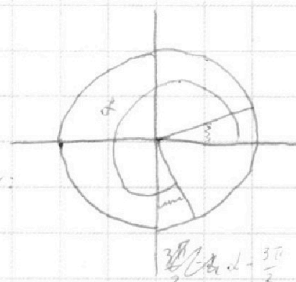
II чет:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



III чет:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



IV чет:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Рассмотрим уравнение на разных отрезках x :

$$x \in [-3\pi; -2\pi] \quad (\text{III и IV чет})$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{5\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -12\pi$$

$$x = -3\pi$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] \quad (\text{I и II чет})$$

$$5 \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x - \frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$0x = -8\pi; \quad x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x \in [-\pi; 0] \quad (\text{III и IV чет})$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5(x + \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x + \frac{4\pi}{2} = 0; \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in [0; \pi] \quad (\text{I и II чет})$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$x \in [\pi; 2\pi]$$

$$x \in [\pi; 2\pi] \quad (\text{III и IV чет})$$

$$5 \arcsin(\sin(x - \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi; \quad x = 2\pi$$

$$\text{Ответ: } \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. (кирилл)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ур-е окр-ти с центром (0,0) и радиусом 3

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 - 36 + 32 = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

Ур-е окр-ти с центром (6,0) и рад. 2

$a \in (\alpha_{кас1}, \alpha_{кас2})$
не существ. чр-ей.

$\alpha_{кас1}$

существ. чр-ей
 $\alpha \in (\alpha_{кас1}, \alpha_{кас2})$

$\alpha_{кас2}$

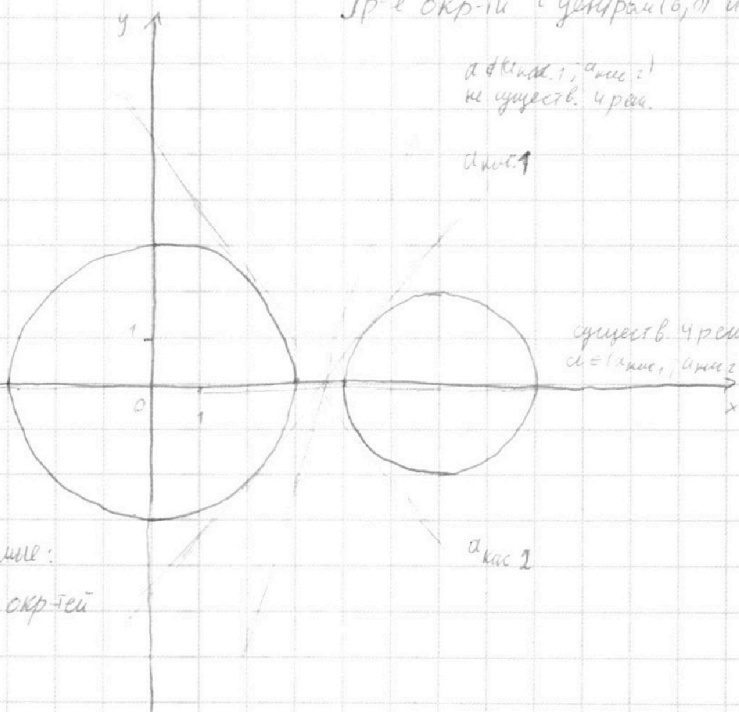
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$$

Уравн. прямой с угл. коэф-т $-\frac{a}{2}$
и смещ. $\frac{3b}{2}$

Для a , при которых
система имеет 4 р-я,
существ. 2 взаимн. перпен.
касательные окр-тей

$$a \in (\alpha_{кас1}, \alpha_{кас2})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (продолжение 1)

Найдём a и b

Правая прямая касается первой окружности, а второй - сверху

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = -\sqrt{9-x^2} & (3) \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{4-(x-6)^2} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{4-(x-6)^2} & (4) \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} = 9 - x^2$$

$$\left(\frac{a^2}{4} + 1\right)x^2 - \frac{3ab}{2}x + \left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} - 4\left(\frac{a^2}{4} + 1\right)\left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = \frac{9a^2b^2}{4} - \frac{9a^2b^2}{4} - 9b^2 + 9a^2 + 36 = 9(a^2 - b^2 + 4)$$

