



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}, bc: 2^{12} 3^{20} 5^{18}, ac: 2^{14} 3^{17} 5^{39}$$

Пусть $a: 2^x$, тогда $b: 2^{8-x}$, $c: 2^{14-(8-x)} = 2^{6+x}$
 $c: 2^{14-x}$, тогда $14-x = 6+x \Rightarrow x=5$

Проверим сами $a: 2^5, b: 2^3$ то $ab: 2^8$,
 $c: 2^9$ тогда $bc: 2^{12}$, $ac: 2^{14}$ - верно!
 Пусть $a: 3^y$, тогда $b: 3^{14-y}$, $c: 3^{20-(14-y)} = 3^{6+y}$
 $c: 3^{14-y}$, тогда $14-y = 6+y \Rightarrow y=5$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то рассм. $\frac{a}{b}$ дел. $\frac{c}{b}$,
 значит $y \in \mathbb{N}$, получим: $y=5$

При $y=5: a: 3^5 \Rightarrow b: 3^9 \Rightarrow c: 3^{20-9} = 3^{11}$, а
 необходимо чтоб $bc: 3^{20}$ значит не
 подходит.

При $y=8: a: 3^8, b: 3^6, c: 3^{14} \Rightarrow ac: 3^{22}$ -
 подходит

Пусть $a: 5^z$, тогда $b: 5^{12-z} \Rightarrow c: 5^{18-(12-z)} = 5^{6+z}$

$c: 5^{12-z}$, тогда $12-z = 6+z \Rightarrow 3z=6 \Rightarrow z=2$
 проверим: $a: 5^2 \Rightarrow b: 5^{10} \Rightarrow ac: 5^{12}$,
 $ab: 5^{12}$ (удовлет.) $bc: 5^{22}$ (удовлет.)

Итак $abc = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^9 \cdot 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot 5^{6+2} =$
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18}$ - мин. возм. произв.

Ответ $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

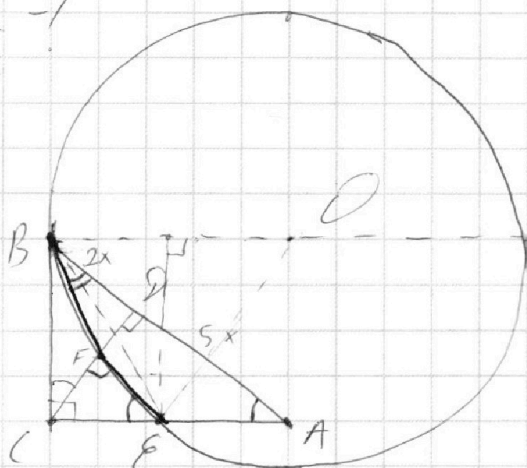
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} \rightarrow$$



1) Пусть $AD = 5x$, тогда
 $BD = 2x$

2) $ABFE \sim ABC$

2) т.к. $FE \parallel AB$ и $AB \perp DC$,
то $FE \perp DC \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

3) т.к. $AB \perp DC$ и $AB \perp DC$,
 $CB^2 = CE \cdot CA$

4) $CD = \sqrt{BD \cdot AD}$ т.к. $AB \perp DC$ (прям.
 $CD \perp AB$ - биссектриса $\angle ACB$
в равноб. $\triangle ABC$)

$$CD = \sqrt{2x \cdot 10x} = 2\sqrt{5}x$$

5) Пусть O - центр окр. тогда $OB \perp BC$ по св. биссектрисы $\angle ACB$ к хор. AB и к радиусу.

