



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = k 2^9 3^{10} 5^{10}$; $bc = m 2^{14} 3^{13} 5^{13}$; $ac = n 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Тогда, $a^2 b^2 c^2 = k^2 m^2 n^2 \cdot 2^{42} 3^{41} 5^{53}$; Т.к. a, b и c натуральные по условию, то abc - тоже натуральное, а значит, из числа $k^2 m^2 n^2 \cdot 2^{42} 3^{41} 5^{53}$ мы должны быть уверены.

abc является квадратом натурального, тогда, оно должно содержать в разложении на простые множители четное кол-во двоек, троек и пятёрок.

Чтобы это условие выполнялось, нам нужно, чтобы k, m и n были кратно $2, 3$ и 5 соответственно. Т.к. нам требуется наименьшее abc , возьмём $k, m, n = 15$.

Тогда в этом случае $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{24}$

Приведём пример чисел a, b и c , когда такое возможно.

Возьмём, $k=1, m=15, n=1$, тогда числа $a = 2^9 3^{10} 5^{10}$

чтобы k, m и n давало в разложении хотя бы одну тройку и как минимум 4 пятёрки, т.к. $a^2 c^2 = 2^{42} 3^{41} 5^{60}$

Возьмём, что $a^2 b^2 c^2 = 2^{42} 3^{42} 5^{60}$ (т.к. мы ищем наименьшее abc), тогда $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$

Тогда, $a =$ Приведём пример, когда такое возможно:

$$\begin{cases} a = 2^7 3^{10} 5^8 \\ b = 2^2 3^3 \\ c = 2^{12} 3^{11} 5^{20} \end{cases}$$

Ответ: $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$

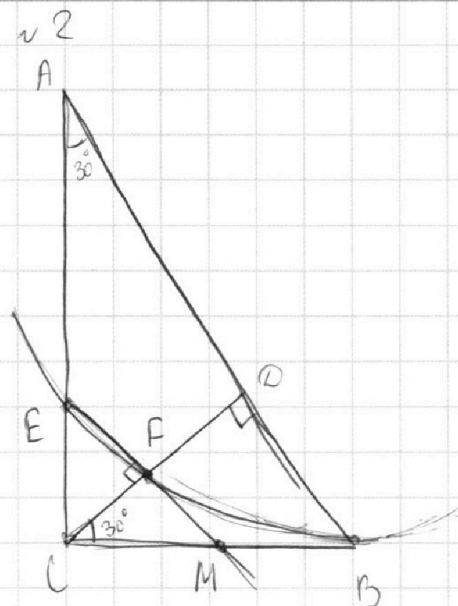
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AD \cdot DB = 3:1$$

$$AD \parallel EF$$

кр. и касается BC в B

Найти:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:

1) Пусть $AD = 3x$; $BD = x$; тогда $CD = x\sqrt{3}$

$$AC = \sqrt{3x \cdot 4x} = 2x\sqrt{3}; \quad BC = \sqrt{x \cdot 4x} = 2x$$

Заметим, что $BC = 0,5 AB$, значит, $\angle CAB = 30^\circ$

2) $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ по двум углам;

$\angle ECF$ - общий

$\angle CFE = \angle CDA$, т.е. EF как соответственные при $FE \parallel AD$ и секущей CD

$$\text{Пусть } \frac{CE}{AC} = k$$

3) Продолжим EF за F ;

$$MB^2 = MF \cdot ME \text{ как } \text{срезок касательной}$$

$$MB = \sqrt{k \cdot DB \cdot k \cdot AB} = k \sqrt{x \cdot 4x} = 2kx$$

$$\angle MCF = 30^\circ \text{ значит, } CM = 2FM = 2kx$$

Тогда, EM - средняя линия $\triangle ABC$ по признаку

$$\text{Тогда, } \frac{S_{CFE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}, \text{ т.к. } \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{16}{3} \quad \text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

