



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

Пусть $ab = 2^6 3^{13} 5^{11} x$; $bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} y$; $ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} z$, где $x, y, z \in \mathbb{N}$

Тогда: $\begin{cases} ab = 2^6 3^{13} 5^{11} x & (1) \\ bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} y & (2) \\ ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} z & (3) \end{cases}$ умножим (1), (2) и (3):

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} x y z$$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ в произведении $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} x y z$ каждый множитель должен быть в четной степени. $59:2 \Rightarrow$ либо x , либо y , либо z кратно 3, то есть хотя бы 3.

Предположим, что какое-то из чисел x, y, z равно 3, а остальные равны 1. Тогда в произведении ab степень 5 равна 11, в bc - 13, в ac - 28.

Пусть a и b входят в степени k , c в l - в степени f , 5 в степени r .

Тогда: (строим пример):

Пусть $p=3$

Тогда: $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

Пусть $a = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f$; $b = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^p$; $c = 2^v \cdot 3^w \cdot 5^i$

Т.к. ровно одно из x, y, z равно 3, то в произведениях ab, bc, ac степени входящие 2 и 5 не менялись. Получается система:

$$\begin{cases} d+k=6 & (4) \\ k+v=14 & (5) \\ d+v=16 & (6) \\ f+p=11 & (7) \\ p+i=13 & (8) \\ f+i=28 & (9) \end{cases}$$

$$(4)-(5): \begin{cases} d-v=-8 \\ d+v=16 \end{cases} \Rightarrow d=4 \Rightarrow v=12 \Rightarrow k=2$$

(Такая тройка подходит)

$$(7)-(8): \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow i=15 \Rightarrow p=-2$$

Тогда $b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^{-2}$. Но так получается, что $b \notin \mathbb{N}$.

Противоречие. Получается, что $x y z : 25$ (т.к. степень двойки в $a^2 b^2 c^2$ четная).

Если $x=5$ и $y=5$:

$$\begin{cases} f+p=12 & (10) \\ p+i=14 & (11) \\ f+i=28 & (12) \end{cases}$$

$$(10)-(11): \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow i=15 \Rightarrow p=-1$$

b - снова не натуральное

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad x = 25: \begin{cases} f+p=13 \\ p+i=13 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=0 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{3} \quad y = 25: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=15 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-4 \\ f+i=28 \end{cases} \Rightarrow f=12 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

Если мы будем брать $y: 5$ или $y: 25$ помним, что либо f ,
либо p будет отрицательным

$$\textcircled{4} \quad z = 25: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=13 \\ f+i=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-2 \\ f+i=30 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-3 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{5} \quad z = 5 \text{ и } x = 5: \begin{cases} f+p=12 \\ p+i=13 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-1 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow f=14 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow \\ \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

$$\textcircled{6} \quad z = 5 \text{ и } y = 5: \begin{cases} f+p=11 \\ p+i=14 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f-i=-3 \\ f+i=29 \end{cases} \Rightarrow f=13 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow \\ \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

Получается, что x, y, z не может быть кратно только $5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x, y, z: 5^4$ (т.к. в $a^2 b^2 c^2$ 5 входит в чет. степени) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x, y, z: 5^4 \cdot 3$, $\Rightarrow x, y, z$ хотя бы $5^4 \cdot 3$.

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{11}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{10}$; $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$

Заметим, что он удовлетворяет условию: Тогда

минимум $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

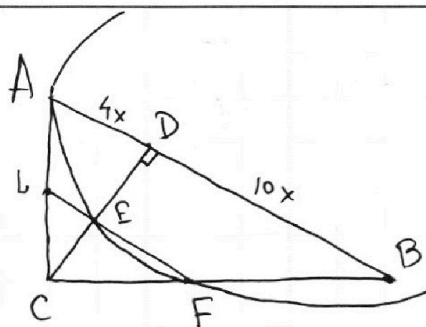


МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Bagama 2

$$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} \Rightarrow AD = 4x, DB = 10x$$

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

$$AC = \sqrt{4x \cdot 14x} = 2x\sqrt{14}$$

$$CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{4x \cdot 10x} = 2x\sqrt{10}$$