$$6) S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB; S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{CD \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{CFE \sim CDA \text{ по 2 уг. и т.к.}}{\angle DCA = \angle CFE, \angle CFE = \angle CPA = 90^\circ}$$

$$\text{по т.т.} \frac{CD}{CF} = \frac{CA}{CE} = \frac{DA}{FE}, \text{ тогда } \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{AB \cdot AD}{FE \cdot FE} = \frac{25x^2}{FE^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\cos x) = 2 - 2x$$

$$\cos(\sin x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ при } x \in [-1; 1]$$

$$\sqrt{1-x^2} = 2 - 2x, \text{ т.к. } x \in [-1; 1], \text{ то } 2 - 2x > 0$$

$$\text{т.к. } x \in [-1; 1], \text{ то } 2x \leq 2$$

следов. возв. в квадрат обе части уравн.

$$1 - x^2 = 4 - 8x + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 104x^2 - 48x + 22 - 100 = 0$$

$$D = 162^2 - 4 \cdot 104 \cdot 22 = 100(416 - 42^2)$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{416 - 42^2}}{208}$$

$$\frac{42 + \sqrt{416 - 42^2}}{208} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{416 - 42^2} < 208 - 42 \quad 2 > 3$$

$$\sqrt{416 - 36} < 196$$

$$380 \cdot 100 < 196 \cdot 196$$

следов. нест.

ошибкой ≥ 0

$$\frac{42 - \sqrt{416 - 42^2}}{208} > -1$$

$$\text{т.к. } \frac{42}{208} - \frac{\sqrt{416 - 42^2}}{208}$$

$$> 0, \text{ а } \frac{42}{208} + x < 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{42 \pm \sqrt{416 - 42^2}}{208}$$

$$\begin{array}{r} 5835 \\ 796 \\ + 796 \\ \hline 1592 \\ + 1592 \\ \hline 3184 \\ + 196 \\ \hline 3380 > 38000 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

критерии

$$\operatorname{tg} \angle B C = \frac{\alpha}{3} \quad \operatorname{tg}^2 \angle B C + 7 = \frac{7}{\cos^2 \angle B C} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \angle B C = \left(\frac{70}{7}\right)^2 - 7 = \frac{700 - 49}{49} = \frac{57}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle B C = \pm \frac{\sqrt{57}}{7} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{7} \sqrt{57}$$

Все доп. при $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57})$ - 4 реч. ~~то~~
при нек. зн. α

$\alpha \in [-\frac{3}{7} \sqrt{57}; \frac{3}{7} \sqrt{57}]$ - все 4 реч. ~~то~~ при
люб. зн. α

$\alpha \in (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$ - 4 реч. ~~то~~ при нек. зн. α

Ответ: $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 7)(x^2 + y^2 - 20x + 64) = 0 \end{cases}$$

$ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ — ур. прямой

ур-ли окружностей:
 $x^2 + y^2 = 7$ — ур. окр.
 $x^2 + (y - 10)^2 = 36$ — ур. окр.

(1) Проведем две окружности касаясь. и тогда окружностями. Если правильно сформулировать задачу, то не будет перес. (с одной из окружностей или касаясь). Условно упр. пока до момента пока прямая не пересечет в одну точку кас. то не будет упр. не прикоснется (но так как кас. кривизна). Найдём упр. кас. крив. (1). Тогда $b = 0$, O_1, O_2 — центры окр. с радиусами $OA + CO_2 = 6$. $BCA - T$ кас. окр. $O_1CO_2CO_2B$. T — пересеч. кас. с осью абсцисс (внизу они перес. в одной точке)

