



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у/1.

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}$$

$$ab \cdot bc \cdot ca : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}, \text{ но так как } ab \cdot bc \cdot ca$$

полный квадрат, то он должен делиться на четные степени
своих простых множителей $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ca : 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \quad abc : ac : 5^{30}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Пусть $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$

$$b = 2^2 \cdot 3^2$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

Условия выполняются и abc минимально

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

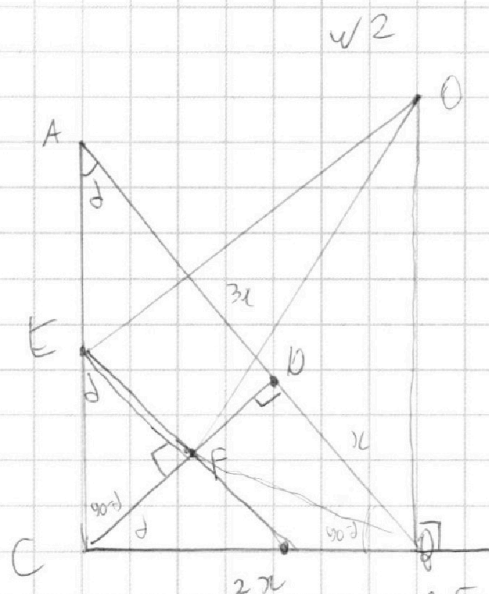
5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O - центр окружности

$$OB = x \quad AB:OB = 3:1$$

$$AB = 3x$$

$$OB^2 = AB \cdot OB \quad (\text{квадрат гипотенузы})$$

$$OB = \sqrt{AB \cdot OB} = \sqrt{3}x$$

$$AC = \sqrt{OB^2 + AB^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$CB = \sqrt{OB^2 + OB^2} = 2x$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAB$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x} = 2$$

OE = OF как радиусы, EF // AB

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sqrt{3}$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \quad x \in [0; \pi]$$

$$2) \arcsin(\cos x) =$$

$$1) x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi] \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$2) x \in [2\pi k + \pi; 2\pi k + 2\pi] \quad \arcsin(\cos x) = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k \quad (\text{целое})$$

$$1) 5 \arcsin(\cos x) = \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} & k \leq 1 \\ -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} & k \leq 1 \end{cases}$$

$$k \text{ целое} \Rightarrow k = 0 \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$k \in \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$2) 5 \arcsin(\cos x) = 5x - \frac{15\pi}{2} - 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi + 10\pi k \quad x = 2\pi + \frac{5\pi k}{2}$$

$$2\pi k + \pi \leq 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \leq 2\pi k + 2\pi$$

$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi k}{2} - 2 \leq k \\ \frac{\pi k}{2} \leq 0 & k \leq 0 \end{cases} \quad k \in \{-2, -1, 0\}$$

$$x \in \left\{ -3\pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

$$\text{Ответ: } x = -3\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2}; \quad x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3};$$

$$x = -\frac{4}{3}\pi.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

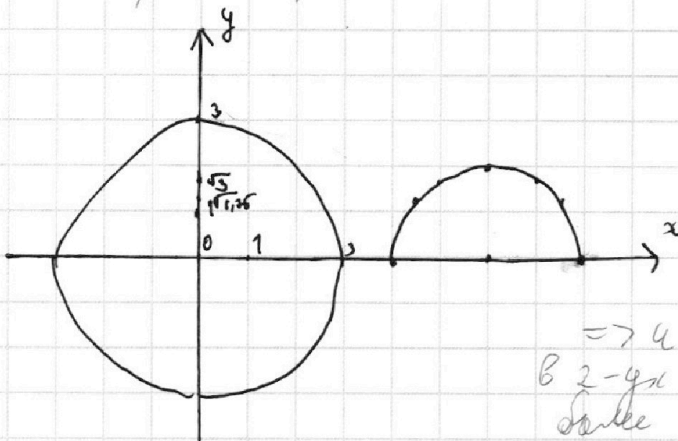


$$\begin{cases} ax+2y-36=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \quad y = \frac{36-ax}{2}$$

$x^2+y^2=9$ - окружность с центром 0,0, радиус 3

$$x^2+y^2-12x+32=0 \quad y = \sqrt{12x-x^2-32} = \sqrt{4-(x-6)^2}$$

Построим графика:



