



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(N) Дано: a, b, c - натуральные числа: $ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$; $bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$;
 $ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$.

Согласно определению делимости запишем ($a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{N}$), где x, y, z - это

$$\left. \begin{array}{l} ab = x \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = y \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ca = z \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{array} \right\} \Rightarrow abc = \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[3]{xyz} \cdot 2^{\frac{8+12+14}{3}} \cdot 3^{\frac{14+20+21}{3}} \cdot 5^{\frac{12+17+39}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} = \sqrt[3]{xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34}$$

$3xyz$ - полный квадрат, Примем $3xyz : 3 \Rightarrow 3xyz : 9$ (это полн. кв., т.к. числа a, b, c - натуральные). Итак $\min(3xyz) = 9$, т.е. $\sqrt[3]{xyz} \in \mathbb{Z}$

Оценка abc : $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Пример:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{17} : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22} : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow a, b, c \text{ удовл. упр.}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ. $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a-?

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

уравнение равно 1 переменной.

$$(98 - 101 + 102 - 2h + 2x)(1 - 2h + 2x)$$

$$\sin^2 x +$$

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

$$0 = 8h + 4g - x0$$

$$= h3 - x0$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 12 \\ \hline 30 \\ + 30 \\ \hline 60 \\ + 15 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$22 \quad 11-39$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ 12 \\ \hline 180 \\ + 180 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$21:12$$

$$(z+y+x) \text{ um}$$

$$28 \leq x+z$$

$$11 \leq z+h$$

$$z+h \geq 12$$

$$88-20=68$$

$$18=15-88$$

$$\frac{2}{56} = \frac{2}{95} = \frac{2}{15+20+11}$$

$$\begin{aligned} 21 &= x+z \\ 20 &= y+z \\ 15 &= x+y \end{aligned}$$

$$20$$

$$14$$

$$\begin{aligned} x+z &= 12 \\ y+z &= 14 \\ x+y &= 12 \end{aligned}$$

$$65+11 \leq z+h+x$$

$$2+x \geq 39$$

$$y+z \geq 17$$

$$x+y \geq 12$$

$$2+x=39$$

$$6+y+z-x=5$$

$$467$$

$$17+5=22$$

$$25 \quad 38 \quad 5 \quad 17$$

$$2+x=39$$

$$17+5+12=34$$

$$\frac{2}{12+39-17} \quad \frac{5}{15+21-20} \quad \frac{3}{148-12} \quad \frac{2}{148-12} \quad \frac{2}{148-12}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} = ab$$

$$2^8 \cdot 3^{14}$$

$$30+29=58 \quad 2-x=5$$

$$y+z=17$$

$$x+y=12$$

$$2+x=39$$

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поля QR-кода недоступны!

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.



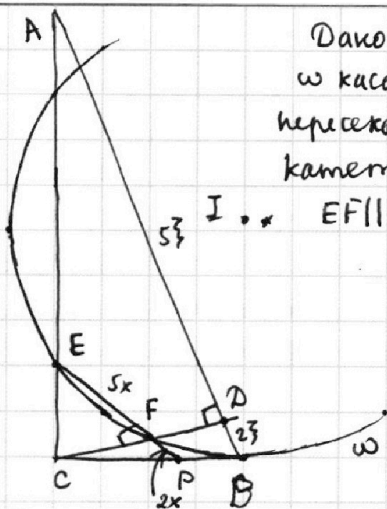
МФТИ

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



Дано: $\triangle ABC$ - н/у, AB - гипотенуза;
ω касается стороны BC в точке B ;
пересекает высоту CD в т. Q и пересекает
катет AC в точке E .
н/у $EF \parallel AB$; $AD:DB = 5:2$; Найми: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$.

Решение. ω пересекает катет $\Rightarrow$ центр
I окр-ти ω и точка A лежат по
одну ст. отн. CB .
по свойству ||-ых прямых катетов.

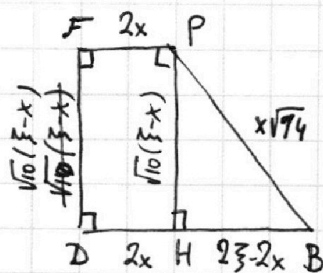
$$1) EF \parallel AB, CD \perp AB \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$$

2) Пусть $EF \cap CB = P$, по теореме о квадрате касательной для касат PB ,
провед. из т. P к окр-ти ω имеем: $PB = \sqrt{PF \cdot PE}$.

