МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)\,(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 – продолжение

$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \frac{1}{2}(7+13+14) = \frac{1}{2}\cdot 34 = 17$

$\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq \frac{1}{2}(11+15+17) = \frac{1}{2}\cdot 43 = 21.5$ и

$\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 22$

т.к. $\beta_5 \geq 0$

$\alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geq \alpha_5+\gamma_5 \geq 43$

т.е. $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

пример, когда $abc = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

$\alpha_2=4;\ \beta_2=3;\ \gamma_2=10 \Rightarrow \alpha_2+\beta_2 \geq 7;\ \beta_2+\gamma_2 \geq 13;\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 14$ (V)

$\alpha_3=6;\ \beta_3=5;\ \gamma_3=11 \Rightarrow \alpha_3+\beta_3 \geq 11;\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 17;\ \beta_3+\gamma_3 \geq 15$ (V)

$\alpha_5=21;\ \gamma_5=22;\ \beta_5=0 \Rightarrow \alpha_5+\beta_5 \geq 14;\ \alpha_5+\gamma_5 \geq 43;\ \beta_5+\gamma_5 \geq 18$ (V)

$k=m=n=1$

$a = 2^4\cdot 3^6\cdot 5^{21}$

$b = 2^3\cdot 3^5$

$c = 2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{22}$

поскольку верно, то условия
~~все~~ ab: что надо
bc: что надо
ac: что надо

выполнены. $abc = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

Оценка и пример есть

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 - начало

$ab : 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$ab = k \cdot 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$v_p(x)$ - степень вхождения простого числа p в разложение x.

$a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot x$, где $x \nmid 2, 3, 5$

т.е. $\alpha_2 = v_2(a)$; $\alpha_3 = v_3(a)$; $\alpha_5 = v_5(a)$

$b = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5} \cdot m$, где $m \nmid 2, 3, 5$.

$c = 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5} \cdot n$, где $n \nmid 2, 3, 5$.

$abc = 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5+\beta_5+\gamma_5} \cdot mnk \geq$

$\geq 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5+\beta_5+\gamma_5}$

при том имеем:

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 7$; $\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$; $\alpha_5 + \beta_5 \geq 14$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 13$; $\beta_3 + \gamma_3 \geq 15$; $\beta_5 + \gamma_5 \geq 18$

$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$; $\alpha_3 + \gamma_3 \geq 17$; $\alpha_5 + \gamma_5 \geq 43$

} критерий

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 - Продолжение

то есть $ED = \frac{3x}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = 3x \cdot \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}$

а также $ED = \sqrt{30}x - \sqrt{30}kx =$

$= \sqrt{30}x(1-k)$

$$\frac{3\sqrt{10}x}{2\sqrt{3}} = \sqrt{30}x(1-k)$$

$$3\sqrt{10} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{10}(1-k)$$

$$2(1-k) = 1$$

$$1-k = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

из подобия

выходит, что $S(\triangle EFC) = \frac{1}{4} S(\triangle BCD) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30}x \cdot 10x = \frac{5\sqrt{30}}{4} \cdot x^2$

$S(\triangle ACD) = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$

$$\frac{S(\triangle EFC)}{S(\triangle ACD)} = \frac{\frac{5\sqrt{30}}{4}}{\frac{3\sqrt{30}}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle EFC)} = \frac{6}{5}$. И это ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~2 - продолжение 3

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\left(1+\frac{16}{3}\right)}{1-\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{16}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{10}}}=\frac{\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{19}{3}}{1-\frac{3}{10}\cdot\frac{16}{3}}=$$

4

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{10}}\left(1+\frac{16}{3}\right)}{1-\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{16}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{10}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{3}{10}}\left(1+\frac{16}{3}\right)}{1-\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{\sqrt{30}}{16}}=\frac{\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{19}{3}}{1-\frac{3}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{\frac{19}{3}}{\frac{13}{16}}=\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{19\cdot16}{13\cdot3}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{3x}{ED}\Rightarrow ED=3x\cdot\frac{13\cdot3\cdot\sqrt{10}}{19\cdot16\cdot\sqrt{3}}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}=\frac{\sqrt{\frac{3}{10}}+\frac{\sqrt{30}}{16}}{1-\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{\sqrt{30}}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{1+\frac{10}{16}}{1-\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\frac{26}{13}=2\sqrt{\frac{3}{10}}$$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{3x}{ED}$ (см. $\triangle AED$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 – продолжение 2

$$\frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\sin^2\beta} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}(\operatorname{ctg}^2\beta - 1) - \sqrt{\frac{3}{13}}\cdot 2\operatorname{ctg}\beta$$

