



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

т.к. $a^6 : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$, $b^6 : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$,
 $c^6 : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$, то $a^6 \geq 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $b^6 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$,
 $a^6 \geq 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ значит $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 \geq$
 $\geq 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$. Заметим, что слева стоит
 квадрат, а справа нет т.к. 3 стоит
 в нечётной степени, при этом т.к.
~~каждое~~ ~~каждое~~ из трёх произведений
 делится на 3 в определённой степени, то
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ делится на 3^{59} ~~степень~~ наименьший
 квадрат больший $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ и делящийся
 на это число $(a^2 \cdot b^2 \cdot c^2)$ делится на него, т.к.
 из-за того что это произведение a^6, b^6 и c^6
 это число $2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$, но тогда наиме-
 ньшее возможное значение $a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} =$
 $= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$
 Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5. AL = AC - LC = AC - K \cdot AC = A(1 - K)$$

$$(из \triangle LEC \sim \triangle ACD)$$

$$6. из \triangle LEC \sim \triangle ACD, LE = K \cdot AD$$

$$из \triangle LCF \sim \triangle ACB, LF = K \cdot AB$$

$$7. AL^2 = A^2(1 - K)^2$$

$$+ LE \cdot LF = K^2 \cdot AD \cdot AB,$$

т.к. $\triangle ACB$ - прямоуго., AD - высота про-
ведённая к гипотенузе, то $AD \cdot AB = AC^2$

$$8. AL^2 = LE \cdot LF, A^2(1 - K)^2 = K^2 \cdot AD \cdot AB,$$

$$A^2(1 - K)^2 = A^2 \cdot K^2, (1 - K)^2 = K^2$$

$$(1 - K)^2 - K^2 = 0$$

$$1 \cdot (1 - 2K) = 0$$

$$K = \frac{1}{2}$$

$$9. S_{ACD} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{CD \cdot 0,4x}{2}$$

$$S_{CEF} = S_{CDB} \cdot K^2 = \frac{CD \cdot DB}{2} \cdot K^2 = \frac{CD \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{CD \cdot 0,4x}{2}}{\frac{CD \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{4}} \cdot 4 =$$

$$= \frac{0,4}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 1,6$$

ОТВЕТ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$$

Заметим, что $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \leq \pi, \quad 0 \leq 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) \leq 10\pi,$$

значит и $0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi, \quad -9\pi \leq -2x \leq \pi,$

$$9\pi \geq 2x \geq -\pi, \quad \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ так же}$$

Заметим, что в зависимости от промежутка, где находится x , $\arcsin(\sin x)$

выражается по разному. Существует

1 случай: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x$

$$x \cdot 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \pi \text{ не подходит}$$

2 случай: $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = \pi - x$

$$10\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi + 10x = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{14}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi - \pi \text{отб. } x,$$

$$3 \text{ (1) } x, \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right], \quad \alpha \text{M}(\sin(\sin x)) = x - 2\pi$$

$$10 \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x$$

$$x = 2\pi - \pi \text{отб. } x,$$

$$4 \text{ (1) } x, \quad x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right], \quad \alpha \text{M}(\sin(\sin x)) = 3\pi - x$$

$$10 \left(x - \frac{5\pi}{2} \right) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{34}{12}\pi = \frac{17}{6}\pi - \pi \text{отб. } x,$$

$$5 \text{ (1) } x, \quad x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right], \quad \alpha \text{M}(\sin(\sin x)) = x - 4\pi$$

$$10 \left(\frac{9\pi}{2} - x \right) = 9\pi - 2x$$

$$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$36\pi = 8x$$

$$x = \frac{36}{8}\pi = \frac{9}{2}\pi - \pi \text{отб. } x,$$

т.к. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$, то больше значений нет
ответ: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7}{6}\pi, x = 2\pi, x = \frac{17}{6}\pi, x = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 & (2) \end{cases}$$

ПРЕОБРАЗУЕМ (2)

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

Полученное уравнение равносильно системе (совокупности)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Полученная совокупность задается на плоскости
две окружности ω_1 и ω_2 с центрами
 $(0,0)$; $(0,-9)$ и радиусами 5 ; 2
соответственно. (1) и уравнение задает
прямую, но т.к. нам нужно найти
 a , при которых найдется a и b , то
можно считать произвольным параметром
при фиксированном a , значит (1) задает
семейство прямых параллельных друг другу
прямых, у каждой прямой из этого
семейства одинаковый угловой коэффициент