3) Пусть $AD = 5\sqrt{3}$; Тогда по условию задачи $DB = 2\sqrt{3}$. CD - высота н/у $\triangle$ -ка,
которая провед. к гипот. н/у $\triangle CBA \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{3}$

4) В $\triangle CFE$ и $\triangle CDA$: $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$; $\angle ACD$ - общ. $\Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{CF}{CA}$
В $\triangle CFP$ и $\triangle CBP$: $\angle CFP = \angle CBP = 90^\circ$; $\angle PCB$ - общ. $\Rightarrow \triangle CFP \sim \triangle CBP \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CP}{CB}$
Тогда $\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{DB} \Rightarrow$ если $EF = 5x$, то $CF = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \cdot 5x = 2x \Rightarrow PB = \sqrt{PF \cdot PE} = \sqrt{2x \cdot 7x} = \sqrt{14}x$

5) Заметим, что CF - выс. н/у $\triangle CFP$, провед. к гип. $\Rightarrow CF = \sqrt{EF \cdot FP} = x\sqrt{10}$
Заметим, что $\triangle PFB$ - н/у трapeз. ($FP \parallel DB$), провед. в ней выс. PH к
больш. отн. ($\sqrt{3} > x$ т.к. $PE < AB$) (DB). $FD = CD - CF = \sqrt{10}(\sqrt{3} - x)$



Тогда $\triangle PFB$ - прямоугольный по гипот.,

$$HB = DB - DH = DB - FP = 2\sqrt{3} - 2x$$

$$PH = FD = \sqrt{10}(\sqrt{3} - x), \triangle PHB - \text{н/у} (\angle PHB = 90^\circ, \text{т.к. } PH - \text{выс.})$$

$$\Rightarrow \text{теор. Пифагора: } PB^2 = PH^2 + HB^2$$

$$14x^2 = 10(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}x + x^2) + 4(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}x + x^2)$$

$$14x^2 = 14(\sqrt{3} - x)^2; x^2 = (\sqrt{3} - x)^2 \quad (x - \sqrt{3} + x)(x + \sqrt{3} - x) = 0$$

$$\sqrt{3}(2x - \sqrt{3}) = 0 \quad | : \sqrt{3} \neq 0, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$$

$$S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} x\sqrt{10} \cdot 5x$$

$$(\angle CFE = 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{7}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{x} \right)^2 = \frac{28}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



13) Решить уравнение: $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$$D(y) = [-1; 1]$$

1) Ф-я $y = 10 \arcsin t$ является ограниченной ($E(y) = [-10 \cdot \frac{\pi}{2}; 10 \cdot \frac{\pi}{2}]$) $\Rightarrow$ есть ограничения на x : $-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$; $-5\pi \leq 2x - \pi \leq 5\pi$; $-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$; $-2\pi \leq x \leq 3\pi$.

2) Преобразуем иск. уравнение: $10 \arcsin(\cos x) + 2x = \pi$ и рассмотрим ф-ию $f(x) = 10 \arcsin(\cos x) + 2x$; $D(f) = \mathbb{R}$ на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$ (Если $x \notin [-2\pi; 3\pi]$, уравнение точно не имеет реш. в силу пункта 1)

$$f'(x) = 2 + 10 \frac{-\sin x}{|\sin x|}, \text{ т.к. } \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{|\sin x|} = \frac{1}{\sin x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2-10, & \text{если } \sin x > 0 \\ 2+10, & \text{если } \sin x < 0 \end{cases}$$

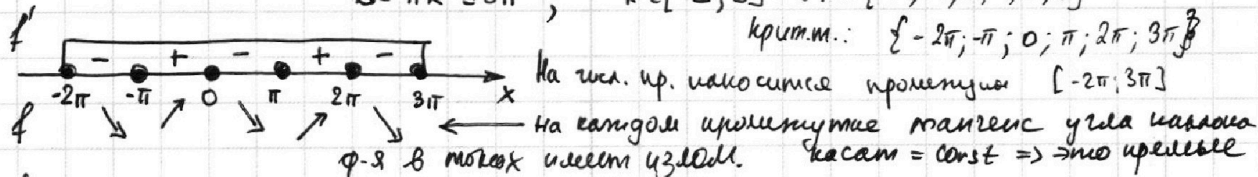
$$f'(x) \neq 0; f'(x) \text{ не оп. пр.: } \sin x = 0; x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$$

Крит. точки на отрезке $[-2\pi; 3\pi]$:

$$-2\pi \leq \pi k \leq 3\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow \text{крит.т.: } \{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$$



$$f(2\pi) = 10(\arcsin(\cos(2\pi))) + (-4\pi) = 10 \cdot (\pi/2) - 4\pi = \pi$$

$$f(-\pi) = 10(\arcsin(\cos(-\pi))) - 2\pi = -5\pi - 2\pi = -7\pi$$

$$f(0) = 10 \arcsin(\cos 0) - 0 = 5\pi; f(2\pi) = 10 \arcsin(\cos 2\pi) + 4\pi = 9\pi$$

$$f(\pi) = 10 \arcsin(\cos \pi) + 2\pi = -3\pi; f(3\pi) = 10 \arcsin(\cos 3\pi) + 6\pi = \pi$$