$\angle O_1BC \sim \angle O_2AC$ по 2 упр. $\angle O_1BC = \angle O_2AC = 90^\circ$
 так как кас. крив. BC кас. $\angle ACO_2 = \angle O_1CB$ по 2 упр. $\angle O_1BC = \angle O_2AC = 90^\circ$
 верт. углов $\frac{O_1B}{O_2A} = \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{7} \Rightarrow O_1C = 6 \cdot \frac{7}{7} = 6$
 $O_1C + O_2C = 70$ (по упр. упр. с ос. абсцисс) $\Rightarrow 3O_2C = 70 \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_2C = \frac{70}{3} \Rightarrow O_1C = \frac{60}{3} = 20$, $O_2C = \frac{70}{3}$ — коэф. т.с.
 по оси y . $\frac{10}{3} = \frac{4}{3}b \Rightarrow b = \frac{75}{4}$. Тогда $BC \perp O_2C$
 $\triangle O_1BC \sim \triangle O_2CB$ по 2 упр. $\angle O_1CB = \angle O_2CB = 90^\circ$
 $\angle BO_1C$ — острый. тогда $\frac{O_1B}{O_1C} = \frac{BC}{O_2C} = \frac{6 \cdot 7}{60 \cdot 70} = \frac{7}{70} = \cos 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 + \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3, \text{ т.к. } 2x^3 = (2x)^3 \\ 2x \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 625 = 5^4 \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = m \Rightarrow 5^m = 2x, x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 0, \text{ тогда } m^4 - \frac{3}{m} = \frac{4}{3} \frac{1}{m} - 3 \Rightarrow \cdot m \neq 0$$

$$\Rightarrow m^5 + 3m - \frac{4}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 + \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3, \text{ т.к. } \\ y \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 y = n \Rightarrow 5^n = y, y \neq 1 \Rightarrow n \neq 0$$

$$\text{тогда } n + \frac{4}{n} = -\frac{7}{3} \frac{1}{n} - 3 \Rightarrow \cdot n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^5 + 3n + \frac{7}{3} = 0 \quad (2) \text{ ком. (1) и (2):}$$

$$n^5 + m^5 + 3(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 -$$

$$- mn^3 + 3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m+n=0 \\ m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + 3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{нет} \\ \text{реш.} \end{array}$$

$$xy = \frac{5^m \cdot 5^n}{2} = \frac{5^{m+n}}{2} \quad \text{т.к. } m+n=0, \neq 0$$

$$xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_7 \leq 9 \text{ then } y_2 - y_7 \geq 0$$

9) $x_2 - x_1 \leq 78$ (лишнее) $y_2 - y_1 \leq 0$
т.е. планка на x равна 78

$$\text{с/с} = \frac{80}{16} = 5 - \text{услов. ноед. 2-го уровня}$$



7.8. Которые 5 отч. по оси oy
вылет. Целью каор. по оси x
при $y=0$: 7 ~~9~~ кар $(x_2 - x_1) = 9$

7.1. По формуле $191 = \left(\frac{80}{5} + 1\right) \cdot 9 =$

$= 77 \cdot 9 = 693$ кар у котор один знает.

по оц. и ввек. чл. зог. и $q_2 - q_1 \geq 0$,
поворотом

при $y_2 - y_1 = 7$ $5(x_2 - x_1) = 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$ корень
должно делится $(y_2 - y_1) : 5, 7$.

если $\begin{cases} y_2 - y_1 = 5, & x_2 - x_1 = 8 \\ y_2 - y_1 = 10, & x_2 - x_1 = 5 \end{cases}$ } 9 углов

$$y_2 - y_7 = 45 \quad v_2 - v_7 = 0$$

$\overline{I} + \overline{I} - \overline{I} + \overline{I} = \overline{I} + \overline{I}$ каар $(x_2 - x_1)$ а $\overline{I} + \overline{I}$ каар $(y_2 - y_1)$
 утото $\overline{I} + \overline{I}$ каар y уот y утото

II $18 - 7 + 7 = 12$ пер. $(x_2 - x_{-1})$ и 8 пер. $(y_2 - y_{-1})$
итого $12 \cdot 8$ пер. 99 лет. [80/175]

11. $78 - 6 + 1 = 73$ кар. $(x_2 - x_{+1})$ и 6 кар. $(y_2 - y_{+1})$
итого 73 + 6 кар. 48 лет. [30/20]

$24 - 5 + 1 = 20$ пар $(x_2 - x_7)$ и 4 пар $(y_2 - y_7)$
итого 24 4 пар g_2, y_2 [30125] $\{x_2, y_2\}$