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

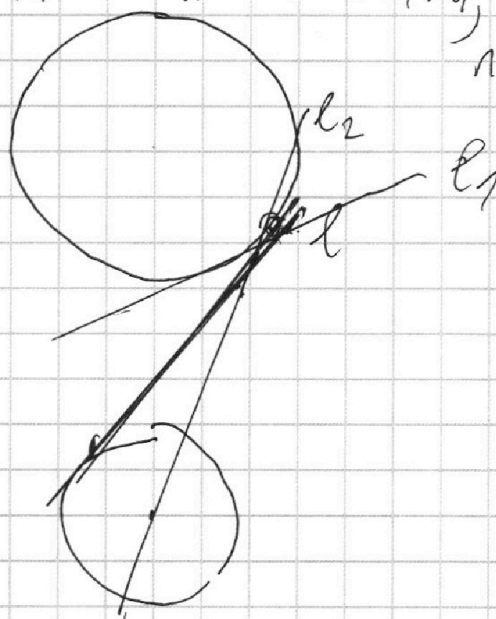
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если угловой коэффициент больше 0
и больше $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, то найдётся такое b ,
что одна из прямых пересечёт
обе окружности, в иначе нет
(L_2 пересекает обе окружности, а L_1 , либо, одну,
либо ни одну)



Аналогично для k получаем,
что $k < -\frac{4\sqrt{2}}{3}$, случаи $k = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$ нам
не подходят, ведь прямые только касаются
случай $k = 0$ тоже, ведь тогда прямая
параллельна Ox и, очевидно, не может
сразу пересечь обе окружности, (к-иле
вои коэффициенту семейства прямых),

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найти a и b если

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$5x - 6 = 6ay$$

$$\frac{5}{6a}x - \frac{6}{6a} = y, \text{ если } a \neq 0$$

Если $a = 0$, то прямая задается

уравнением $5x - 6 = 0$ и параллельна

оси OY , такое a нам подходит,

т.к. при $b = 0$ прямая пересекает

ось OY и окружность.

и так,

$$\begin{cases} k > \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ k < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \end{cases} \quad \text{---}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \quad 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \quad 0 > a > \frac{-35}{24\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 < \alpha < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ \alpha > \alpha > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

Итого вый промежуток $\alpha \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$

Ответ: $\alpha \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

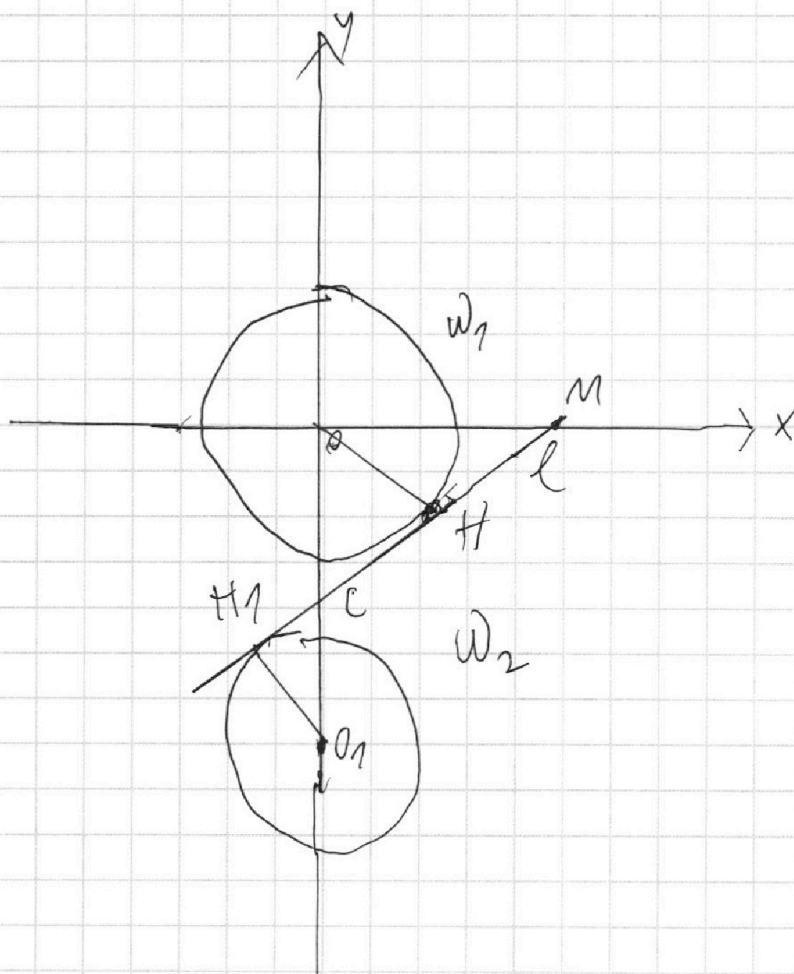
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чтобы нашлось 6 такое, что система
имеет 4 решения, нужно, чтобы
(решу семейства прямых нашлась хотя бы)
1 прямая, пересекающая обе окружности,
рассмотрим граничный случай, когда есть
прямая, касающаяся обеих окружностей,