EF || AB; ED - altitude $\Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$ (two right angles)

Пусть $BC = a \Rightarrow AB = 2 \times \sqrt{14} - a$

$$\triangle CBE \sim \triangle CAD \Rightarrow \frac{4x}{LE} = \frac{2x\sqrt{14}}{a} \Rightarrow LE = \frac{4xa}{2x\sqrt{14}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}$$

$\Delta WEC - \text{н/г} \Rightarrow \text{но т. Рунгарапа: } CE = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} a$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB: \frac{EF}{10x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}a}{2x\sqrt{10}} \Rightarrow EF = \frac{10\sqrt{5}a}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{14}}$$

$$LF = \frac{7a}{\sqrt{14}}$$

$$AB^2 = LE \cdot LF \text{ (т.к. AC - касат.)}; A - \text{т. касан, } LF - \text{ секущая}$$

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} \cdot a + a^2 = \frac{49a^2}{14} - \frac{4a^2}{14} - \frac{2a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{7a}{\sqrt{14}}$$

$$4x^2 \cdot 14 + 9x\sqrt{14} \cdot a + a^2 - a^4 = 0$$

$$D = 16 \cdot 14a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16(a^2 - a^4) = 16 \cdot 14a^2 - 16 \cdot 14a^2 + 16 \cdot 14a^4 = 16 \cdot 14a^4$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14} + 4a^2\sqrt{7}14}{8 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14} + a^2\sqrt{14}}{28}$$

~~$$S_{ABC} = \frac{4 \times 2 \times \sqrt{10}}{2} = 4 \times 2 \times \sqrt{10} = 4 \sqrt{10}$$~~

$$4x^2 \cdot 14 - 4x\sqrt{14} \cdot 9 = 0$$

$$x(4.14x - 42\sqrt{14}) = 0$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14}}{4 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14}}{14}$$

$$S_{ADC} = 4x^2\sqrt{10} = \frac{4 \cdot a^2 \cdot 14 \cdot \sqrt{10}}{14^2} = \frac{4\sqrt{10}a^2}{14} = \frac{2\sqrt{10}a^2}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{CEF} = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{7}} \cdot \frac{5a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{5}a^2}{2 \cdot 7 \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{10}a^2}{2 \cdot 14}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{10}a^2}{7} : \frac{5\sqrt{10}a^2}{14} = \frac{2 \cdot 14}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{10}a^2}{7} : \frac{5\sqrt{10}a^2}{28} = \frac{2 \cdot 28}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5} =$$
$$= \frac{16}{10} = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi = 8x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\pi k + \beta, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \beta \in [0; 2\pi)$$

$$10 \arccos(\sin(2\pi k + \beta)) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10 \arccos(\sin \beta) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \beta)) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$10(\frac{\pi}{2} - \beta) = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$5\pi - 10\beta = 9\pi - 4\pi k - 2\beta$$

$$8\beta = -4\pi + 4\pi k$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \quad \text{Получается, } \sin x = 0, \text{ либо } \sin x = 1, \text{ либо } \sin x = -1$$

① $\sin x = 0$

$$10 \arccos 0 = 9\pi - 2x$$

$$5\pi = 9\pi - 2x$$

$$2x = 4\pi$$

$$x = 2\pi \quad (+)$$

② $\sin x = 1$

$$10 \arccos 1 = 9\pi - 2x$$

$$10 \cdot 0 = 9\pi - 2x$$

$$x = \frac{9\pi}{2} \quad (+)$$

③ $\sin x = -1$

$$10 \arccos -1 = 9\pi - 2x$$

$$10\pi = 9\pi - 2x$$

$$2x = -\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad (+)$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$(2) (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$(1) a = 0. \text{ Пусть } b = 0 \Rightarrow 5x = 0$$

$\Downarrow$
 $x = 0$

Это прямая, которая пересекает окр. из (2) в четырёх точках $\Rightarrow$ при $a = 0$ такой b есть 4 р-и. существует.

$$(2) \text{ как для } a \neq 0$$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a}$$