$\operatorname{ctg}\beta = u$

$$\sqrt{\frac{10}{13}}(u^2-1) - \sqrt{\frac{3}{13}}\cdot 2u = \frac{\sqrt{130}}{3} \quad (\cdot\sqrt{13})$$

$$\sqrt{10}(u^2-1) - \sqrt{3}\cdot 2u = \frac{13\sqrt{10}}{3}$$

$$3\sqrt{10}(u^2-1) - 6\sqrt{3}u - 13\sqrt{10} = 0$$

$$3\sqrt{10}u^2 - 6\sqrt{3}u - 16\sqrt{10} = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{10}\cdot(-16\sqrt{10}) =$$

$$= 27 + 48\cdot 10 = 480 + 27 = 507 =$$

$$= 3(9+160) = 3\cdot 169 = 3\cdot 13^2$$

$$u_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm 13\sqrt{3}}{3\sqrt{10}}$$

$$u = \operatorname{ctg}\beta > 0 \Rightarrow u = \frac{3\sqrt{3}+13\sqrt{3}}{3\sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{30}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{30}}{16}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{\frac{3}{10}} + \frac{16\sqrt{3}}{3\sqrt{10}}}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 - продолжение.

$$\frac{AE}{\sin\beta} = \frac{EF}{\sin(2\alpha+\beta)} \quad \frac{EF}{\sin(90^\circ-\alpha-2\beta)}$$

$$\frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{CE}{\sin\beta} \qquad \frac{EF}{CE} = \operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ-\alpha-2\beta)} \cdot \frac{EF}{CE} = \frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+2\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin^2\beta}{\cos(\alpha+2\beta)}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{130}} \Rightarrow \frac{\sin^2\beta}{\cos(\alpha+2\beta)} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

$$\frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\sin^2\beta} = \frac{\sqrt{130}}{3}$$

$$\cos(\alpha+2\beta) = \cos\alpha\cos2\beta - \sin\alpha\sin2\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{10}{13}}\left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right) - \sqrt{\frac{3}{13}}\left(2\sin\beta\cos\beta\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

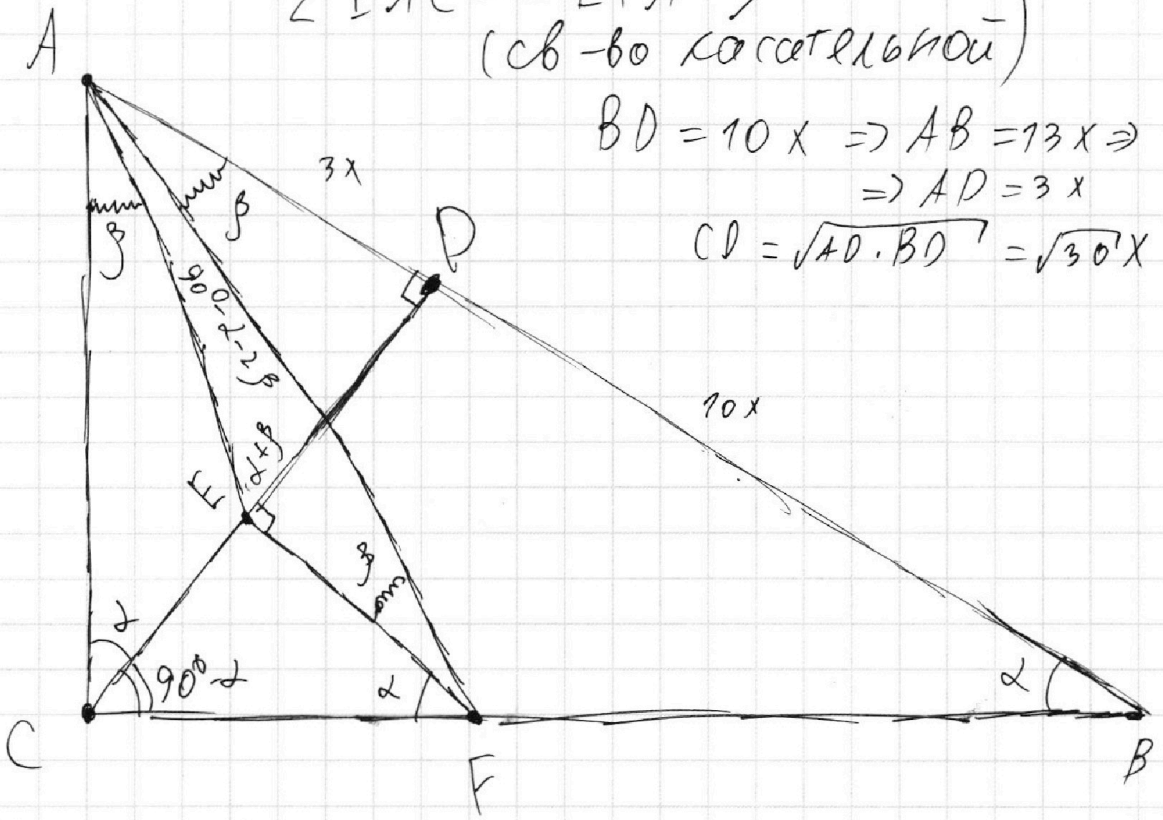
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 – начало