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☒

5 ☐

6 ☐

7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Допустим O - центр ω_1 , O_1 - центр ω_2 ,
 ℓ - общая касательная, $\ell \cap \omega_1 = H$, $\ell \cap \omega_2 = H_1$,
 $HH_1 \perp OO_1 = E$, рассмотрим $\triangle HOC$ и $\triangle H_1O_1C$
они оба прямоугольные, $\angle H_1CO_1 = \angle OCH$ как
вертикальные, тогда $\triangle HOC \sim \triangle H_1O_1C$.

$$\frac{OC}{CO_1} = \frac{HO}{O_1H_1}, \quad \frac{OC}{O_1O - OC} = \frac{5}{2}, \quad \frac{OC}{9 - OC} = \frac{5}{2},$$

$$2OC = 45 - 5OC, \quad 7OC = 45, \quad OC = \frac{45}{7}.$$

Допустим, ℓ пересекает ось абсцисс

в точке M , $\triangle OCM$ - прямоугол, OH - высота,

значит $\angle OCM = \angle OCH$, $\tan OMC = \tan OCH$

$$\tan OCH = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 OCH} - 1} = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{OC}{OH}\right)^2} - 1} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{7}{5 \cdot \frac{45}{7}} - 1} = \sqrt{\left(\frac{OC}{OH}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Заметим, что ввиду симметричности

окружностей относительно OY , вторая

общая касательная имеет противоположный

угловой коэффициент



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,1254}^3 (11^{-13}) - 5$$

$$0,54 = e$$

$$xy = 2tx$$

$$\log_{11}^4 (t) + \log_t 11 = \log_t^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{matrix} x > 0 & t \neq 1 \\ t > 0 & x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\text{НН ОДЗ } \log_t^3 (11^{-13}) = -\frac{13}{3} \log_t 11$$

$$\log_t 11 = \frac{1}{\log_{11} t}, \quad \log_x^3 \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_x 11$$

$$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$$

$$\text{Заменим, } \log_{11} t = a, \quad \log_{11} x = g, \text{ получим}$$

$$a^5 - \frac{6a}{a} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} - 5 \quad (1)$$

$$a^5 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{a} - 5 \quad (2)$$

$$\text{т.к. } t \neq 1, x \neq 1, \text{ то НН ОДЗ}$$

$$(1) \text{ кмн можем домножить на } a,$$

$$(2) \text{ НН А } a, \text{ получим}$$

$$a^5 - 6 + \frac{2}{3} = -5a \quad (3)$$

$$a^5 + 1 + \frac{13}{3} = -5a \quad (4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

похим (x^3) и (y^4) , получим $x^5 + y^5 = -5(x+y)$

$$x^5 + 5x + y^5 + 5y = 0$$

рассмотрим $f(x) = x^5 + 5x + y^5 + 5y$, y - фиксировано

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$f(x)$ монотонна на $\mathbb{R}$, значит

уравнение $f(x) = 0$ имеет не более

1 решения, при этом $x = -y$ является

решением (но т.к. $x \neq 0$, $y \neq 0$, $(0,0)$ -

не является решением)