— это прямая, она должна пересекать окружности в четырёх точках.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5
 $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3 121} \frac{1}{5} - 5$ ОДЗ: $x > 0; x \neq 1$

$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$ $\log_{11} x = a, a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$

$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$

$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0$

$\frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0 \quad | \cdot a \neq 0$

$3a^5 + 15a - 16 = 0 \quad f(a) = 3a^5 + 15a - 16 \Rightarrow f'(a) = 15a^4 + 15$

$15a^4 + 15 = 0$

Таких a нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a^5 + 15a - 16 = 0$ имеет ~~ровно~~ 1 решение (при $a = 0$ $f(0) = -16$, $f(1) = 2 \Rightarrow 0$ где-то достигается)

$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} \frac{1}{5} - 5$ ОДЗ: $y > 0; y \neq 2$

$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$

$\log_{11} 0,5y = b, b \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 2$

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$

$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b, b \neq 0$

$3b^5 + 15b + 16 = 0 \quad g(b) = 3b^5 + 15b + 16, g'(b) = 15b^4 + 15$

$15b^4 + 15 = 0$

Таких b нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(b) \uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b^5 + 15b + 16 = 0$ имеет ~~ровно~~ одно решение ($f(0) = 16, f(-1) = -2 \Rightarrow 0$ где-то достигается).

Получается, что $a+b$ определяется однозначно.

$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 & (2) \end{cases} \quad (1)+(2): 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$
 $3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$
 $a+b = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x = a \quad \log_{11} 0,5y = b$$

$$\log_{11} 0,5xy = a + b$$

$$0,5xy = \cancel{(a+b)} 11^{a+b}$$

$$xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$xy = 2 \cdot 11^0$$

$$xy = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a}$$

$$5\pi - 10b = 9\pi - 4\pi n - 2b$$

$$a = \log_{11} x$$

$$b = \log_{11} y$$

$$a+b = \log_{11} xy$$

$$xy = 11^{a+b}$$

$$a^4 + \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = 0$$

$$8b = -4\pi + 4\pi n$$

$$b = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} n$$

$$a^4 + \frac{18+2}{3a} = 0$$

$$a^4 + \frac{-18+2}{3a} = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = 0$$

$$\frac{3a^5 - 16}{3a} = 0$$

$$10 \frac{\pi}{2} = 9\pi - 2x$$

$$3a^5 = 16$$

$$a^5 = \frac{16}{3}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{16}{3}}$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3} 11^{-13} - 5$$

$$b = \log_{11} 0,5y$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$b^4 + \frac{3}{3b} - \frac{13}{3b} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$\sin \frac{9\pi}{3}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{3} \right)$$

$$\frac{15}{3}$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{48\pi}{6} \right) = \cos -\frac{5}{2}\pi$$

$$\sin$$

$$\sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{2\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} - 3\pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

и

$$\frac{3\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$x = 2\pi n + b$$

$$10 \arccos(\sin(2\pi n + b)) = 9\pi - 4\pi n - 2b$$

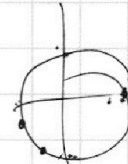
$$10 \arccos(\sin b) = 9\pi - 4\pi n - 2b$$

$$x = n\pi + b$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - b \right)$$

$$10 \arccos(\pi n)$$

$$\frac{\pi/2}{a}$$



$$\frac{\pi}{2}$$

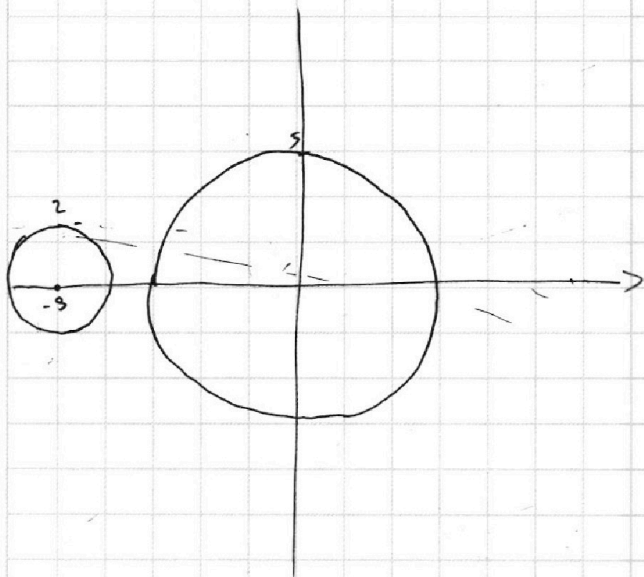
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 2^2$$