$\downarrow$ $78 - 4 + 7 = 15$ neep. $(x_2 - x_1) 4$ 3rd neep $(y_2 - y_1)$
 $\downarrow$ $15 - 3 = 12$ neep $y_2 - y_1$

VII Alcalá esp. 76.2 ; VIII 77.2
VIII 78.2 ; ~~IX~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

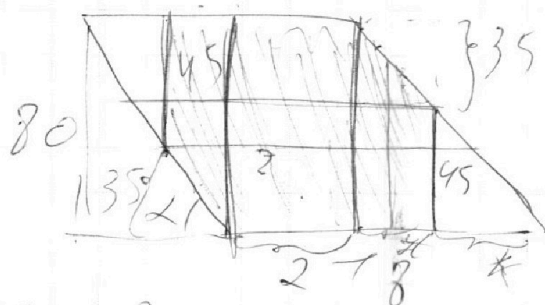
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



предметные

1X61.



$$L = 5$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

$$\frac{k}{k+t} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$k+t = \frac{80}{5} = 16$$

$$\frac{k+t}{k} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \text{ (из 19)}$$

тогда $k = 9 \Rightarrow t = 5$ тогда стр. 44. провер.

$$80 - 45 + 7 = 36 \text{ см. введ. } (y_2 - y_1) = 45$$

36.3; ~~так~~ расчет. трон. (из 19)

при введ. 45 + см при 46 - 2 см 80 36 см

$$\text{итого } \frac{7+36}{2} \cdot 36 = 37.78 \text{ см у одной}$$

тронесей ~~итого в 1X61~~ $37.78 \cdot 2 + 36 \cdot 3 =$
 $= 36 \cdot 40 \text{ метров.}$

W - все метров, тогда при $(y_2 - y_1) \geq 0$

$$\frac{W}{2} \text{ метров } \frac{W}{2} = \frac{120}{9} \text{ метров } + 750 \text{ (из 17)}$$

$$\frac{W}{2} = 2(120 + 76 \cdot 77 + 12 \cdot 8 + 73 \cdot 6 + 74 \cdot 4 + 75 \cdot 3 +$$

 $+ 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 2 \cdot 2763 =$
 $= 4326$

Ответ: 4326

$$\text{Ответ } W = 2(120 + 76 \cdot 77 + 12 \cdot 8 + 73 \cdot 6 + 74 \cdot 4 + 75 \cdot 3 +$$

 $+ 36 \cdot 40 + 702)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

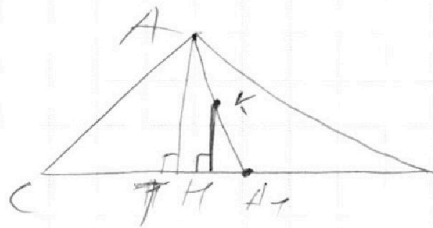
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы при вершине BC 12-угольника попарно
тогда $\frac{\alpha}{2} = \frac{V}{KH}$, где $V=5$ - радиус сферы



$$SL = SN = 4 \text{ км от ст. Кос.}$$

проб. ст. т. к. т. ст.

$$\text{Итак } AL = AS - SL = 16 - 4 =$$

$$= 12 = AK \Rightarrow KA_1 = AA_1 -$$

$$- AK = 24 - 12 = 12, \text{ т. к.}$$

сер. AA_1 .