поставим $x = -y$ в третье уравнение

$$-y^5 - 6 + \frac{2}{3} = 5y$$

$$y^5 + 5y = \frac{16}{3}$$

при этом (4) можно переписать как

$$y^5 + \frac{16}{3} = -5y$$

$$y^5 + 5y = -\frac{16}{3}$$

зверно, значит $(-y, y)$ решением

системы является $(-y, y)$, $y \neq 0$

тогда $x = -y$, $\log_{11} x = -\log_{11} y$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} t = \log_{11} \frac{1}{x}$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$t > 0, t \neq 1$$

$$\text{Горда } xy = 2tx = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$$

$$\text{ОТВЕТ: } 2$$

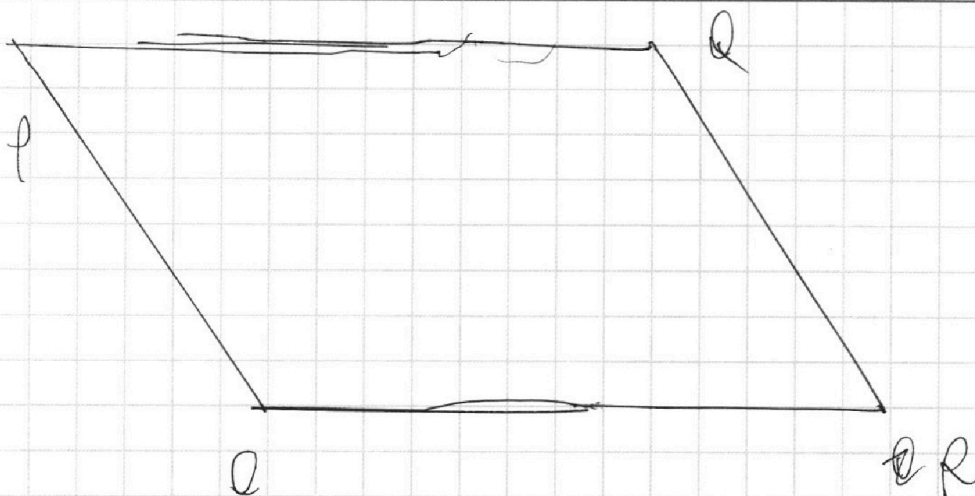
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем $\tan \angle ORQ$

$$\tan \angle ORQ = \frac{90}{15} = 6 \quad (\text{т.к. } \angle ORQ \approx 80.5^\circ)$$

у-координата Q - 90, у-координата R - 0,
х-координата Q - 2, х-координата R - 17,
 $\tan \angle ORQ = \frac{90-0}{17-2} = 6$

Заметим, что если мы уже выбрали точку B, то нам надо найти точки на прямой $6x + y + 6x_2 + y_2 = 18$, такие, что x, y — целые целочисленные и A лежит внутри PQRO.

Заметим, что такая прямая симметрична ~~QR~~ относительно O прямой, параллельной QR, относительно OX.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Вам перемишем уравнение в виде

$$y = 48 + 6x_2 + y_2 - 6x, \text{ т.к. мы получили}$$

точка внутри параллелограмма, то

и прямая волна ~~и~~ лежат внутри

параллелограмма хотя бы частично.

Но т.к. целочисленных точек на

границах ^{или верхней} нижней (стороне) всего ~~36~~ ⁶⁶

А $48 + y_2 + 6x_2$ — целое число, то

таких прямых всего ~~не~~ ³⁶ более ~~66~~

(т.к. такая прямая пересекает нижнюю

или верхнюю

сторону параллелограмма в целочисленной

точке, нам не подходят точки

$(0,0)$ и $(-15,90)$, так как в этом случае

прямая пересекает параллелограмм в

отрицательных точках, значит всего прямых

не более 6264

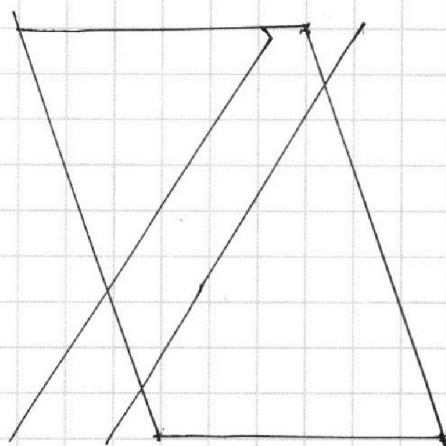
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ПРЯМАЯ
ЛЕЖАЛА ХОТЯ БЫ
ЧАСТИЧНО, ОНА ДОЛЖНА
ПЕРЕСЕЧЬ ВЕРХНЮЮ
ИЛИ НИЖНЮЮ
СТОРОНУ ИЛИ