$$6ay - b + 5x = 0$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$

$$-b + 5x = 0$$

$$5x = b$$

$$-5x + b = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$\begin{cases} -2 < \frac{5 \cdot 9}{6a} + \frac{b}{6a} < 2 \\ -5 < \frac{b}{6a} < 5 \end{cases}$$

$$-2 < \frac{45}{6a} + \frac{b}{6a}$$

$$45 + b < 12a$$

$$b < 12a - 45$$

$$a < 0$$

$$-2 < \frac{45}{6a} + \frac{b}{6a} < 2$$

$$-12a > 45 + b > 12a$$

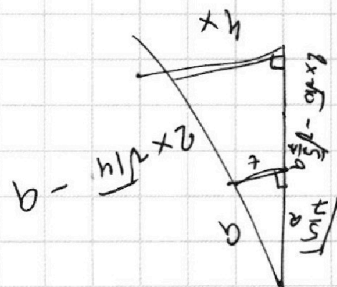
$$-12a - 45 > b > 12a - 45$$

$$2 \cdot \frac{b}{5} = \frac{b}{5} = \frac{b}{5}$$

$$\frac{b}{5} = \frac{b}{5}$$

$$\frac{b}{5} = \frac{b}{5}$$

$$\frac{b}{5} = \frac{b}{5}$$





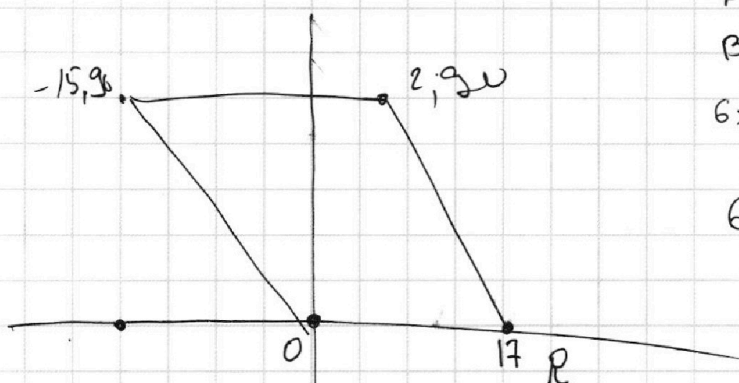
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



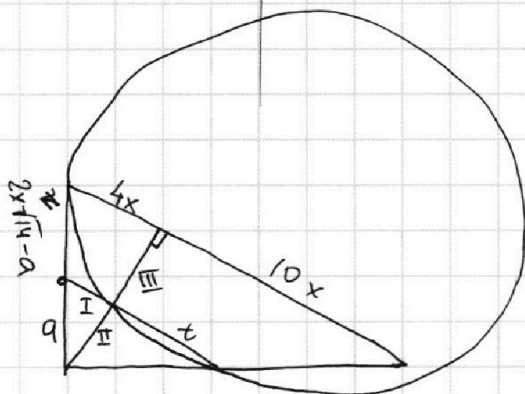
$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6x + y \leftarrow \cancel{6x} - 6x - y_1 = 48$$

$$y = -6x + 48 - 6x - y_1$$



$$4x \cdot 14x$$

$$2x\sqrt{14}$$

$$4x \cdot 10x$$

$$\textcircled{IV} 2x\sqrt{10} - \sqrt{\frac{5}{7}} a$$

$$\frac{I}{4x} = \frac{a}{2x\sqrt{14}}$$

$$I = \frac{4a}{2\sqrt{14}} = \frac{2a}{\sqrt{14}}$$

$$II = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{14}} = \sqrt{\frac{10a^2}{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}} a$$

$$\frac{t}{10x} = \frac{\sqrt{\frac{5}{7}} a}{2x\sqrt{10}}$$

$$t = \frac{10\sqrt{5} a}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\sqrt{5} a}{\sqrt{14}}$$