На каждом из промежутков π -ом $\arcsin$ является $\arcsin$ $\Rightarrow$ это $\arcsin$

Графы ф-ий $y = f(x)$ и $y = \pi$ имеют 5 точек пересечения (из монотонности), и решений будет равно 5

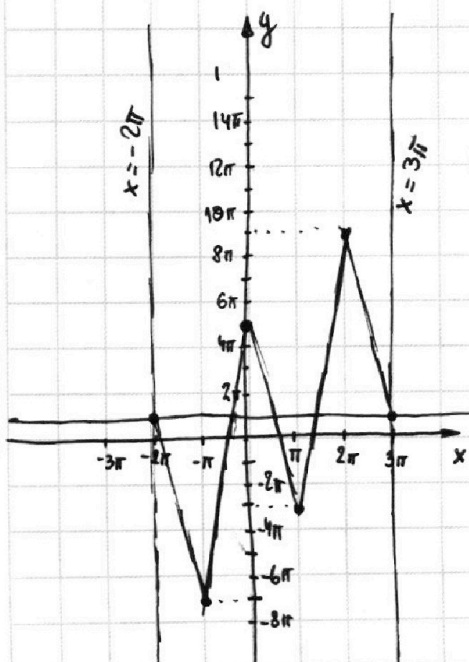
$$f(3\pi) = f(-2\pi) = \pi \rightarrow \text{это реш.}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 10 \arcsin(\cos \frac{\pi}{2}) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$f(\frac{4\pi}{3}) = 10 \arcsin(\cos \frac{4\pi}{3}) + \frac{8\pi}{3} = 10 \arcsin(-\frac{1}{2}) + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = \pi$$

$$f(-\frac{\pi}{3}) = 10 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{3})) - \frac{2\pi}{3} = 10 \arcsin(\frac{1}{2}) - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \pi$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = \pi. \text{ Ответ: } \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}.$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

а-?, найдется значение параметра b , при котором система

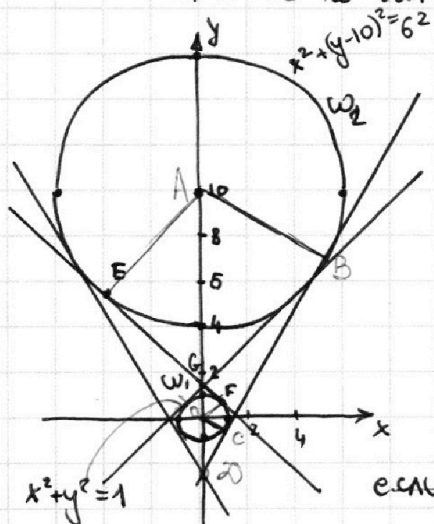
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно 4 решения.

Первое уравнение системы: $y = \frac{ax + 4b}{3}$ - линейная ф-я, пр-к - прямая.

Эта ф-я задает ли-во прямых с угловым коэф a (кроме вертикаль-ной прямой), проходящих через точку $(0; \frac{4b}{3})$ (если $x=0$, то $y = \frac{4b}{3}$)

2-ое уравнение: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$ 2 окр-ли; $\omega_1(O(0;0); R_1=1)$
 равносильно $\omega_2(A(0;10); R_2=6)$
 совокупн.

ω_1 и ω_2 не им. общ. точек, потому что $AO = 10 > R_1 + R_2$



Проведем 2 общие касательные ω_1 и ω_2 , они пересекаются в точке на линии центров окружностей (точка D) и общие внутренние касательные этих двух окр.

FE - одна из внутр. касат., $EF \cap AO = G$

$d_y; d_y$ - ординаты точек G и D соотв.

если $\frac{4b}{3} \leq d_y$, то это зн. подходит усл.

Прямая с окр. пересекается не более чем в двух точках $\Rightarrow$ каждая для того чтобы было равно 4 реш.