ИХ ПРОЕКЦИИ, (ОТКУДА И СЛЕДУЕТ ОЦЕНКА
НА БЧ⁶⁶ ПРЯМЫХ, Т.К. НА ОБЪЕДИНЕНИИ
СТОРОНЫ И ПРОЕКЦИИ $17 - (-15) + 1 =$
 $= 33$ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК, А ВСЕГО
ИХ В 2 РАЗА БОЛЬШЕ), НО Т.К.,
 $y = 48x_2 + y_2 - 6x$, ТО ЕСЛИ ПРЯМАЯ
ПЕРЕСЕКАЕТ НИЖНЮЮ СТОРОНУ ИЛИ
ПРОЕКЦИЮ ВЕРХНЕЙ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ
ТОЧКЕ, ТО И ВЕРХНЮЮ СТОРОНУ ИЛИ
ПРОЕКЦИЮ НИЖНЕЙ ОНА ПЕРЕСЕЧЕТ
В ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ТОЧКЕ (Т.К. СДВИГ
ПО y БУДЕТ 90, ТО СДВИГ ПО x БУДЕТ
15). ЗНАЧИТ, КАЖДУЮ ПРЯМУЮ МЫ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посчитали 2 раза, то есть их всего
 $\frac{64}{2} = 32$, для прямых пересекающих
параллелограмм в точках от $(2, 0)$
 $(17, 0)$ до $(15, 0)$ целочисленных
точек внутри параллелограмма
и на прямой нет. Для $(15, 0)$ она
отсюда



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b \cdot c = a^2 b^2 c^2 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$b = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$$

$$c = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$$

$$x + x_1 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 19$$

$$x + x_2 \geq 16$$

$$511 - 5110x = 911 - 2x$$

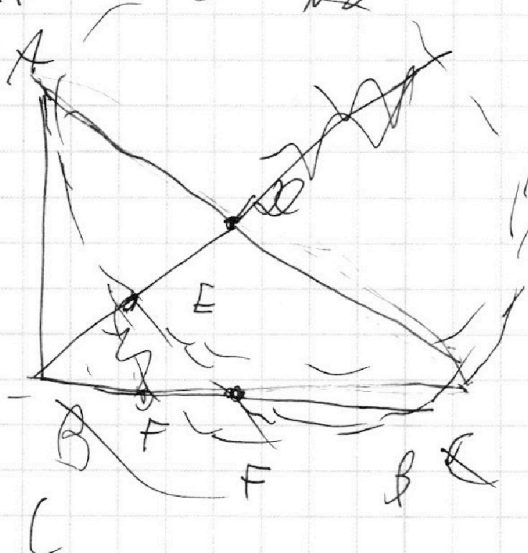
$$8x$$

$$10 \sqrt{1-x^2} = 911 - 2x$$

$$60 - 10x^2 = 2x^2 - 364x + 311x^2$$

$$-8x = 411$$

$$x = -\frac{411}{8}$$



$$y + y_1 = 13$$

$$y_1 + y_2 = 21$$

$$y_2 + y = 25$$

$$\begin{cases} x + x_1 = 6 \\ x_1 + x_2 = 19 \\ x + x_2 = 16 \end{cases}$$

$$x_2 - x = 8$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 - x = 8$$

$$x + x_2 = 16$$

$$x_2 = 12$$

$$x = 4$$

$$y_2 - y_1 = 12$$

$$y_2 + y_1 = 21$$

$$2y_2 = 33$$

$$14x^2 - 364x + 311x^2 - 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{7}{121} - 5$$

$$\log_{11} (x) + \log_x 11 = \log_{x^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11} x - 6 \log_x 11 + \frac{2}{3} \log_x 11 = -5$$

$$x=1 \quad x^4 - \frac{6}{x} + \frac{2}{3x} = -5$$

$$x=1 \quad x^4 + \frac{1}{x} + \frac{13}{3x} = -5$$

$$x^5 - \frac{16}{3} = -5x$$

$$9x^5 + \frac{16}{3} = -5x$$

$$\log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{x}$$

$$x^5 + 9x^5 = -5(x+9)$$

$$x = \frac{1}{x}$$

$$x^5 + 5x = \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{1}{9.5y}$$

$$9x^5 - x^5 + \frac{32}{3} = -5 \cdot (9 - x)$$

$$x \cdot y = \frac{1}{9.5y} = (9-x)(9 \dots) = -\frac{32}{3}$$

$\approx$

$$x(x^4+5) + 9(9x+5) = 0$$

$$x = -9$$

$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