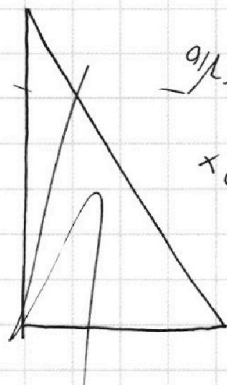
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

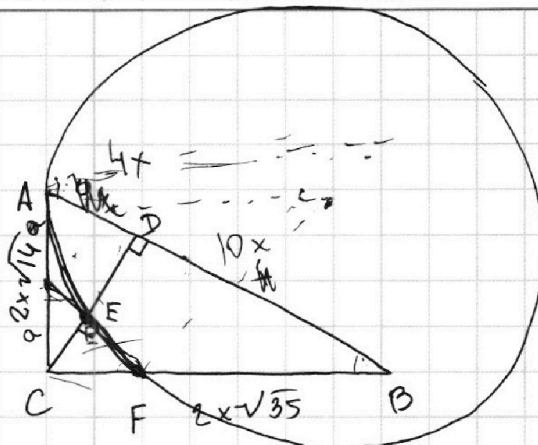
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Handwritten notes: $0! \cdot x$, $x \cdot 0! \cdot x$, $x \cdot 0! \cdot x$



$$a = \log_{11} x \quad b = \log_{11} 0.5 y$$

$$a + b = \log_{11} 0.5 xy$$

$$0.5 xy = 11 \quad xy = 11 \cdot 2$$

$$40x^2 \quad 8x\sqrt{10}$$

$$\frac{2a}{3a} - \frac{18}{3a}$$

$$-\frac{16}{3a}$$

$$-\frac{2}{3} \log_{11}$$

$$5x \cdot \frac{10}{5} = \frac{10}{5}$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} = -5$$

$$\frac{3a^5 - 16}{3a} = -5$$

$$\frac{3b^5 + 16}{3b} = -5$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$3a^5 + 3b^5 + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 15(a+b) = 0$$

$$3(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$a+b=0$$

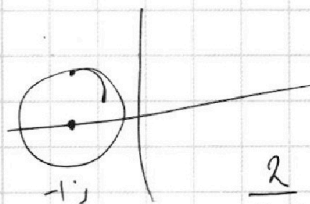
$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$3a^5 + 15a - 16 = f(x)$$

$$f'(x) = 15a^4 + 15$$

$$15a^4 + 15 = 0$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$



$$\frac{2}{3a} - \frac{18}{a}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 \cdot 14 - 4xa\sqrt{14} + a^2 = \frac{4a^2}{14} \cdot \frac{49a^2}{14}$$

$$\sqrt{14} \quad \# \quad 4x^2 \cdot 14 - 4xa\sqrt{14} + a^2 - a^4 = 0$$

$$D = 16a^2 \cdot 14 - 4 \cdot 4 \cdot 14(a^2 - a^4) =$$

$$= 16a^2 \cdot 14 - 16 \cdot 14a^2 + 16 \cdot 14a^4$$

$$x = \frac{4a\sqrt{14} + 4a^2\sqrt{14}}{8 \cdot 14} = \frac{a\sqrt{14} + a^2\sqrt{14}}{28}$$

$$\left(\frac{4x \cdot 2x\sqrt{10}}{2} = 4x^2\sqrt{10} \right)$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} a \cdot \frac{5a}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5} a \cdot 5a}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}} = 5\sqrt{5} a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos x = y$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos y = x$$