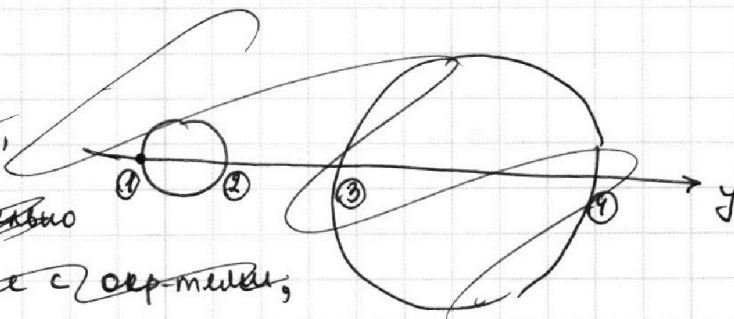
нужно, чтобы прямая, заданная $y = \frac{ax + 4b}{3}$ пересекала каждую окр. дважды.

если $d \leq \frac{4b}{3}$

возьмем $a=10^{15}$, и заметим, что

$y = \frac{10^{15}x + 4b}{3}$ обязательно

будет иметь 4 т. перес с окр-лими, потому что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

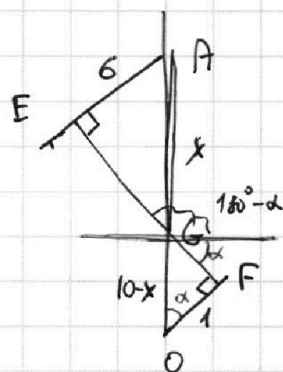
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если прямая $y = \frac{ax+4b}{3}$ при некоторых a, b пересекает оар. ω_1 ,
то (6 2 м.), то она обязательно пересечет и оар. ω_2 в
двух точках (N5) правильно.

Пусть $-k_1$ - угл. коэф. наклона прямой EF. Усл. задачи выполн,
если $a \in [-k_1; k_1]$



$AE \perp EF$ и $FO \perp EF$ как радиусы, перпенд. в т.кас.

$\triangle AEG \sim \triangle OFG$ т.к. $\angle E = \angle F = 90^\circ$, $\angle AGE = \angle OFG$ (как верт.)

$$\text{Тогда: } \frac{x}{6} = \frac{10-x}{1}; \quad x = 60 - 6x; \quad x = \frac{60}{7}$$

$$10 - x = \frac{10}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{GF}{OF} \quad \sin \alpha = \frac{GF}{\sqrt{60^2 - OF^2}} = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\tan \alpha = \frac{GF}{OF} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow k_1 = -\tan \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{7}$$

Ответ: $[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}]$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \end{cases}$

ОДЗ:

$\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x^3 > 0 - \text{следует из усл. } 2x > 0 \\ 8x^3 \neq 1 - \text{следует из усл. } 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^3 > 0 - \text{следует из усл. } y > 0 \\ y^3 \neq 1 - \text{следует из усл. } y \neq 1 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$

Пусть $a = \log_5(2x) \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_{2x}(5)$; $\log_{8x^3}(625) = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 = \frac{4}{3a}$

$b = \log_5(y)$; $\log_y 5 = \frac{1}{b}$; $\log_{y^3} 0,2 = -\frac{1}{3}\log_y 5 = -\frac{1}{3b}$; $a, b > 0$ $xy = 5^a \cdot 5^b = 5^{a+b}$

Система примет вид:

$\begin{cases} a^4 - 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3a} - 3 & (1) \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 & (2) \end{cases}$

Рассмотрим для начала уравнение (2).

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad | \cdot 3b > 0$

$b^5 + 12 = -1 - 9b$

$b^5 + 9b + 13 = 0$ т.е. уравнение $b^5 + 9b + 13 = 0$ не имеет решений

Ну и получается, что не существует такого b , чтобы равенство а) выполнялось. $\Rightarrow$ у системы (*) решений нет вообще.

Ответ: таких пар x, y , удовлетворяющих одновременно обоим равенствам не существует.

$\begin{cases} b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \\ a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \quad | 3b \neq 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad | 3a \end{cases}$

$\Rightarrow b^4 + a^4 + \frac{13}{3}(a+b) = 0$; $(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) + \frac{13}{3}(a+b) \cdot \frac{1}{ab} = 0$;

$(a+b)((b-a)(a^2+b^2) + \frac{13}{3ab}) = 0$;

$\begin{cases} a+b = 0 \\ (b-a)(a^2+b^2) = -\frac{13}{3ab} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5. Продолжение (условия на a, b : $ab \neq 0$)

$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) a^4 + b^4 + 6 - \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{b-a}{ab} > 0 \mid \cdot (a^2 b^2) > 0 \text{ м.к. } ab \neq 0 \Rightarrow \boxed{ba(b-a) > 0} \end{cases}$$

$$2) a^4 - b^4 - \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0; (a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0;$$

$$\frac{(a+b)}{ab} \left(\frac{13}{3} + (b-a)ab(a^2+b^2) \right) = 0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \text{ единств. случай.}$$

> 0 м.к. $\frac{13}{3} > 0, a^2+b^2 > 0$ м.к. $ab \neq 0, (ab \neq 0)$
 $(b-a)(ab) > 0$

Найдем ли такие
 a, b , что $a+b=0$?