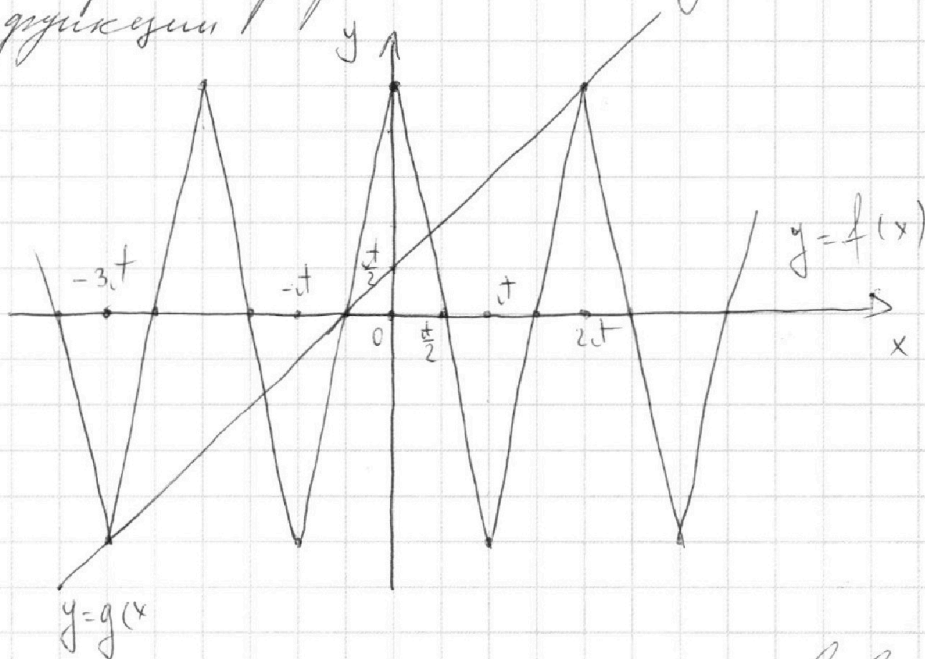
~3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2};$$

$$y = f(x) = 5 \arcsin(\cos x)$$

Построим графики обеих
функций

$$g(x) = x + \frac{\pi}{2}$$



Из построения можно сделать вывод, что уравнение имеет ~~5 корней~~ как минимум 3 ~~корня~~ корня. Проверим, пересекаются ли графы пересекутся ли графики в точке $(-3\pi; -\frac{5\pi}{2})$ и $(2\pi; \frac{5\pi}{2})$

$$5(\arcsin(\cos(-3\pi))) = -\frac{5\pi}{2} \text{ (верное)} \quad -3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2} \text{ (верное)}$$

$$5(\arcsin(\cos(2\pi))) = \frac{5\pi}{2} \text{ (верное)} \quad 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ (верное)}$$

Значит, уравнение имеет 5 корней, два из которых - это -3π и 2π .

Попробуем подобрать остальные

$$5 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ (верное)}, \text{ значит, } -\frac{\pi}{2} \text{ - корень}$$

$$5 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \text{ (верное)}, \text{ значит, } \frac{\pi}{3} \text{ - корень}$$

$$5 \arcsin(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \text{ (верное)}, \text{ значит, } -\frac{4\pi}{3} \text{ - корень}$$

~~5 корней~~ Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

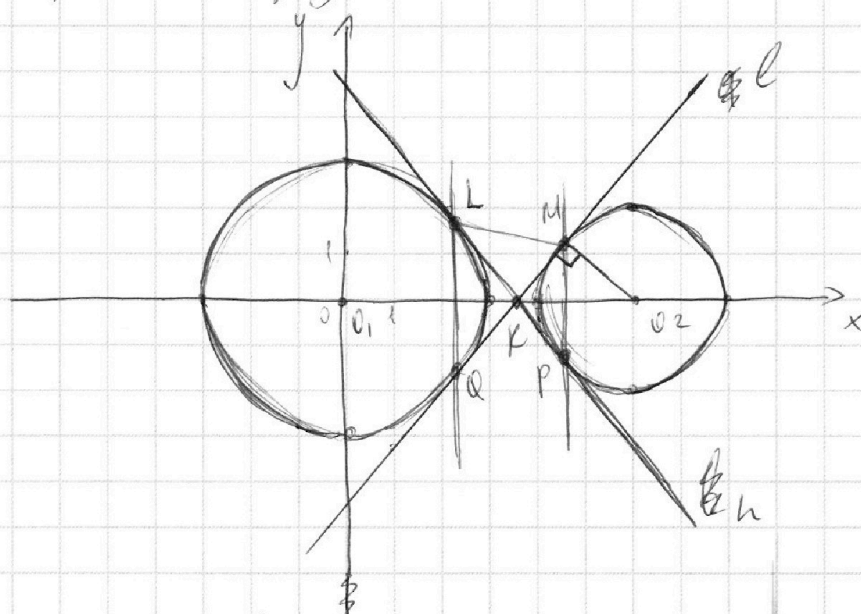
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Уравнениями данной системы задаются окружности и прямая, при этом прямая может иметь любое расположение на плоскости.
Построим окружности