Положим $AT \perp BC$, т. к. $AT \perp BC$, $KH \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \parallel HK$, т. к. K - сер. AA_1 и $AT \parallel HK$ - то

HK - ср. лин. $\Rightarrow AT + A_1T$ (показано) и $HK = \frac{AT}{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AT \cdot BC = \frac{1}{2} AT \cdot 16 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT = \frac{25}{2} \Rightarrow HK = \frac{AT}{2} = \frac{25}{4}$$

$$\text{Тогда } \frac{\alpha}{2} = \frac{V}{HK} = \frac{5 \cdot 4}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arccos \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 2 \arccos \frac{4}{5}$$

Ответ: $AA_1, BB_1, CC_1 = 3600$; $\alpha = 2 \arccos \frac{4}{5}$

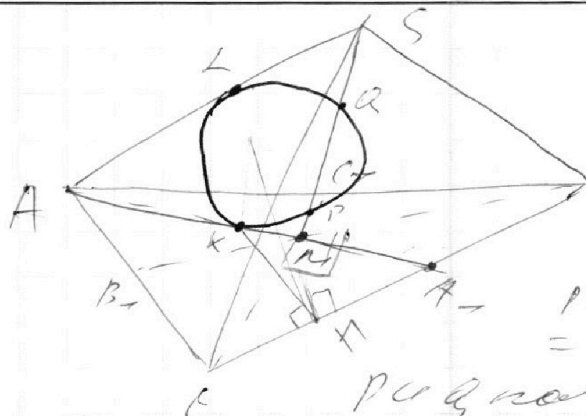
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Требуем, что сфера
касается ребер PAQ
биссектр. угла $AP =$
 $MQ = r$ (касается)
пусть $MP = x$, тогда
 $PQ = r - x \Rightarrow SQ = r - (r - x) =$
 $= x = MP$, следовательно

PAQ равнобедрен, то $PA = QA$.

тогда мы будем иметь равенств. $MP^2 = MP \cdot MQ = x(t - x)$
 $SL^2 = SQ \cdot SP = x(t - x) = MP^2 \Rightarrow MP = SL$ (тогда)

т.о. касат. и сев. кругов из т.к. тогда 1

$AL = AK$ по теор. о сев. касат. кругов из т.к. тогда

тогда $AM = AK + MK = AL + SL = AS = BC = 16$

по теореме $\frac{AN}{NA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AN}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$CA_1 = A_1B$ (т.к. AA_1 — осев.) и $CA_1 = A_1B = \frac{BC}{2} = \frac{16}{2} = 8 = MA_1$

тогда т.к. $MA_1 = BA_1 = CA_1$, то осевая $\triangle BMC$ —

равносторонняя, $\angle BMC = 90^\circ$

пусть, пусть $MC = 24$, $MB = 2x$, тогда по в. теореме $MC^2 = MB^2 + BC^2$

$1 = AA_1 \cdot BB_1$, $CG = (AM + MA_1) \cdot (BM + MB_1) \cdot (CM + MC_1) =$

$= 3x \cdot 34 \cdot 24 = 24 \cdot 9 \cdot xy \Rightarrow$

$S_{ABC} = 100$ по в. теореме $S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{100}{3} =$

$= \frac{1}{2} MB \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 24 = 2xy = \frac{100}{3} \Rightarrow xy = \frac{50}{3}$

$\Rightarrow 24 \cdot \frac{50}{3} = 4250 = 3600$

Требуем $KH \perp BC$, т.к. K — т.кас., то центр
сферы лежит на перп. к плоск. (ABC)
прямая через т.к. Центр сферы на осев.
двух углов при ребре BC (т.к. касат. (ABC) и (BCD))
Пусть O — центр сферы. Требуем см. OH — осев.
 $KH \perp BC$, KH — прямая кас. к (ABC) , $OK \perp (ABC) \Rightarrow$
 $\angle HOK = 90^\circ$ — перп. $OH \perp KH \Rightarrow$ тогда из пред.
рассуждений $\angle HKC = \frac{1}{2}$, где $\angle$ — двугр.