Р-и ур-ние $\textcircled{*}$ при $b \leq 0$; заменим обе части ур. на $b \geq 0$

$$b^5 + \frac{13}{3}b \cdot \frac{1}{b} + 3b = 0; 3b^5 + 13 + 9b^2 = 0$$

$$f_1(b) = 3b^5; f_2(b) = 9b \text{ на } (-\infty; 0); 13 = \text{const} \rightarrow f(b) = 3b^5 + 9b + 13 \text{ на } (-\infty; 0).$$

$$\text{Пример } f(-2) = -3 \cdot 32 + 13 - 9 \cdot 2 < 0; f(4) = 13 - 9 - 3 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ корень b_0 есть у ур-ния на $(-2; -1)$ т.к. $f(x)$ возр. и непрерывна на этом от.

Т.е. нашлось b_0 : $b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$. Возьмем $a_0 = -b_0$ и заметим, что ур-ние $a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$ становится тождеством при b_0 : $b_0^4 + \frac{13}{3b_0} + 3 = 0$

Т.е. $a+b=0$ возможно! Других вариантов, к сожалению, нет.

$$xy = 5^{a+b} = 5^0 = 1.$$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

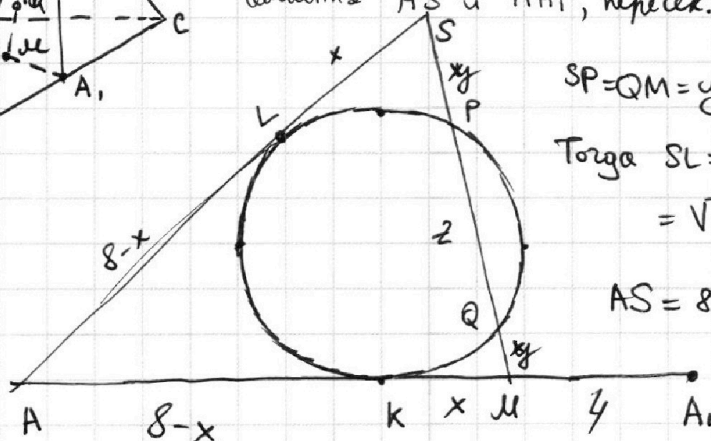
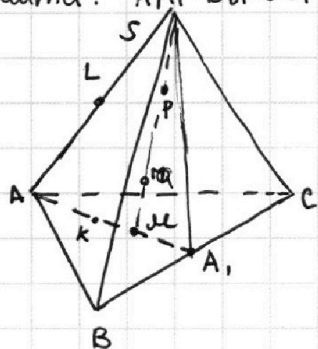
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 Дано: $SABC$ - треугольная пирамида; AA_1, BB_1, CC_1 - медианы $\triangle ABC$;
 M - т. пересечения медиан $\triangle ABC$; Ω кас. $[AS]$ в т. L ; Ω кас. $(ABC) = k$;
 $k \in AM$; $\Omega \cap [SM] = P, Q$; $SP = MQ$; $S_{ABC} = 100$; $SA = BC = 16$

а) Найти: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

Пусть: $[SM]$ содержит P для определения

P -м сечение Ω т.т. AKS . Это окр., которая
касается AS и AA_1 , пересек. SM в P и Q



$$SP = QM = y; PQ = z$$

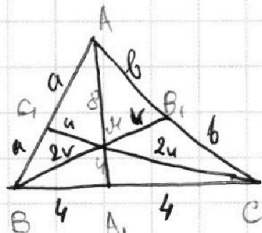
$$\text{Тогда } SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{y(y+z)} = \sqrt{MQ \cdot MP} = KM,$$

$$AS = 8 \Rightarrow AL = 8 - x = AK \quad (\text{отр. кас.})$$

$$\text{Тогда } AM = 8 - x + x = 8;$$

$$MA_1 = \frac{8}{2} = 4$$

(медианы $\triangle$ дел. т. перес.
пополам - вот и 2:1,
считая от верш.)