Построим две общие касательные окружностей, они симметричны относительно O_1O_2 .
Можно утверждать, что ни одна прямая $x = m$, где $m \in \mathbb{R}$ не будет удовлетворять условию, это видно из чертежа.

Заметим, что прямые l и n можно назвать границами положениями, т.к. для любой прямой, у которой угловой коэффициент больше, чем у прямой a , или меньше, чем у прямой b , как бы мы ни двигали эту прямую в плоскости условие выполнения не будет, т.к. когда такая прямая начинает касаться одной окружности, она уже не пересекает

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



другую. а вот для всех чисел $k_{\min} \leq t \leq k_{\max}$, где
 ~~t - угловой коэффициент~~ (k_n - угловой коэффициент n прямой n ,
 k_l - угловой коэффициент l) прямая, для прямой
с таким угловым коэффициентом найдётся
такой свободный член, при котором понадо-
бное условие будет выполняться.

При этом, в силу симметрии относительно
 Ox , $k_n' = -k_l$

$$k_l = \tan \angle MKO_2; \quad \tan \angle MKO_2 = \frac{MO_2}{KM} = \frac{2}{KM}$$

$$\triangle MKP \sim \triangle QKL \quad \frac{MK}{KQ} = \frac{2}{3}, \quad \text{т.к.} \quad \frac{MP}{LQ} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{QK}{KO_2} = \frac{3}{2} \quad O_2K = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

$$MK = \sqrt{\frac{144 - 100}{25}} = \sqrt{\frac{44}{25}} = \frac{4\sqrt{11}}{5}$$

$$\tan \angle MKO_2 = \frac{12}{4\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{3}{1}$$

$$-\frac{5\sqrt{11}}{22} < t < \frac{5\sqrt{11}}{22}$$

$$-\frac{5\sqrt{11}}{22} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{5\sqrt{11}}{22}$$