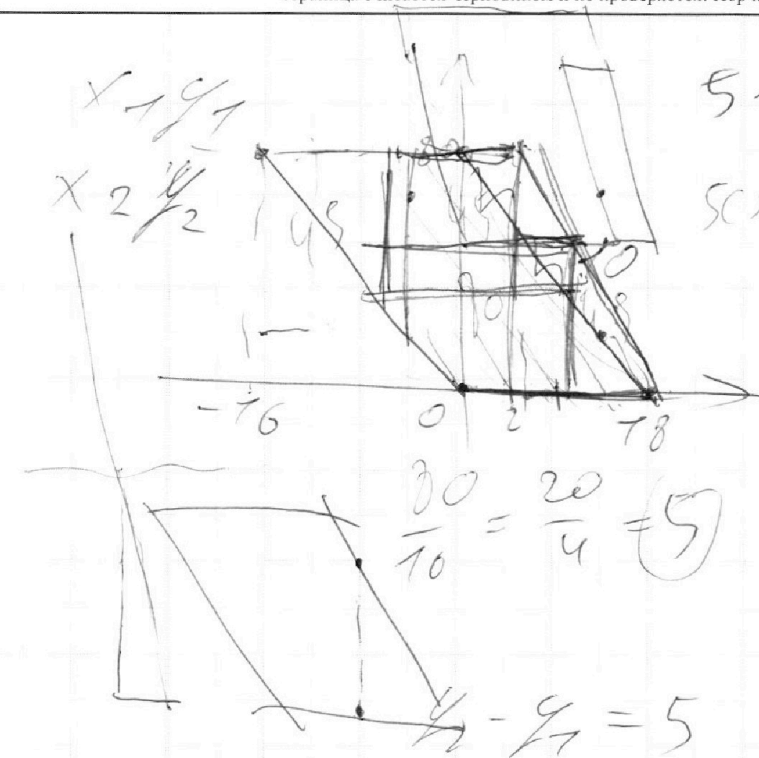
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$4.17$$

$$4.43$$

$$3.42$$

$$2.2$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2$$

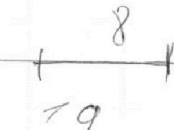
000000

④

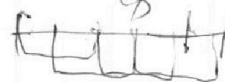
$$5-3=2$$

$$78-9$$

$$15$$



000000



000000

30	380
30	380
30	380

$$80/15 = 6$$

$$80/25$$

$$\frac{441}{5} = 88.2$$

$$202 = 2.25$$

$$\frac{8}{3}$$

$$9.1 + 0.01$$

222
1440
222

222

$$9.1 + 0.01$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 325 \\
 943 \\
 333 \\
 \hline
 964 \\
 122
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4326 \\
 2 \\
 3922 \\
 \hline
 875 \\
 0441 \\
 182 \\
 201 \\
 451 \\
 54 \\
 431
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 943 \\
 951 \\
 051 \\
 \hline
 434 \\
 95 \\
 83
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{то } \sin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos x = 2 \in [-1, 1]$$

$$\cos 2 = x \in [-1, 1]$$

$$\sin x = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\sin 2) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{то } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$100(1-x^2) = 7^2 - 49x + 4x^2$$

$$104x^2 - 49x + 5^2 - 100 = 0$$

$$\Delta = 49^2 - 4(5^2 - 100) \cdot 104 =$$

$$= 49^2 - 4(25 - 100) \cdot 104 = 49^2 - 4(-75) \cdot 104 = 49^2 + 300 \cdot 104 = 2401 + 31200 = 33601$$

$$x = \frac{49 \pm \sqrt{33601}}{208}$$

$$\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\sin 2 = 6 \quad \sin 2 = \cos x$$

$$\cos(\sin 2) = 2$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 2} = \sin 2$$

$$\sin^2 2 + 2^2 = 1$$

$$1 - 8 \sin^2 2 = 4 \sin^2 2 = 1$$

$$\sin^2 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2 = \pm \frac{1}{2}$$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