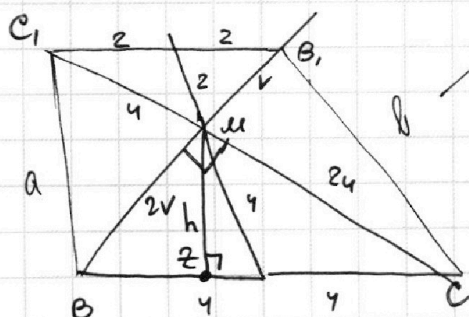


$$CM = u \Rightarrow MC = 2u;$$

$$BM = 2v \Rightarrow MB_1 = v$$

$$\text{в } \triangle BMC: MA_1 = BA_1 = AC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ,$$

$$\text{Тогда по теор. Пифагора: } MB^2 + MC^2 = 4v^2 + 4u^2 = 8^2; u^2 + v^2 = 16$$



$$a = \sqrt{u^2 + 4v^2}; b = \sqrt{v^2 + 4u^2}$$

$$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad (\text{медианы делит } \triangle \text{ на } 6 \text{ равновеликих})$$

$$\frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{100}{3}; \frac{200}{3} = 4uv \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + v^2 = 16 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение.

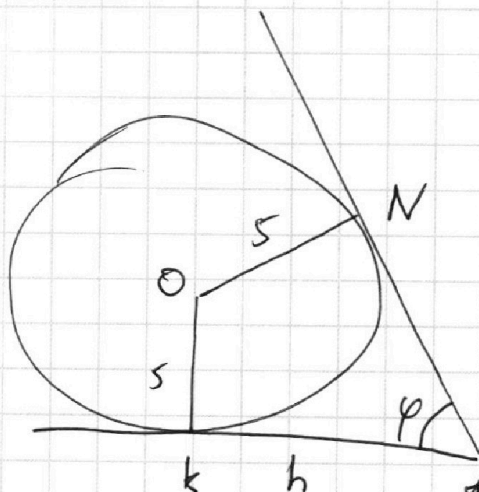
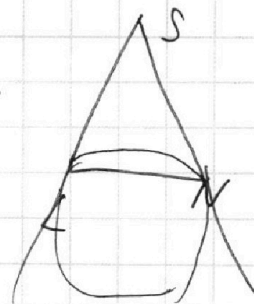
$$\begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + 2uv + v^2 - \frac{100}{3} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ (u+v)^2 = \frac{148}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} u+v \\ u>0, v>0 \end{matrix}$$

$$S_{uv} = 150$$

Произв. грани пирамиды: $S_{uv} \cdot 12 = 150 \cdot 12 = 1800$.

б) Опр. радиуса. грани $\Rightarrow SN = SL = 4 \Rightarrow x = 4$.

Р-м сечение шар сферой пл-стью $KMNKNZ$



, $(ZKN) \perp$ ребру BC по
посл. пр.

Тогда O лежит в этой пл.

$$KZ = h =$$

$$= \frac{2u \cdot 2v}{BC} = \frac{200}{3} =$$

$$= \frac{50}{3 \cdot 2} = \frac{25}{3} \text{ (выс. н/у } \triangle BCM)$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{OK}{KZ} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$$