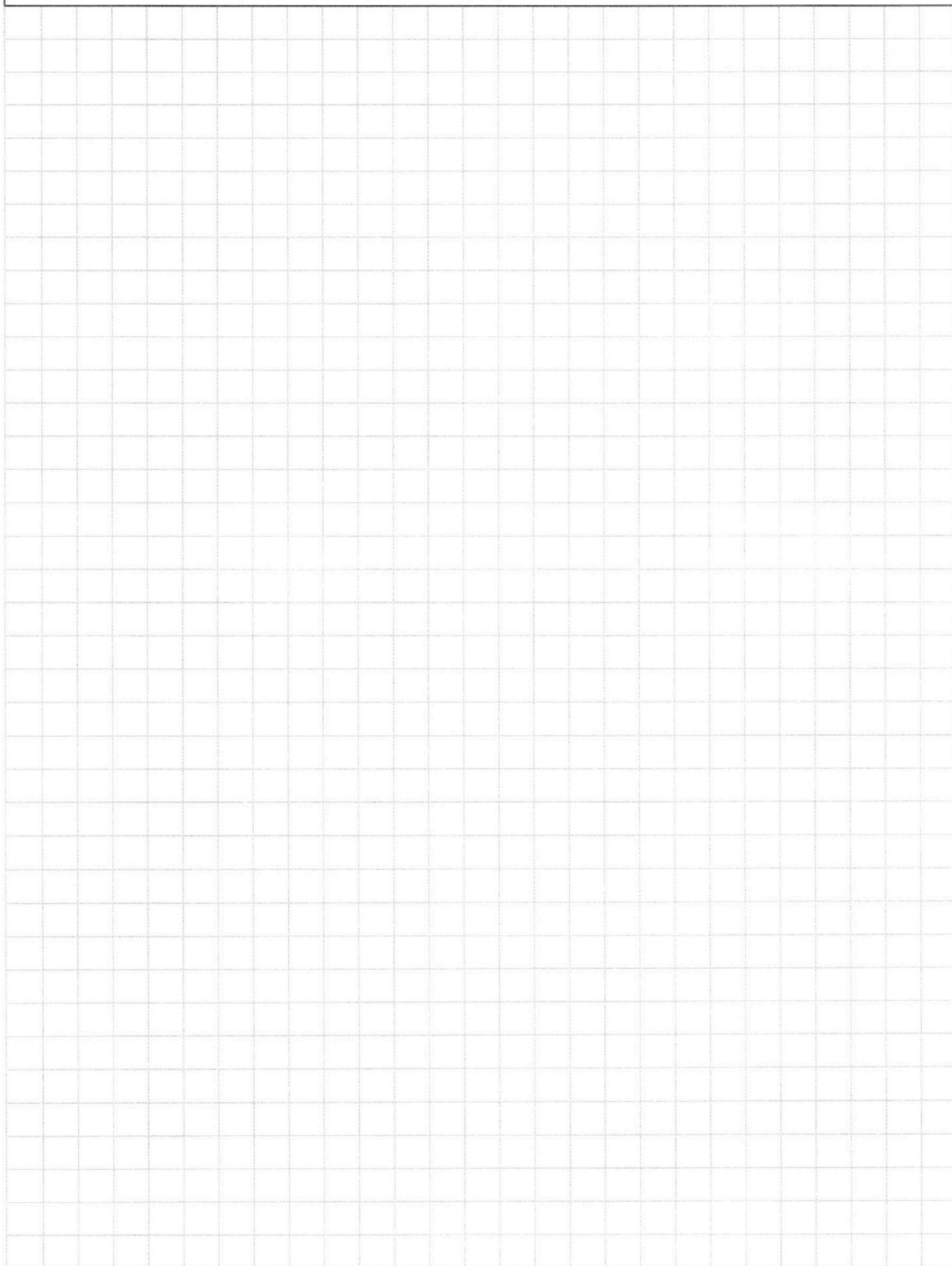
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

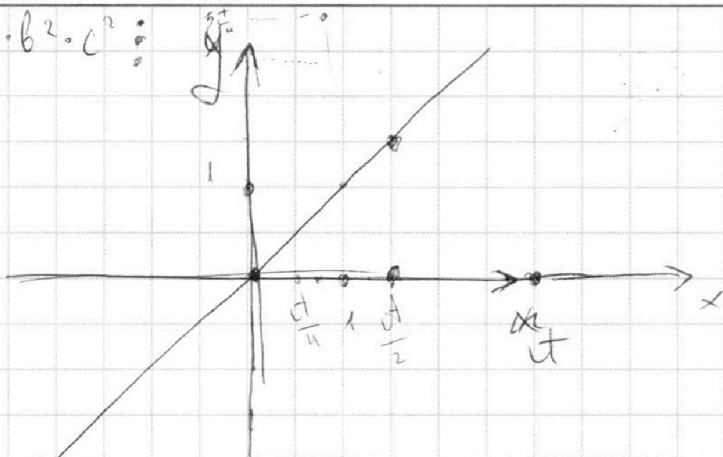
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 :$$



$$\arcsin 0$$

$$5 \mid \frac{5 \cdot 1}{10}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$5 \left(\arcsin \left(\sin \left(\frac{1}{2} + x \right) \right) \right) = x + \frac{1}{2}$$

$$5 \left(\frac{1}{2} + x - k \right) = x + \frac{1}{2}$$

$$5 \left(\frac{1}{2} + x \right) - 5k = x + \frac{1}{2}$$

$$5k = 4 \left(\frac{1}{2} + x \right)$$

$$k = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} + x \right)$$

$$5 \left(\frac{1}{2} + x - k \right) = x + \frac{1}{2}$$

$$a = 2^4 \cdot 5^{10} \cdot 4 \cdot 3$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 5^{20} \cdot 3^{11}$$