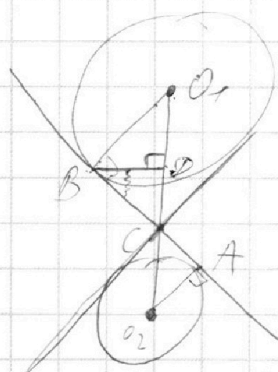
$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

$$O_1 B D \sim O_1 C B$$

$$\frac{6}{60} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1 D}{O_1 B}$$



$$O_1 B C \sim O_2 A C$$

$$\frac{6}{7} = \frac{O_1 C}{O_2 B}$$

$$O_1 C = O_2 B \cdot 6$$

$$O_1 C + O_2 C = 10$$

$$O_2 C + 6 O_2 C = 10$$

$$O_2 C = \frac{10}{7}$$

$$O_1 C = \frac{60}{7}$$

$$6 = \frac{75}{14}$$

$$\frac{46}{3} = \frac{10}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc : 2^8 3^{14} 5^{12}, bc : 2^{12} 3^{26} 5^{13}, ac : 2^{16} 3^{27} 5^{39}$$

$$abc - 71111$$

$$a : 5^{10} \quad b : 5^{10} \quad c : 5^{10}$$

$$a : 3^{15-x} \quad b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$$

$$c : 3^{27-x} \quad b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$$

$$a : 3^{15-x} \quad 15-x = x$$

$$x = \frac{15}{2} \quad \sqrt{x} = \frac{3}{2} \quad x = 8$$

$$b : 3^7$$

$$c : 3^{13}$$

$$b : 3^6$$

$$c : 3^{14}$$

$$a : 5^x$$

$$c : 5^{13-x}$$

$$a : 3^8 \quad b : 3^6 \quad c : 3^{14}$$

$$b : 5^{12-x} \quad c : 5^{13-34+x}$$

$$12-x = x-22$$

$$34 = 2x \quad x = 17$$

$$a : 5^{15} \quad c : 5^{22}$$

$$a : 2^x$$

$$b : 2^{8-x}$$

$$c : 2^{12-8+x}$$

$$c : 2^{14-x}$$

$$4+x = 14-x$$

$$2x = 10 \quad x = 5$$

$$a : 2^5, b : 2^3, c : 2^9$$

$$\text{Таким образом } abc = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3$$

$$x = 3 \quad \frac{AC}{BC} = \frac{64}{32} = 2$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{5}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{64}{32} = 2$$

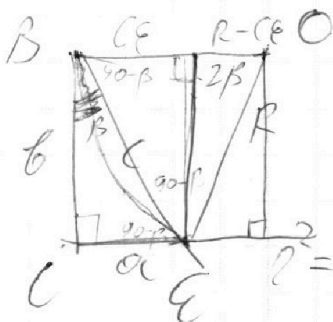
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sin 2\beta = \frac{b}{R} = 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$2aR = c^2$$

$$R = \frac{c^2}{2a}$$

$$R^2 = b^2 + R^2 - 2Rc + a^2$$

$$25x^2 + 100x^2$$

$$25 + 10$$

$$\sqrt{35}x$$

$$R = \frac{49x^2}{2\sqrt{725x^2}} = \frac{49x}{10\sqrt{5}} \cdot 25.5$$

$$R = \frac{49}{50} \sqrt{5}x \quad AC = 5\sqrt{5}x$$

$$24x^2 + \frac{4}{9}FE^2 = 2 \cdot \frac{5}{3}FE \cdot R$$

$$FE = 25\sqrt{5}R = 3R$$

$$\frac{FE}{R} = \frac{3R}{R} = 3$$

$$\frac{3R}{R} = 3$$

$$FE = 3R$$

$$FE = 2R \cdot \frac{1}{2} = R$$

$$R = \frac{4x^2 + 20x^2}{2} = 12x^2$$

$$R = 12x^2$$

$$R = 12x^2$$

$$R = 12x^2$$

$$R = 12x^2$$

$$FE = 3R$$

$$FE = 3R$$

$$FE = 3R$$

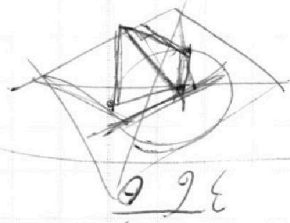
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