cos Тогда $\varphi = 2 \arctg \frac{3}{5}$ — это и есть линейный угол
двугр угла

Ответ: а) 1800

б) $2 \arctg \frac{3}{5}$



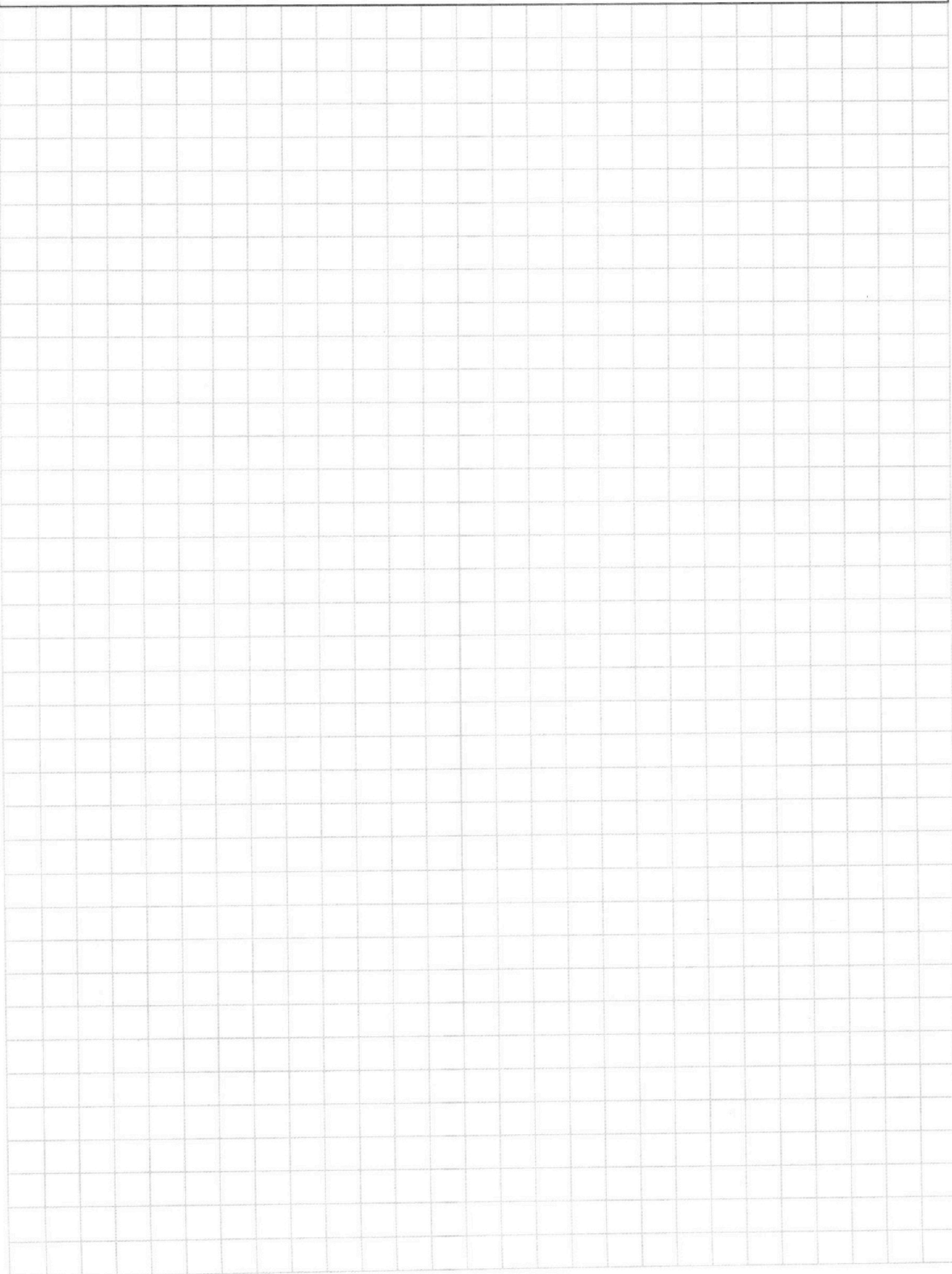
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14+20+21
= 55

45
2

24+21
= 45

17+12+5
= 34

4+6+8=18
4+10+10,5=24,5

12+17+39
29+39=68

34

$d(x) = ?$

68/2

17+

$f = d\sqrt{4}$

$2d \cdot 3d = \sqrt{10x - 410d}$

$7d \sin \alpha + d\sqrt{4} = 7x \sin \alpha$

$d(7 \sin \alpha + \sqrt{4}) = 7x \sin \alpha$

$$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = n \cdot 2^{12} \cdot 3^{30} \cdot 5^{17}$$

$$ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$abc = \sqrt{knm} \cdot 2$$

$$\sqrt{knm} \cdot 2^{4+6+7} \cdot 3^{7+15+21} \cdot 5^{\frac{21}{2}}$$

$$ab = 2^8$$

$$bc = 2^{12}$$

$$ac = 2^{14}$$

$$a^2 \cdot 2^{12} = 2^8 \cdot 2^{14}$$

$$a^2 = 2^{(4+7-12)2}$$

$$a = 2^5$$

$$(2x-2d)^2 + (\sqrt{10x-410d})^2 = (d\sqrt{4})^2$$

$$4x^2 + 4d^2 - 4dx + 10x^2 + 10d^2 - 20xd = 4d^2$$

$$14x^2 - 24dx - 7d^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \quad \text{вернее}$$

$$\arcsin t: t \in [-1; 1]; \arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-5\pi \leq 10 \arcsin(\cos x) \leq 5\pi; \quad -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; \quad -3\pi \leq -2x \leq 7\pi; \quad x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\cos x \quad 10 \quad 1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x$$

$$f(x) = \arccos x; \quad g(x) = \arcsin x; \quad f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{если } x \in [0; 1].$$

$$\text{если } x \in (0; 1), \text{ то } \arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \arcsin x = (\pi/2 - \arccos x)$$

$$\arcsin x$$

$$\arccos$$

$$\text{если } \cos x \in [0; 1], \text{ то используем следующие равенства: } \cos(\arccos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \pi - 2x; \quad \arccos(\cos x) + \frac{\pi}{2} = 2x$$

$$\arccos x + \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{если } x \in (0; \frac{\pi}{2}):$$

$$\arccos x \in -\frac{\pi}{2};$$

$$5\pi + \arccos$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; \quad -6\pi \leq -2x \leq 4\pi; \quad -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\text{если}$$

$$2x + 10 \arcsin(\cos x) = \pi$$

$$f(x)$$

$$\arcsin$$

$$\arcsin x \quad \text{возрастает}$$

$$\cos x. \text{ на интервале}$$

$$2x + 10 \arcsin(\cos x) = \pi$$

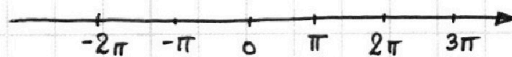
$$f(x) = 2 + 10 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \sin x =$$

$$= 2 + 10 \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$f(x) = 2x + 10 \arcsin(\cos x)$$