$$k m n = 3 \cdot 5^4$$

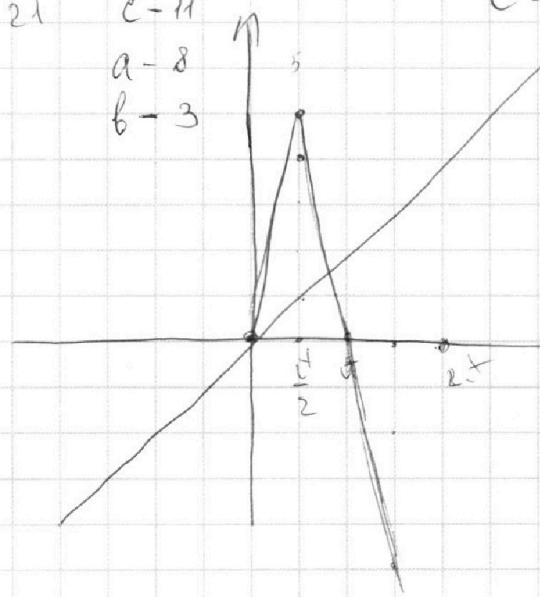
$$3,5 \log_3 8$$

$$2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$21 \quad c = 11$$

$$a = 8$$

$$b = 3$$



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y} \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$(\log_3 5xy)^4 + \log_{5y} \frac{4,35}{\log_3 x} + \frac{3,5}{\log_3 5y} + 16 = 0$$

М

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = k 2^9 3^{10} 5^{10}, bc = m 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ac = n 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = kmn 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

abc - натуральное, значит, $kmn = 15$ $kmn = 15$

$$abc = 2^1 3^1 5^1$$

$$a = 2$$

$$b = 2$$

$$c = 2$$

$$m = 15$$

$$30$$

$$\begin{array}{c|c|c} c=11 & c=11 & c=11 \\ a=9 & a=14 & a=13 \\ b=3 & b=3 & b=1 \end{array}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$kc = 2^{12} 3^{11}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

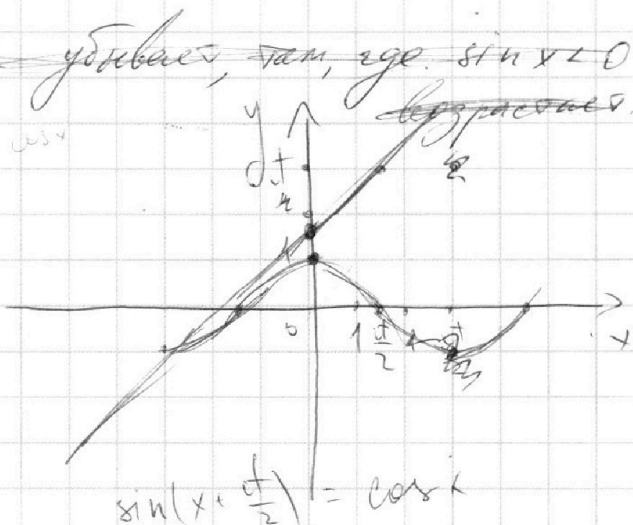
$$f'(x) = \frac{5 \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} - 1 = \frac{-5 \sin x}{|\sin x|} - 1$$

$\sin x$ Независимо от знака $\sin x$ имеет одинаковый
знак производной.

Там, где $\sin x > 0$ убывает, там, где $\sin x < 0$
увеличивается.

$$5 \arcsin(\cos x)$$

$$5 \arcsin(\sin t) = t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

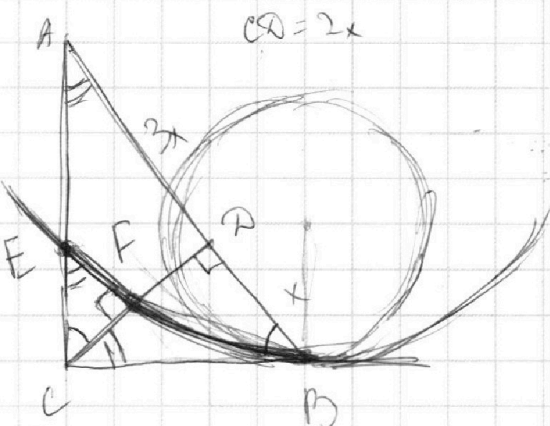
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