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos x$$

$$\arccos(\sin x) = y$$

$$\cos y = \sin x$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos^2 y = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 y + \cos^2 x = 1$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\cos(10 \arccos(\sin x)) = \cos(9\pi - 2x)$$

$$\frac{\pi}{6}$$

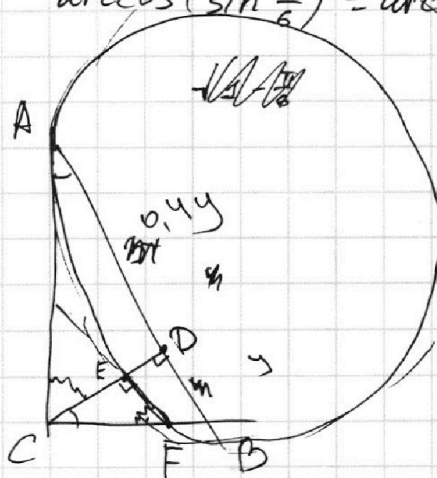
$$\arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{6}$$

$$?$$



$$\frac{x+y}{y} = 1,4$$

$$x+y = 1,4y$$

$$x = 0,4y$$

$$\arccos \sqrt{1 - \cos^2 x} = y$$

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 y$$

$$\sin x = \cos y$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\arccos(\sin x) =$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

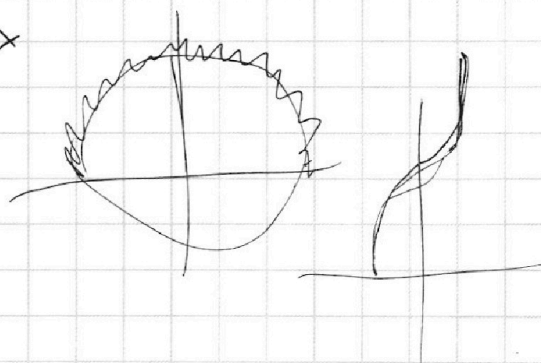
$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 ab &= 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k & 21 \cdot 25 &= 525 \\
 bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot p & 21 &= 21 \\
 ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot v & 25 &= 25 \\
 a^2 b^2 c^2 &= 2^{32} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} & 46 &= 46 \\
 & & 13 &= 13 \\
 & & 59 &= 59 \\
 abc &= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{20} & k &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ab &= 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} & a &= 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z & b &= 2^p \cdot 3^k \cdot 5^L & c &= 2^r \cdot 3^d \cdot 5^f \\
 bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} & x+p &= 6 & p+r &= 14 & x+r &= 16 \\
 ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} & y+k &= 14 & k+d &= 21 & y+d &= 25 \\
 a &= 5^f & z+l &= 11 & l+f &= 13 & z+f &= 28 \\
 f+k &= 11 & \begin{cases} x-r &= -8 \\ x+r &= 16 \end{cases} & & 2x &= 8 \Rightarrow x &= 4 & \Rightarrow v &= 12 \\
 k+l &= 13 & & & & & & & \\
 f+l &= 28 & & & & & & & \\
 f-l &= -2 & & & & & & & \\
 2f &= 26 & & & & & & & \\
 f &= 13 & & & & & & & \\
 l &= 15 & & & & & & & \\
 k &= -2 & & & & & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x-r &= -8 \\ x+r &= 16 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x &= 4 \\ r &= 12 \end{cases} \\
 y-d &= -7 & & & & & & \\
 y+d &= 25 & & & & & & \\
 2y &= 18 & & & & & & \\
 y &= 9 & \Rightarrow d &= 16 & & & & \\
 k &= 5 & & & & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z-f &= -2 \\
 z+f &= 28 \\
 2z &= 26 \\
 z &= 13 & \Rightarrow p &= 15 \\
 l &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f+k &= 11 \\
 k+l &= 13 \\
 f+l &= 28 \\
 f-l &= -2 \\
 2f &= 26 \\
 f &= 13 \\
 l &= 15 \\
 k &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f+k &= 11 \\
 k+l &= 13 \\
 f+l &= 28 \\
 f-l &= -2 \\
 2f &= 26 \\
 f &= 13 \\
 l &= 15 \\
 k &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{-2} \\
 b &= 4 \cdot 3^5 \cdot 0,25 \\
 b &= 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{-2} \\
 a &= 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \\
 c &= 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z+l &= 11 \\
 l+f &= 17 \\
 z+f &= 28 \\
 \frac{1}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z-f &= -6 \\
 z+f &= 28 \\
 \Rightarrow z &= 11 \\
 l &= 0 \\
 f &= 17
 \end{aligned}$$