Излом произв.

$$\text{крив. точки } \sin x = 0: \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Значения в крив. т:

1

$$12 \cdot \pi - 15\pi =$$

$$y = 12\pi$$

$$y = 12x - 15\pi \quad 24 - 15 = 29 - 20 = 9$$

$$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = 12x - 15\pi$$

$$y = kx + b$$

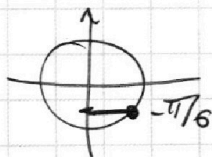
$$\begin{cases} -3\pi = k\pi + b \\ 9\pi = 2k\pi + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\pi - 9\pi = -k\pi \\ b = -3\pi - k\pi \end{cases}$$

$$k = 12$$

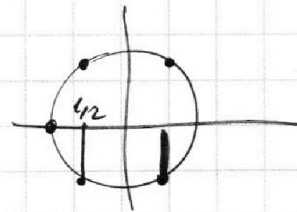
$$b = 9\pi - 12\pi = -3\pi$$

$$\pi = 12x - 15\pi; \quad 16\pi = 12x; \quad x = \frac{4\pi}{3}$$



$$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

Решение которой представлено на странице:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недоступна!

МФТИ

$$\log_5(2x) - 3 \log_5 x = \log_5 8 \cdot 3 = 625 - 3$$

$$(\log_5(y) + 4 \log_5 5 = \log_5 0.2 - 3$$

$$\log_5(2x) - \frac{3}{4} \log_5(2x) = \frac{3}{4} \log_5(2x) - 3$$

$$\log_5(y) + \frac{\log_5(y)}{4} = -\frac{3}{4} \log_5 y - 3$$

$$\left\{ \begin{aligned} a^{\frac{1}{4}} - \frac{a}{3} &= \frac{3}{4}a - 3 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= -\frac{3}{4} - 3 \end{aligned} \right.$$

$$36^5 + 128 = -36^5 + 128 + 6^2 + 96 = 0$$

$$36^5 + 6^2 + 96 + 12 = 0$$

$$-3 + 1 - 9 + 12 //$$

$$(8^4 - a^4) + \frac{8}{4} + 1$$

$$\frac{3}{3} \quad \frac{4}{4} + \frac{8}{8}$$

$$a^4 + 6^4 + 6 + \left(\frac{36}{13} - \frac{36}{13} \right) = 0$$

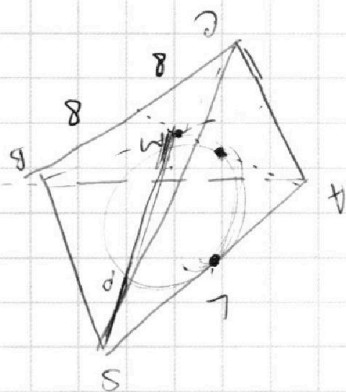
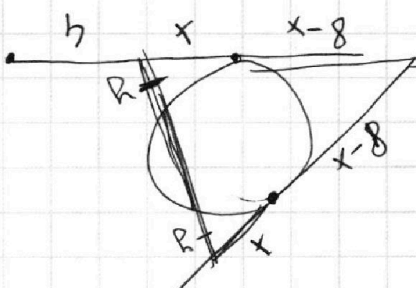
$$\frac{36}{13} - \frac{36}{13} > 0$$

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{1} !$$

$$6 - a > 0$$

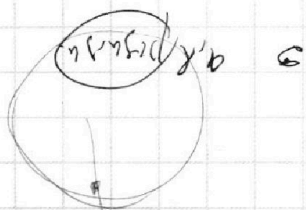
$$(b-a)((b-a)^2$$

$$SP =$$

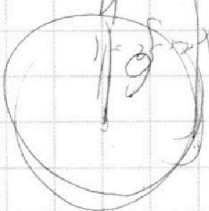


$$|y| = 3$$

$$y = \frac{a+x+b}{3}$$



$$x^2 + y^2 = 6^2$$



оп. 2. Рев.

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$x \neq 1/2$$