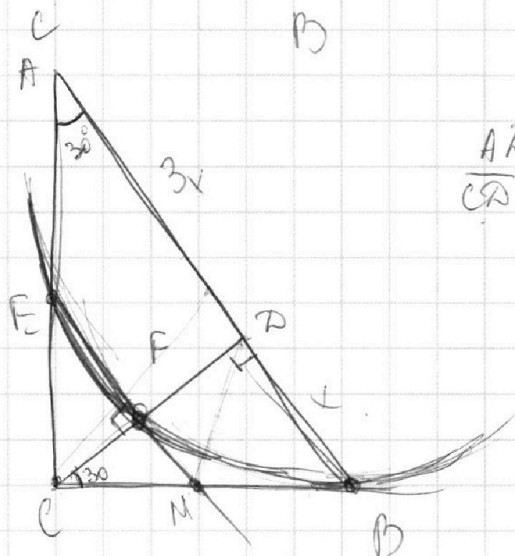


$AB \parallel EF$

$AD \cdot DB = 3:1$ Итого: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEEF}}$

$$\frac{EC}{AC} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{AB}$$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{CF}{BD} = \frac{EF}{CD}$$



$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}, \quad CD^2 = AD \cdot DB$$

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD$$

$$\frac{S_{CAD}}{S_{ABCE}} = \frac{3}{4}$$

$$MB^2 = MF \cdot ME = kx \cdot k4x = 2kx^2$$

$$MB = 2kx; \quad MB = 2$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD$$

$$AC = \sqrt{4x \cdot 3x} = 2x\sqrt{3}$$

$$MB =$$

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$BC = 2x$$

$$MF = kx$$

$$MB = \sqrt{kx \cdot 3kx} = kx\sqrt{3}, \quad CM = 2kx$$

$$2kx + kx\sqrt{3} = 2x$$

$$2k + k(2 + \sqrt{3}) = 2$$

$$k = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} =$$

$$k^2 = \frac{4}{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3 S_{ABC}}{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEEF}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{3 S_{ABC}}{7 + 4\sqrt{3}}} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$abc: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

c содержит на 5, 2"

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

Больше, чем a 3, 3"

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

c содержит на 10, 2"; 8, 3"; 20, 5" 3, 5"
 Больше чем b

a содержит на 5, 2"; 5, 3"; 17, 5" Больше b

$$ab = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z, a = 2^{x+5} \cdot 3^{y+5} \cdot 5^{z+17}, c = 2^{x+10} \cdot 3^{y+8} \cdot 5^{z+20}$$

$$abc = ab = 2^{2x+5} \cdot 3^{2y+5} \cdot 5^{2z+17}$$

$$2x+5=9$$

$$bc = 2^{2x+10} \cdot 3^{2y+8} \cdot 5^{2z+20}$$

$$2x+5=9$$

$$ac = 2^{2x+15} \cdot 3^{2y+13} \cdot 5^{2z+37}$$

$$x=4$$

$$y=2,5$$

$$z=-3,5$$

$$abc = 2^{3x+15} \cdot 3^{3y+13} \cdot 5^{3z+37} =$$

$$= 2^{12+15} \cdot 3^{7,5+13} \cdot 5^{-10,5+37} = 2^{27} \cdot 3^{20,5} \cdot 5$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_2 + x_3 = 14 \\ x_3 + x_1 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 12 \\ x_1 = 6,5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 10 \\ y_2 + y_3 = 13 \\ y_3 + y_1 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 21 \\ y_2 = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 10,5 \\ y_1 = 4,5 \\ y_2 = 2,5 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

$$28 + 14 = 42$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 20,5$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 10 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_1 + z_3 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_3 = 16,5 \\ z_2 = 13,5 - 3,5 \\ z_1 = 13,5 \end{cases}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 26,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