$\angle EAC = \angle EFA \Rightarrow$
(св-во касательной)



$BD = 10x \Rightarrow AB = 13x \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = 3x$

$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{30}x$

$\angle CAF = 90° - \alpha - \beta \Rightarrow \angle EAF = 90° - \alpha - 2\beta$

$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{30x^2 + 100x^2} = \sqrt{130}x$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$ $\quad tg\alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow 7x : EF = 10x : x$

$CE = \sqrt{30}x$

$CF = \sqrt{130}x$

ПОТ-ме sin-ов в
треугольниках $\triangle AEF$ и $\triangle ACE$:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 – продолжение 2

$$-\frac{5\pi}{2} = 6x$$

$$x = -\frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$

~~такая~~ такая в этом случае решений нет.

Мы перебрали все случаи и получили корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{8\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{6} \leftarrow \text{это ответ.} \\ x = \pi \\ x = \frac{\pi}{6} \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3 - продолжение 1

$-\frac{4\pi}{3} \in [-2\pi; -\pi) \Rightarrow$ нам подходит $x = \frac{11\pi}{6}$

3) $\frac{\pi}{2} - x \in [-\pi; 0) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x + \pi \in [0; \pi) \Rightarrow$

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} - x$

$\frac{15\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = 6\pi$

$x = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi; 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нам подходит $x = \pi$

4) $\frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi) \Rightarrow \arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) =$

$= \frac{\pi}{2} - x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = \pi$

$x = \frac{\pi}{6}$

$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \in [0; \pi) \Rightarrow$ нам подходит $x = \frac{\pi}{6}$

5) $\frac{\pi}{2} - x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right) \in [0; \pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x - \pi$

$\frac{5\pi}{2} - 5x - 5\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 - начало

$\frac{3\pi}{2} + x = 5\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$

$x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

$(\frac{\pi}{2} - x) \in [-3\pi; 2\pi]$

1) $(\frac{\pi}{2} - x) \in [-3\pi; -2\pi)$ имеет cos как у $\frac{\pi}{2} - x$

$(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi) \in [0; \pi) \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 3\pi$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 15\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = \pi + 15\pi$

$x = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$

т.к. $\frac{13}{6} < \frac{3}{2} < \frac{14}{6} < 2$

$\in [-3\pi; -2\pi)$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{3} = \frac{3\pi - 16\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

т.к. в этом случае решения нет $x = \frac{8\pi}{3}$ подошёл.

2) $(\frac{\pi}{2} - x) \in [-2\pi; -\pi)$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi \in [0; \pi) \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = \pi + 10\pi = 11\pi$

$x = \frac{11}{6}\pi$ $\quad (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = \frac{3\pi - 11\pi}{6} =$

$= -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 – продолжение 3

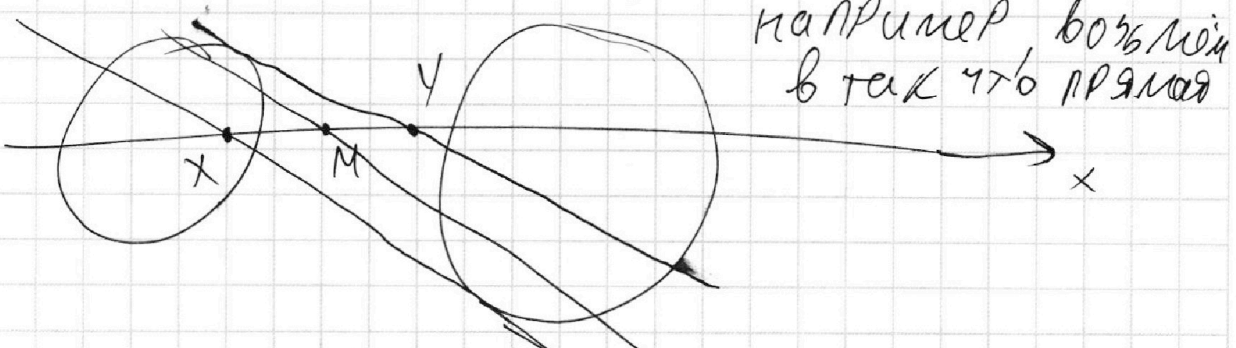
~~короче~~ необходимо и достаточно, чтобы $\left|\frac{1}{3a}\right| < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ ($a \neq 0$ т.к. $a = 0$ уже р-ен)

$|a| > \frac{2\sqrt{6}}{15}$ это ответ.

$a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$

P.S. строго ~~больше~~ меньше т.к. при р-ве ~~нужно~~ чтобы прямая пересекала обе окружности надо, чтобы она была общей вн. кас-ой ⇒ ⇒ имелось лишь 2 р-ия. $2 < 4$.

А вот при строгом нер-ве мы точно найдём нужное в (из соображений непрерывности) и ~~это очевидно~~.



например, возьмём в так что прямая

пересечёт OX в точке M.