Условие касания: $D=0$: $a^2 - b^2 + 4 = 0$ $x = \frac{\frac{3ab}{2}}{2(\frac{a^2}{4} + 1)} = \frac{3ab}{a^2 + 4}$

$$(4) \quad \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} = 4 - x^2 + 12x - 32$$

$$\left(\frac{a^2}{4} + 1\right)x^2 - \left(\frac{3ab}{2} + 12\right)x + \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} + 36ab + 144 - 4\left(\frac{a^2}{4} + 1\right)\left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = \frac{9a^2b^2}{4} + 36ab + 144 - \frac{9a^2b^2}{4} - 9b^2 - 3a^2 - 128 =$$

$$D=0: -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0 \quad = -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 4 = 0; & b^2 = a^2 + 4 \\ -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0 \end{cases}$$

$$385a^2 - 4442a^2 + 26104 = 0$$

$$\frac{D}{4} =$$

$$-32a^2 - 9a^2 - 36 + 36a\sqrt{a^2 + 4} + 16 = 0$$

$$-41a^2 + 36a\sqrt{a^2 + 4} - 20 = 0$$

$$36a\sqrt{a^2 + 4} = 41a^2 + 20$$

$$a^2 \geq 52$$

$$1296a^4 + 5184a^2 = 1681a^4 - 4264a^2 + 26104$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (продолжение 2)

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + 4 \\ 32a^2 + 9b^2 - 36ab - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a = b \\ 6a = 5b, \quad b = \frac{6}{5}a \end{cases}$$

$$(9b^2 - 36ab + 36a^2) - 4a^2 - 16 = 0$$

$$\begin{cases} 36a^2 = a^2 + 4; \quad a = \pm \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{36}{25}a^2 = a^2 + 4; \quad a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$$(3b - 6a)^2 - 4a^2 - 16 = 0$$

$$a_{кас.1} = -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

$$(3b - 6a)^2 - 4b^2 = 0$$

$$(3b - 6a - 2b)(3b - 6a + 2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{\sqrt{35}} & \text{или} & a = -\frac{10}{\sqrt{11}} \\ b = -\frac{12}{\sqrt{35}} & & b = -\frac{12}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$a_{кас.1}$ должно соответствовать виду касательной, т.е. $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$$y = 0 : x \in (3; 4)$$

$$\frac{x}{\sqrt{35}} - \frac{18}{\sqrt{35}} = 0$$

$$\frac{5x}{\sqrt{11}} - \frac{18}{\sqrt{11}} = 0$$

$$x = 18 \notin (3; 4) \quad x = 3.6 \in (3; 4)$$

$$a_{кас.1} = -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Как можно заметить по графику, обе касательные симметричны

относительно оси OX (т.к. центры окружностей лежат на этой оси), а

$$\text{это значит, что } a_{кас.2} = -a_{кас.1} = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☐☒☐☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{243} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

Замена $\log_3 x = t \neq 0$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) = 0$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7(t+s)}{2ts} = 0$$

$$(t^2 + s^2)(t+s)(t-s) + \frac{7(t+s)}{2ts} = 0$$

$$(t+s)(t^2 + s^2)(t-s) + \frac{7}{2ts} = 0$$

$$\begin{cases} t+s=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ts(t^2 + s^2)(t-s) + 7 = 0 \end{cases}$$

$$2t^4s - 2t^3s^2 + 2t^2s^3 - 2ts^4 + 7 = 0$$

нет решений

$$\log_3^4(54) + 2 \log_{54} 3 = \log_{243} 243 - 8$$

$$\log_3^4(54) + \frac{2}{\log_3(54)} = \log_{243} 243 - 8$$

Замена $\log_3(54) = s \neq 0$

$$s^4 + \frac{2}{s} = \frac{11}{25} - 8$$

$$s^4 - \frac{7}{2s} + 8 = 0$$

$$t+s=0; \log_3(54)=0$$

$$5+4=1; xy=\frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

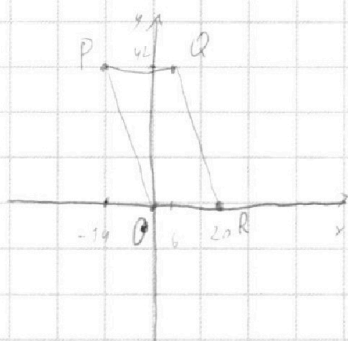
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6.



$$\hat{\angle} PRQ = \frac{42}{20-6} = 3$$

Т.е. на сторонах PR и RQ разложим
по оси OY между соседними 2 точками
с увеличенными координатами равно 3.