$y = \sqrt{4-(x-6)^2}$ построим по точкам $x \in [4,8]$ анализ - отрезок от 4 до 8

x	4	6	5	4,5	5,5	7	x=6
y	0	2	1,3	1,75	1,75	1,3	

прямая $y = \frac{36-ax}{2}$ должна пересекать график в 4 точки $\Rightarrow$ 4 точки пересечения первой и второй графиков в 2-х точках (с каждой окружностью по 2-х пересечений), для удобства $k = -\frac{a}{2}$, $p = \frac{36}{2}$
прямая $y = kx + p$

$$y = kx + p \quad x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad x^2 + (kx+p)^2 - 9 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + 2kpx + p^2 - 9 = 0 \quad D = 4k^2p^2 - 4k^2p^2 - 4p^2 + 36 + 36k^2 = 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad x^2 + (kx+p)^2 - 12x + 32 = 0$$

$$D = 4k^2p^2 + 144 - 48kp - 4k^2p^2 - 4p^2 - 432 - 432k^2 = 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0$$

$$\begin{cases} 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0 \\ 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9k^2 - p^2 + 9 > 0 \\ 8 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0 \end{cases}$$

$$p^2 < 9 + 9k^2 \quad p^2 < 8 - 6kp - 32k^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 8 + 9k^2 \\ 0 < \frac{8-32k^2}{6k+1} = \frac{(k-\sqrt{\frac{2}{3}})(k+\sqrt{\frac{2}{3}})}{6k+1} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0 & 9k^2 - p^2 + 9 > 0 \\ 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0 & 4 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0 \\ 9k^2 + 9 > p^2 & p \in (-3\sqrt{k+1}, 3\sqrt{k+1}) \\ 4 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0 \\ p^2 + 6kp + 32k^2 - 4 > 0 & \Delta = 36p^2 + 4k^2 - 432p^2 < 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \neq 1, x > 0 \quad 5y \neq 1, y > 0 \quad \sqrt{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 \cdot 243 - 8$$

$$t = 5y$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = 2 \log_3 x - 8$$

$$\log_3^4(t) + \frac{2}{\log_3 t} = 2 \log_3 x - 8$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -3,5$$

$$\log_3^5 t + 8 \log_3 t = 3,5$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t + 8 \log_3 x + 8 \log_3 t = 0$$

Получилим на левом члене вида $a^5 + b^5$ он имеет единственные корни $a = -b$, и его знак совпадает со знаком $a + b$, так что $a^5 + b^5$ можно представить как $(a + b)P(a, b)$, где $P(a, b) \geq 0$ *

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t = (\log_3 x + \log_3 t) (P(\log_3 x, \log_3 t))$$

$$(\log_3 x + \log_3 t) (P(\log_3 x, \log_3 t) + 8) = 0$$

$$P(\log_3 x, \log_3 t) + 8 > 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0$$

$$\log_3(xt) = 0 \quad xt = 1 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5}$$

$$* a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - b^3a + b^4) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓6

Рассмотрим на прямой $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$
 $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

Рассмотрим прямую $y = -3x + C$

Пусть $y_1 = -3x_1 + C_1, y_2 = -3x_2 + C_2$

Тогда $3x_2 + y_2 = C_2, 3x_1 + y_1 = C_1, 33 = C_2 - C_1$

Значит A и B лежат на параллельных прямых

$y = -3x + C_1, y = -3x + C_2$ где $C_2 - C_1 = 33$

Прямая $PQ - y = -3x$, прямая $QR - y = -3x + 60$

Значит через $OPQR$ проходят прямые вида $y = -3x + C$
 $C \in [0; 60]$

Посмотрим сколько целых точек лежит внутри $OPQR$ и на
 прямой $y = -3x + C$.

Если C нецелое, то y и x нецелые (0 точек)

Если $C \equiv 0 \pmod 3$, тогда $y \equiv 0 \pmod 3, y \in [0; 42] \Rightarrow (15 \text{ точек})$

Если $C \equiv 1 \pmod 3$, то $y \equiv 1 \pmod 3, y \in [0; 42] \Rightarrow (14 \text{ точек})$

Если $C \equiv 2 \pmod 3$, то $y \equiv 2 \pmod 3, y \in [0; 42] (14 \text{ точек})$

$C_2 - C_1 = 33, C_2 = C_1 + 33 \Rightarrow C_1 \equiv C_2 \pmod 3$

Если $C_2 \equiv 0$, то $y C_2 \in [33; 60]$ есть парный C_1 , в
 прямой $C \equiv C_1$ и C_2 по 15 точек $\Rightarrow \frac{(60-33+1) \cdot 15 \cdot 15}{3}$ способов

Если $C_2 \equiv 1$ $C_2 \in [34; 56]$, по 14 точек
 $\frac{(56-34+1) \cdot 14^2}{3}$ способов

$C_2 \equiv 2, C_2 \in [35; 59]$, по 14 точек $\frac{(59-35+1) \cdot 14^2}{3}$ способов