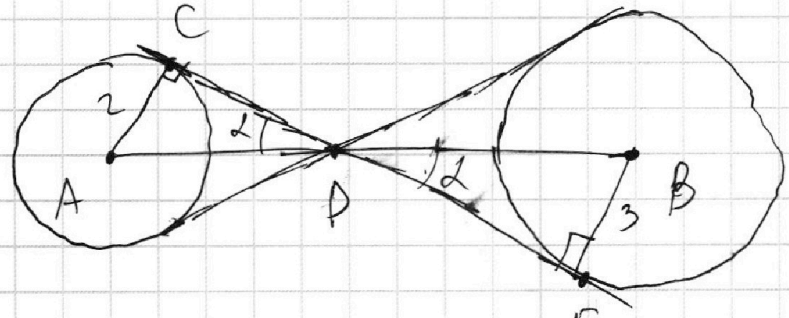
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~4-продолжение 2
Угол наклона к
них одинаковый по модулю
ней поскольку центры обеих этих
окружностей лежат на прямой „y = 0".
Найдём тот угол.



$$AB = 7 = AD + DB = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{3}{\sin\alpha}$$

$$\frac{5}{\sin\alpha} = 7 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{7}$$

$$\alpha\text{ - острый} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\sqrt{\frac{49-25}{49}}} = \frac{5}{\sqrt{49-25}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{6}\cdot 2} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

Уравнение $a \neq 0 \Rightarrow x = -3ay + 7b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x - 7b}{-3a} = \frac{7b - x}{3a}$$

Т.е. модуль tg угла наклона этой прямой по отношению к ~~оси~~ оси OX $= \left|\frac{1}{3a}\right|$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐
МФТИ
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ч-продолжение

но не в праве (меняя в) выбрать наклон к оси Oy.

частный случай: $a=0 \Rightarrow 3a=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x=7b \Leftrightarrow (г))$

ч-х решений быть ч системы не может, т.к. прямая вида „$x=c$" пересечь одновременно обе окружности ~~в~~ не может $\Rightarrow \leq 2-х$ р-ий но нам надо ч. т.е. $a=0$ не V. далее ищем $a \neq 0$.

Чтобы мы могли подобрать положение прямой $x=-3ay+7b$ (меняя только в при фикс. a) необходимо и достаточно, чтобы $\overset{+a}{\underset{-a}{\vee}}$ угла наклона прямой $x=-3ay+7b$ по отношению к прямой „$y=0$" (оси OX) был строго меньше по модулю, чем тот угол ч общей касательной 2-х окружностей (любой из них,

вычитание

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 – начало.

Будем решать графически.

$$\begin{cases} x = -3ay + 7b \quad (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

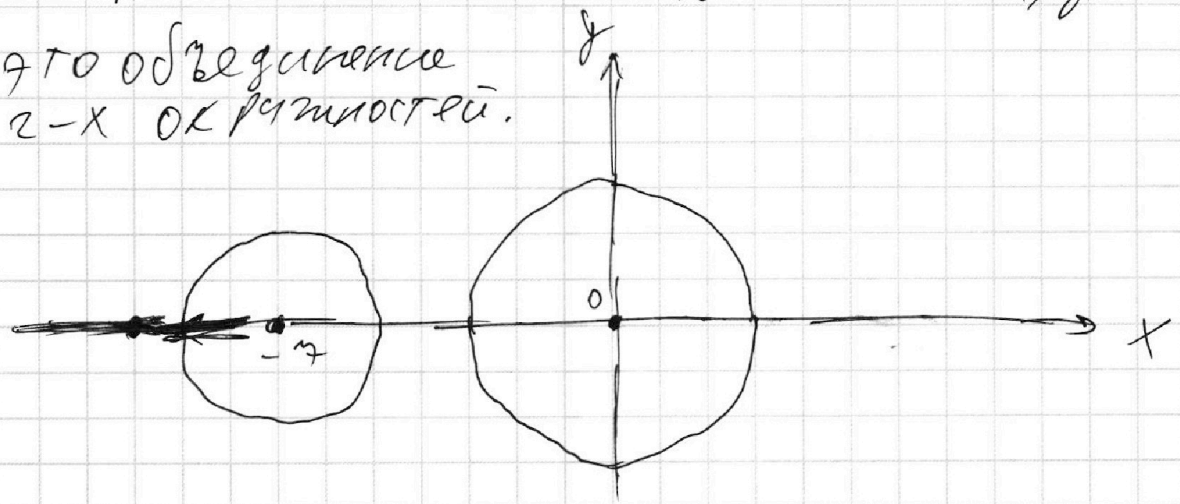
$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$

нарисуем этот на плоскости x, y

это объединение 2-х окружностей.



(2) – это (при фикс. a) какая-то прямая, у которой мы меняя b можем выбрать точку пересечения с Ox (оно всегда есть)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 - продолжение 2

для этих x и y верно, что

$\log_7(6x) + \log_7(y) = a + b = 0$

$\log_7(6xy) = 0$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

если бы в условии не было сказано, что нужные x и y Э, то нужен был бы пример, но у нас по усл. известно, что Э x, y : ....