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 11 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{когда } y=0: \\ \text{когда } y=1: \\ \text{когда } y=2: \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_{\min} = 0 & x_{\max} = 20 \\ x_{\min} = 0 & x_{\max} = 19 \\ x_{\min} = 0 & x_{\max} = 19 \end{array}$$

$$h = \overbrace{((20-14+1) + (19-11+1) + (19-14+1))}^{=28} \cdot \left(\frac{14}{3} + 1\right) + \underbrace{(20-11+1)}_{=10} = 402$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 10 \\ y_2 - y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{когда } y_1=0: \\ \text{когда } y_1=1: \\ \text{когда } y_1=2: \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_{\min A} = 0 & x_{\max B} = 14 \\ x_{\min A} = 7 & x_{\max B} = 18 \\ x_{\min A} = 0 & x_{\max B} = 18 \end{array}$$

$$h = \overbrace{((14-10+1) + (18-10+1) + (18-10+1))}^{=28} \cdot \left(\frac{14}{3} + 1\right) + \underbrace{(14-10+1)}_{=5} = 374$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 9 \\ y_2 - y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{когда } y_1=0: \\ \text{когда } y_1=1: \\ \text{когда } y_1=2: \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_{\min A} = 0 & x_{\max B} = 9 \\ x_{\min A} = 0 & x_{\max B} = 8 \\ x_{\min A} = 0 & x_{\max B} = 8 \end{array}$$

$$h = \overbrace{((9-0+1) + (8-0+1) + (8-0+1))}^{=28} \cdot \left(\frac{14}{3} + 1\right) + \underbrace{(9-0+1)}_{=10} = 94$$

Найдя закономерность, получим: $h = 28 \cdot (14 - k) + 10$, где $k = \frac{y_2 - y_1}{3}$

$$k \in \left[\frac{0}{3}; \frac{14}{3}\right]; k \in \mathbb{Z}$$

$$N_{\text{общ}} = 28 \cdot 14 \cdot 12 - 28 \cdot \frac{14 \cdot 12}{2} + 10 \cdot 12 = 12(392 - 154 + 10) = 12 \cdot 248 = 2976$$

ка-бе нар. А и В

Ответ: 2976.

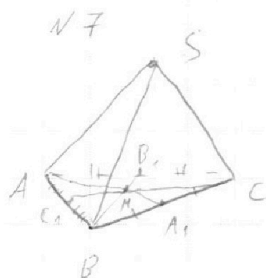
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

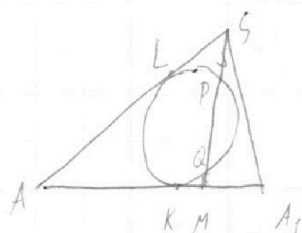
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость (ASA_1) .



$AL = AK$ как касательные к одной окр-ти из
одной точки.

$$LS^2 = SP \cdot (SP + PQ)$$

$$KM^2 = MQ \cdot (MQ + PQ)$$

(по теор. о кас. и сек.)

$$SP = MQ \Rightarrow LS = KM$$

$$AS = AM = 12$$

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \text{ (по св-ву медианы)} \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

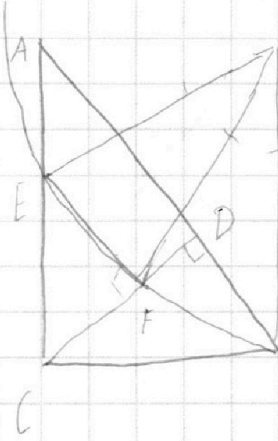
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



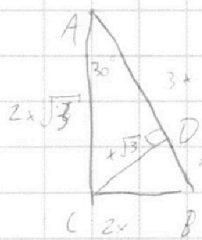
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$x_{max} - x_{min} = 34$$

$$y_{max} - y_{min} = 42 \quad (x_{max} - x_{min})$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 11 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \quad h = (20 - 11 + 1) \cdot 42 = 420$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 10 \\ y_2 - y_1 = 1 \end{cases} \quad h = 20$$

$$32a^2 + 9b^2 + 36ab + 16 = 0$$

$$9(b - 2a)^2 - 4a^2 - 16 = 0$$

$$9(b - 2a)^2 - 4b^2 = 0$$

$$(3b - 6a - b)(3b - 6a + b) = 0$$

$$\begin{cases} 6a = 4b & b = 3a \\ 6a = 4b & b = \frac{3a}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 = a^2 + 4 \\ \frac{9a^2}{4} = a^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{4}{8} & a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = \frac{16}{5} & a = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$a < 0$$

$$1) a^2 + 2b - 3b =$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{9 - x^2} \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = -\sqrt{9 - x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{9 - x^2} \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = -\sqrt{9 - x^2} \end{cases}$$

$$D = 0 \text{ берде}$$

между

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = \sqrt{9 - x^2} \\ -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = -\sqrt{9 - x^2} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$x = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$y = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$z = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{3b}{a} \\ x \in (3, 4) \end{cases}$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$$

$$(0; \frac{3b}{2})$$

$$x = -\frac{3\sqrt{6}}{4} \quad x = -\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$b < -3 \quad b < -3$$

$$x > \sqrt{2} \quad x > \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \quad 1.6 < 1.7 < 2.2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ

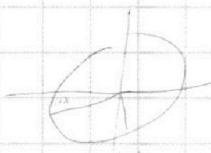
Черновик

№1

$$(abc)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

$$(abc)_{min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7$$



$$\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{s^4}\right) + \frac{7}{2}(t^4 + s^4) = 0$$

№5

$$\log_3 x + \frac{6}{\log_3 x} = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 x - 8$$

$$\log_3 x = t \neq 0$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8 \quad | \cdot t$$

$$t^5 - 6 - \frac{5}{2}t + 8t = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2t^5 + 10t - 12 = 0$$

$$t^4 + \frac{5}{2}t + 8 = 0$$

$$25t^2 + 10t - 7 = 0$$

$$t^4 + \frac{5}{2}t + 8 = 0$$

$$a^4 - a^3 - a^2 - a + \frac{7}{25} = 0$$

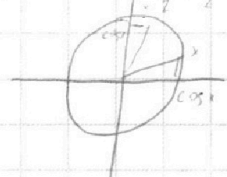
$$a(a^3 - 1)(a^2 + 1) = -\frac{7}{25}$$

$$\begin{cases} t+s=0 \\ (t-s)(t^2+s^2) = \frac{7}{25} \\ t^3-t^5+t^3-s^3 = \frac{7}{25} \\ t^3-t^5+t^3-s^3 = \frac{7}{25} \end{cases}$$

№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$a \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

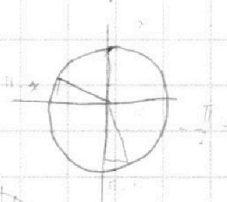


$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$



$$x = y + 2\pi k$$

$$5 \arcsin(\cos y) = y + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} y \in [0; \pi]: 5\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = y + \frac{\pi}{2} \\ y \in [\pi; 2\pi]: 5\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = y + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\log_3(15y) + 2 \log_{15y} 3 = \log_{25y^2} (3^{\frac{1}{10}}) - 8$$

$$\log_3(15y) + \frac{2}{\log_3(15y)} = \frac{1}{2 \log_3(15y)} - 8$$

$$\log_3(15y) = 5 \neq 0$$

$$\begin{cases} y \in [0; \pi]: y = \frac{\pi}{5} \\ y \in [\pi; 2\pi]: y = \frac{3\pi}{5} \end{cases}$$

$$s^4 + \frac{2}{s} = \frac{1}{25} - 8$$

$$s^5 - \frac{7}{25} + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$(t^4 - s^4) + \frac{7}{2}(t^4 + s^4) = 0$$

$$(t-s)(t^3+t^2s+ts^2+s^3) + \frac{7}{2}(t^4+s^4) = 0$$

$$(t-s)(t^3+t^2s+ts^2+s^3) + \frac{7}{2}(t^4+s^4) = 0$$

$$(t-s)(t^3+t^2s+ts^2+s^3) + \frac{7}{2}(t^4+s^4) = 0$$

$$(t+s)(t-ts)(t^2+s^2) + \frac{7}{2}(t^4+s^4) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

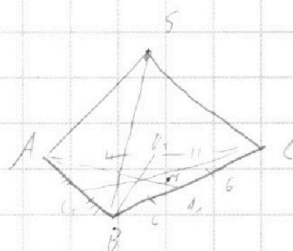
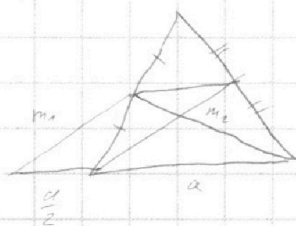
$$2ts(t^2 + s^2)(t - s) + 7 = 0$$

$$2t^4s - 2t^3s^2 + 2t^2s^3 - 2ts^4 + 7 = 0 \quad | : s^5$$

$$2\left(\frac{t}{s}\right)^4 - 2\left(\frac{t}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{t}{s}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{s}\right) + \frac{7}{s^5} = 0$$

Заменим: $\frac{t}{s} = k \neq 0$, $\frac{7}{s^5} = a$

$$2k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 2k + a = 0$$



$$AM = 12$$

$$AA_1 = 18$$

$$\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6 \sin 60^\circ = 54 \sin 60^\circ$$