$$10 \cdot 15^2 + 9 \cdot 14^2 + 9 \cdot 14^2 = 5778$$

Ответ: 5778

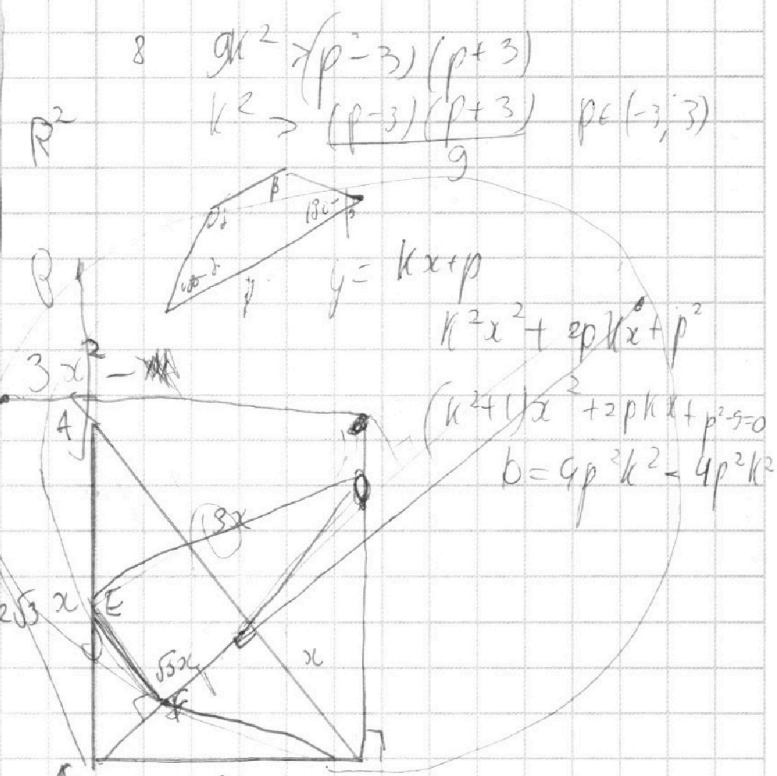
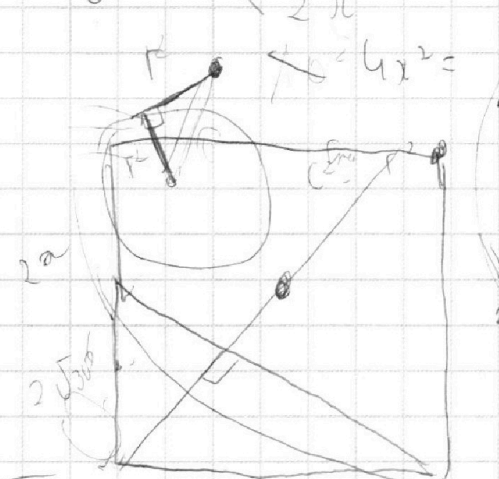
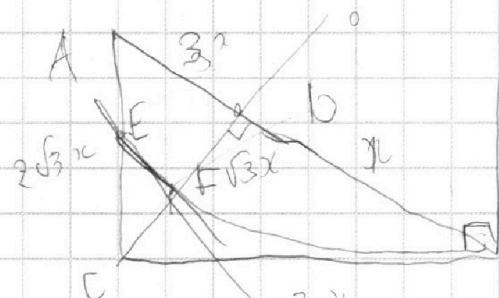
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2\sqrt{10}$
 $64 - 9 = 75$
 $55 \sqrt{10}$

$CE = 2$
 $CE \cdot EA' = 2x$
 $EA' = 4x^2$

$CE \cdot \frac{36 - ax}{128} = 4x^2$

$ax + 2y - 36 = 0$
 $x^2 + y^2 - 9 = 0$

$ax + y =$
 $\frac{28}{92}$

$(1 + \frac{a^2}{4})x + \frac{36 - ax}{2} - 9 + \frac{96^2}{4} = 0$

$b = \frac{36}{4} \frac{9a^2 b^2}{4} + (4 + a^2) (\frac{96^2}{4} - 9) =$
 $\frac{-144}{92} (8 - 23k^2) (k - \sqrt{\frac{8}{23}}) (k + \sqrt{\frac{8}{23}})$
 $\frac{6k+1}{\sqrt{32k + \frac{3}{\sqrt{32}}p}}$

$6k + p > 0$
 $k > p$
 $4k + p > 0$
 $p > -4k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓1.

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

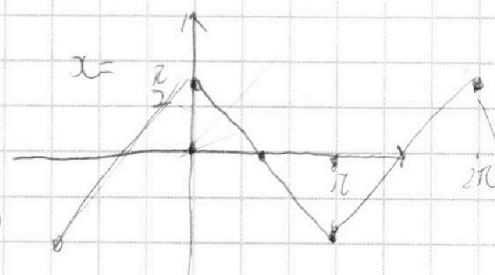
$$abc \Rightarrow \text{НОК}(ab, bc, ac) \quad (abc : ab, abc : bc, abc : ac)$$

$$\text{НОК}(ab, bc, ac) \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пусть } a = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^{13}$$

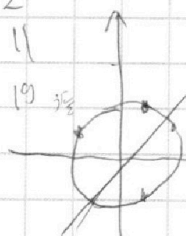
$$c = 2^{27} \cdot 3^5 \cdot 5^3$$



$$x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$\arcsin(\cos x)$$

$$y = x \quad x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$$

$$x \in [2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi]$$

$$x = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$$

$\log_3$

5 4 19

$$-90+13$$

7

2

12

1 9

13

$$+06410$$

3

26

27

13

17

$$\frac{\pi}{2} - x$$

2

$$2\pi k$$