а из этого ... $\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

значит $xy = \frac{1}{6}$ единственное возможное значение xy

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(в): покажем, что

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq 0$

тогда это будет означать, что такого не бывает (вс.м. случая в)

1) $a = -b$: $a^4 - a^4 + a^4 - a^4 + a^4 \geq 0$ это верно ($a^4 \geq 0$)

2) $a > -b$ тогда $a^5 > (-b)^5 = -b^5$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) > 0$

$f(x) = x^5$ строго возрастает

$a > -b \Rightarrow a + b > 0 \Rightarrow$ разделим на $(a+b) > 0$ получим

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

3) $a < -b \Rightarrow a^5 < (-b)^5 \Rightarrow a^5 + b^5 < 0$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) < 0$

делим на $(a+b) > 0$

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

все случаи разобраны, везде ч.т.д.

значит $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq 0$

значит оно не м.б. равно (-4)

значит $a + b = 0$. То есть если некоторые x и y удовл. условию задачи, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~5 - начало

$a = \log_7(6x)$

$b = \log_7(y)$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$

Попробуем найти все возможные значения $(a+b) = \log_7(6xy)$

Так мы сможем найти все значения xy т.к. $xy = 7^{a+b} \cdot \frac{1}{6}$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a} - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{b} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 = \frac{1}{a}\left(2 + \frac{3}{2}\right) - 4 = \frac{1}{a} \cdot \frac{7}{2} - 4 \\ b^4 = \frac{1}{b}\left(\frac{5}{2} - 6\right) - 4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^5 = \frac{7}{2} - 4a \\ b^5 = -\frac{7}{2} - 4b \end{cases}$$

$a^5 + b^5 = -4(a+b)$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \quad (1) \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -4 \quad (2) \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

-6- продолжение 5

$= 18 \cdot 18 \cdot 20 + 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 =$

~~$19 \cdot 18 \cdot 20 + 17 \cdot$~~

$= 17 \cdot 18 \cdot 20 + 18 \cdot 20 + 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 =$

$= 17 \cdot 17 \cdot 20 + 17 \cdot 20 + 18 \cdot 20 + 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 =$

$= 17^2 (20 + 3 \cdot 19) + 17 \cdot 20 + 18 \cdot 20 =$

$= 17^2 (20 + 57) + 20 \cdot 35 =$

$= 17^2 \cdot 87 + 700 =$

$= 289 \cdot 87 + 700$

```
  6 6
  289
x  87
-----
 2023
+
```

56+6=62

```
   4
   17
 x 17
------
  119
+ 17
------
  289
```

короче ответ: $(289 \cdot 87 + 700)$

НО я попробую ни-те досчитать:

```
  17
   6 6
   289
 x  87
-------
 2023
+
 2312
-------
 25143
```

$25143 + 700 = \cancel{26}25843$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 - продолжение 4

тогда чтобы $\exists \Delta x_0, \Delta y_0$:

$4\Delta x_0 + \Delta y_0 = 40$

$-4\Delta x_0 - \Delta y_0 = 40$ $\Rightarrow 0 = 80$ противоречие

При фиксировании $y_1 \hookrightarrow$

$\hookrightarrow x_1 : A(x_1, y_1)$ - внутри $OPQR$

ровно $(2 + \mu(y_1))$ штук

тогда всего пар точек:

$$\sum_{y_1=0}^{68} \mu(y_1)(\mu(y_1)+2)$$

(поскольку их 20 при $y_1 : 4$ и 19 иначе

а это поскольку условие на x_1:

$x_1 \in [-10 - \frac{1}{4} y_1 ; 9 - \frac{1}{4} y_1]$

~~то есть всего пар точек:~~

чисел из $[0; 68)$: они : 4 всего :

18 штук $(0, 1\cdot4, 2\cdot4, \ldots, 15\cdot4, 16\cdot4, 17\cdot4)$

а остальных : $69 - 18 = 51 = 17 \cdot 3$

$$\sum_{y_1=0}^{68} \left(\mu(y_1)(\mu(y_1)+2) \right) = 18 \cdot (18 \cdot 20) + 51 \cdot 17 \cdot 19 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 - продолжение 3

$-6 \le 4\Delta x - y_1 - 40 \le 0$

$-2 \le 4\Delta x - y_1 \le 40$

$-2 + y_1 \le 4\Delta x \le 40 + y_1$

$-7 + \frac{1}{4}y_1 \le \Delta x \le 10 + \frac{1}{4}y_1$

Целых на отрезке

$[-7 + \frac{1}{4}y_1 ; 10 + \frac{1}{4}y_1]$

17 точек при $y_1 \vdots 4$ и 18 при $y_1 \not\vdots 4$

$$\mu(u) = \begin{cases} 17, & u \vdots 4 \\ 18, & u \not\vdots 4 \end{cases}$$

тогда число подходящих $\Delta x = \mu(y_1)$

т.е. всего пар точек:

$\sum \mu(y_1)$ ← штук.