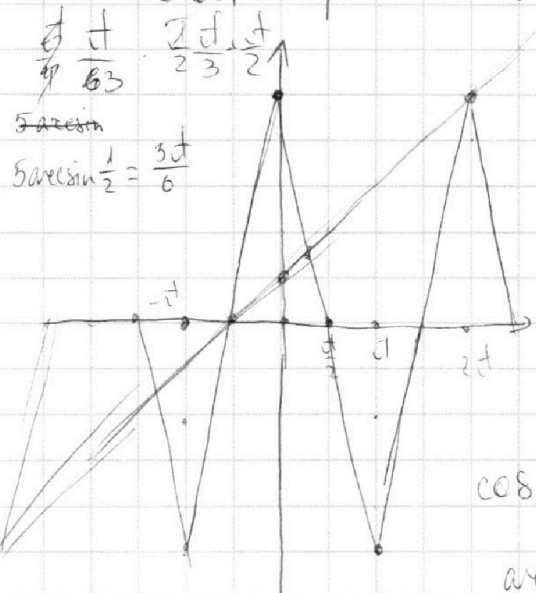
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{5t}{2} \leq 5a \cos(\cos x) \leq \frac{5t}{2}$$

$$-\frac{6t}{2} \leq x \leq \frac{4t}{2}$$

$x = 2t$ - решение



если решение есть, то оно в этом диапазоне.

$$\begin{cases} x = 2t \\ x = -\frac{t}{2} \\ x = \frac{t}{3} \\ x = -\frac{5t}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{t}{2} - \frac{5t}{2}$$

$$\cos = -\frac{1}{2}$$

$$5a \cos(-\frac{1}{2}) = -\frac{5t}{6}$$

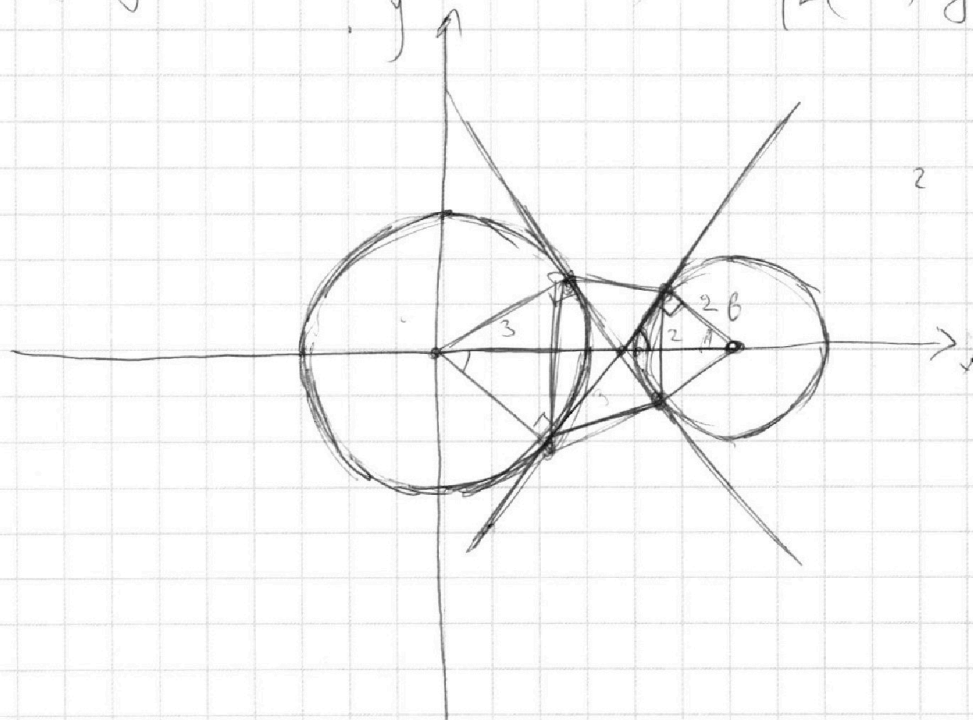
$$-\frac{8t}{6} + \frac{3t}{6} = -\frac{5t}{6}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arccos =$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ 2(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 3b = 0. \quad \dots \quad 2y = -ax + 3b.$$
$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}.$$