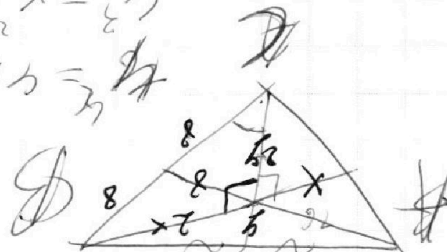
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

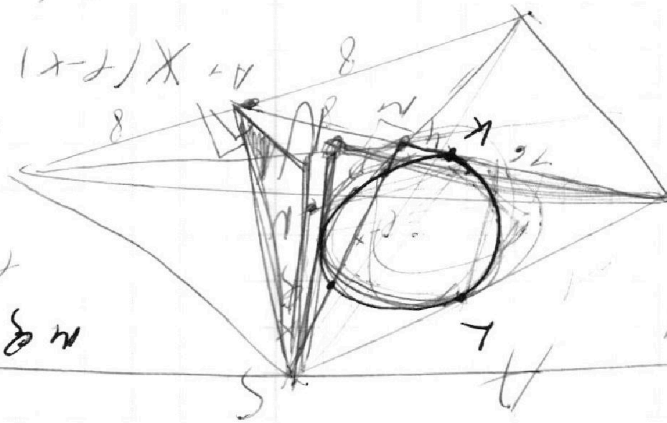


$$\begin{aligned} 4^2 + 3^2 &= x^2 \\ 4^2 + 4^2 &= x^2 \end{aligned}$$



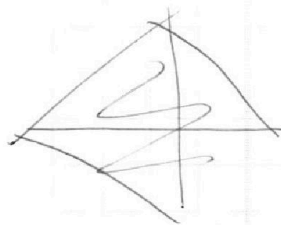
$$\begin{aligned} AS &= AL + LS = AL + AL = AL \\ AL &= AL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AS &= AL + LS = AL + AL = AL \\ AS &= AL + LS = AL + AL = AL \end{aligned}$$



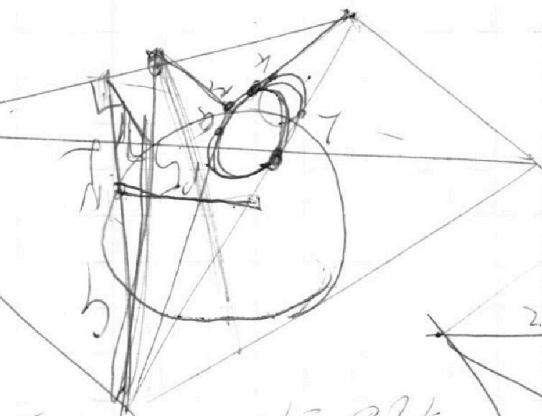
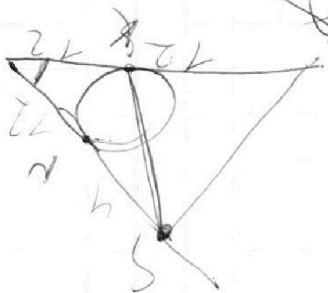
$$AL = 24$$

$$AS = 5P = 7$$



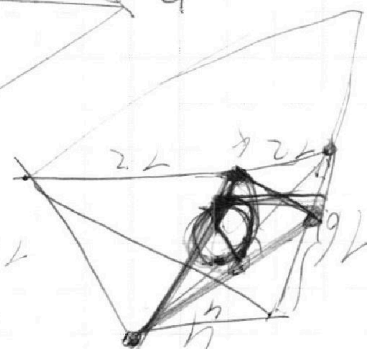
$$SL = 4$$

$$\frac{SL}{SL} = \frac{SL}{SL}$$



$$180 - 213$$

$$180 - 213$$



$$CE = \frac{3}{5} FE$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BC}{CE}$$

$$CFE \sim BFC$$