$x_1, y_1 : A(x_1, y_1)$ внутри ODQR

поскольку фиксируя $A(x_1, y_1)$

мы имеем $\mu(y_1)$ подходящих B

никакая пара точек тут

дважды не была посчитана, т.к.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 - продолжение 2.

Фиксируем $\Delta x_1, y_1$. Посчитаем число подходящих $B \Leftrightarrow$ посчитаем Δx, подходящие под условие:

$$\begin{cases} y_1 + 40 - 4\Delta x \in [0;68] \\ 4x_1 + 4\Delta x \geq -y_1 - 40 + 4\Delta x \\ 4x_1 + 4\Delta x \leq -y_1 - 40 + 4\Delta x + 19 \cdot 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 + 40 - 4\Delta x \leq 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq -40 \text{ - это верно, т.к. } 4x_1 + y_1 \geq 0 \\ 4x_1 + y_1 \leq -40 + 19 \cdot 4 \text{ - это верно, т.к.} \\ \qquad 4x_1 + y_1 \leq 19 \cdot 4 \text{ (т.к.} \end{cases}$$

изначально A - внутри $OPQR \Rightarrow x_1 \leq -\frac{1}{4}y_1 + 9$)

$0 \leq y_1 + 40 - 4\Delta x \leq 68$

то есть критерий подхождения Δx не зависит от x_1 (главное, чтобы $A(x_1; y_1)$ лежало в $OPQR$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 – продолжение

~~вероятно, под числом пар точек~~
~~подразумевается неупорядоченное число~~
~~пар. Посчитаем упорядоченное, поделим~~
~~(иллюзия 2, т.к. мы ВСЕ посчитали~~
~~2 раза.~~ A совпасть с B не может
т.к. $\Delta x = \Delta y = 0$ не подходит
под условие $4\Delta x + \Delta y = 40$
Р-им какую-то A внутри OPQR.
посчитаем ~~попробуем~~ число
подходящих к ней в пару B.
$A(x_1, y_1)$ $B(x_1 + \Delta x, y_1 + 40 - 4\Delta x)$

$$\begin{cases} y_1 \in [0; 68] \\ x_1 \geq -\frac{1}{4} y_1 \\ x_1 \leq -\frac{1}{4} y_1 + 19 \end{cases}$$ верно $\Leftrightarrow$ A лежит внутри OPQR

~~$x_1 + \Delta x$~~

$$\begin{cases} y_1 + 40 - 4\Delta x \in [0; 68] \\ x_1 + \Delta x \geq -\frac{1}{4}(y_1 + 40 - 4\Delta x) \\ x_1 + \Delta x \leq -\frac{1}{4}(y_1 + 40 - 4\Delta x) + 19 \end{cases}$$

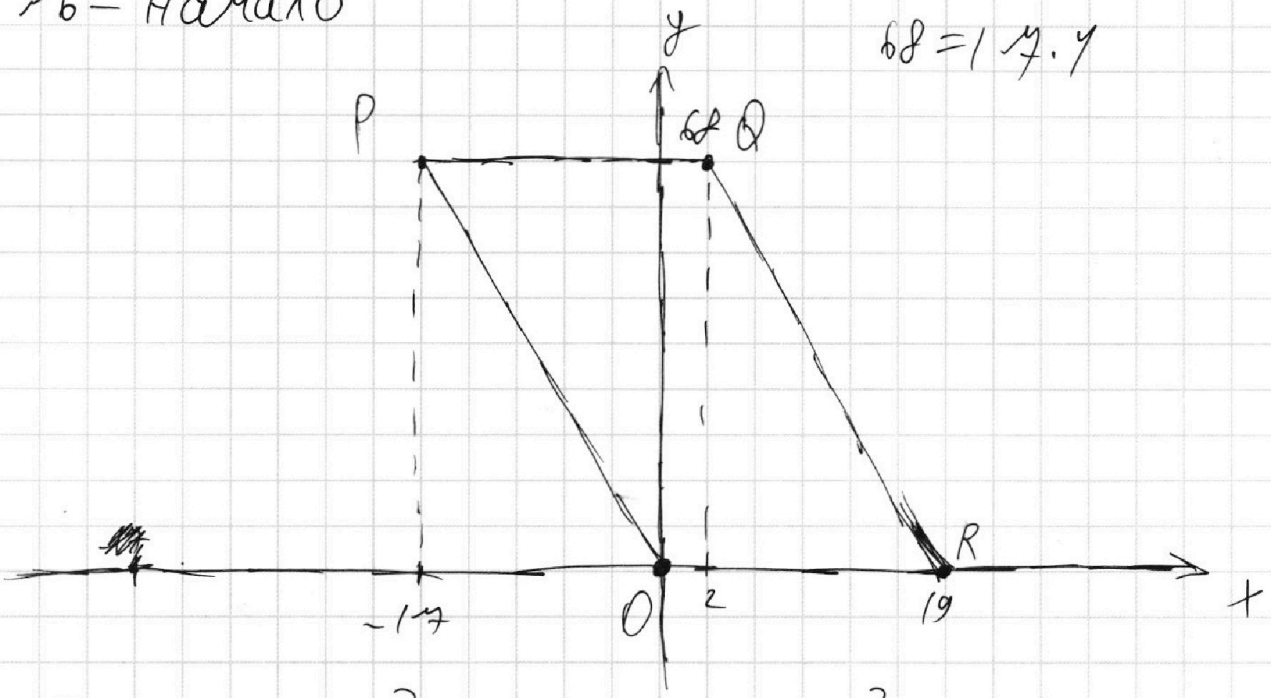
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

-6- Начало



$68 = 17 \cdot 4$

$x_2 - x_1 = s_x \in \mathbb{Z}$; $y_2 - y_1 = s_y \in \mathbb{Z}$

$A(x_1; y_1)$

$B(x_1 + s_x; y_1 + s_y)$

$4 s_x + s_y = 40$

$s_y = 4(10 - s_x)$

$B_0(x_1 + s_x; y_1 + 40 - 4 s_x)$

прямая OP имеет уравнение: $y = -4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} y$

QR: $y = -4(x - 19) = -4x + 19 \cdot 4$

$x = -\frac{1}{4} y + 19$

Найдем критерий того, что точка $S(x_0; y_0)$ лежит внутри $OPQR$:

$$\begin{cases} y_0 \in [0; 68] \\ x_0 \geq -\frac{1}{4} y_0 \\ x_0 \leq -\frac{1}{4} y_0 + 19 \end{cases} \Leftrightarrow S \text{ внутри } OPQR$$

(внутри = внутри или на границе)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 – продолжение 2

хотелось бы показать, что такого ни б.

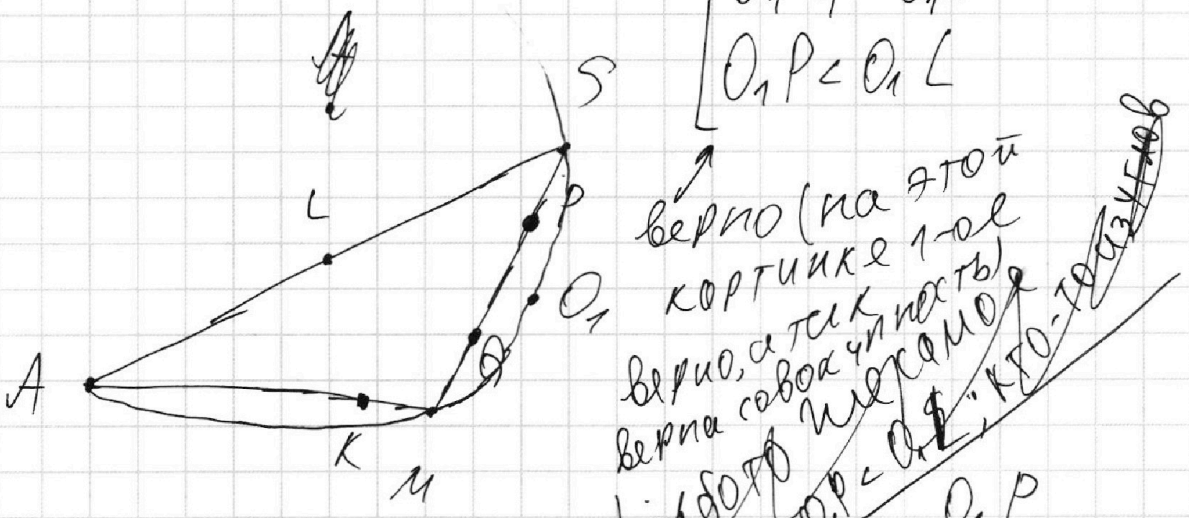
$AO^2 = AK^2 + KO^2 = AL^2 + LO^2$

$AO_1^2 + O_1O^2$

а такого ни б потому, что

∃ – пер к LP и т

$\begin{cases} O_1Q < O_1K \\ O_1P < O_1L \end{cases}$



верно (на этой картинке 1-ое верно, а так как точность верна совокупность)

либо графически

$O_1Q < O_1K$ но $O_1Q = O_1K = O_1L$

$= O_1P$

противоречие. Значит $AM = AS = 10$

тогда $MA_1 = BA_1 = A_1C = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMC = 90°$ (т.к. в $\triangle BMC$ медиана $= \frac{1}{2}$ стороны, к которой её провели)

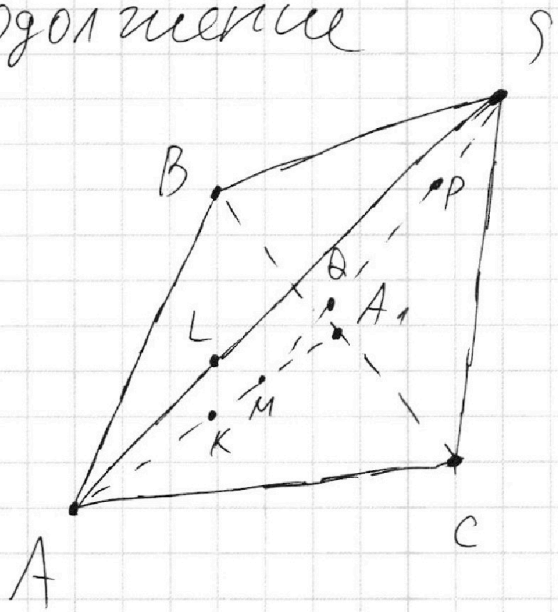
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 - продолжение



спроецируем ∂на ASM (плоскость). Пусть получим точку O_1. Тогда $OL \perp AS \Rightarrow O_1L \perp AS$
$OK \perp AA_1 \Rightarrow O_1K \perp AA_1$ и O_1 - центр окр-и, описанной около $\angle KQP$.
$O_1K \perp AA_1$; $O_1L \perp AS$ и $O_1K = O_1L \Rightarrow$
$\Rightarrow AO_1$ - бис-са $\angle SAM$.
также O_1 - на с-пер к PQ (вп-и ASM) $\Rightarrow$ на с-пер к SM
если $\triangle SAM$ не р/б то $O_1 \in$ с-пер к PQ и бис-се $\angle SAM \Rightarrow$ точка на середине дуги $\overset{\smile}{SM}$ опис. окр-и около $\triangle SAM$.

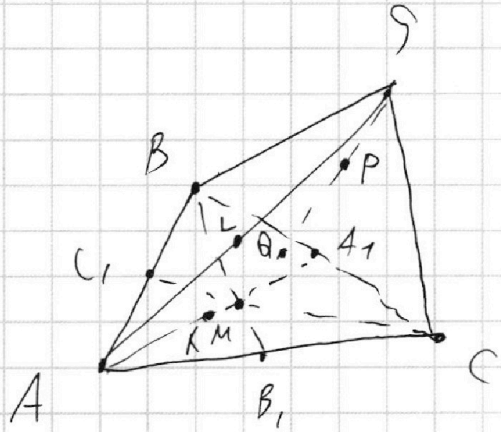
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 7 - начало



$S(\triangle ABC) = 60$ $SA = BC = 10 \Rightarrow BA_1 = A_1C = 5$

$SL^2 = SP \cdot SQ$ (степень точки S отн-но окр-и, опис. около $\triangle LPQ$)

$SP = MQ \in$ центр PQ = центр SM.

Далее влиять не будет, кто ближе к M:

P или Q $\Rightarrow$ пусть без ОО $\hookrightarrow$ Q ближе к M

$AL = AK$ т.к. касательные к сфере из A.

$SL = 10 - x \Rightarrow AL = AK = x$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot AB \cdot BM \cdot CM$

пусть O — центр Ω (он не отмечен) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при пр-ии на ABC это K, а на AS — это L.

$OK \perp ABC \Rightarrow OK \perp AA_1$ и $OL \perp AS$ и $OL = AK$

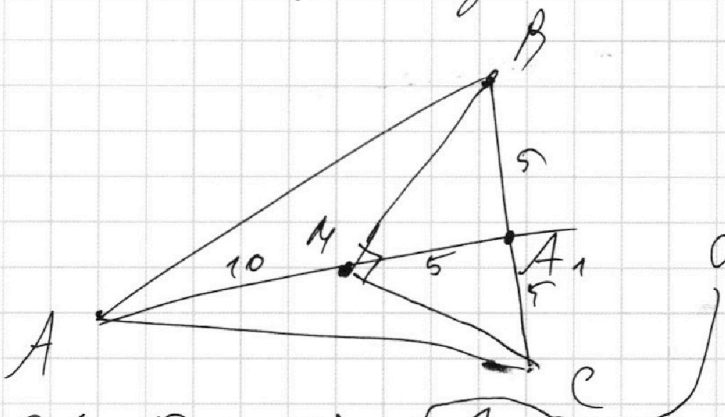
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~7~~ 7 - Продолжение 3



св-во медиан.

$S(\triangle BMC) = \frac{1}{3}(S_{\triangle}(ABC)) = 20$

$BM \cdot MC \cdot \frac{1}{2} = 20$

$BM \cdot MC = 40$

$AM \cdot BM \cdot CM = 10 \cdot 40 = 400$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot AM \cdot BM \cdot CM =$

$= \frac{27}{8} \cdot 400 = \frac{27}{2} \cdot 100 = 27 \cdot 50 =$

$= 20 \cdot 50 + 7 \cdot 50 = 1000 + 350 = 1350$

Ответ: (на а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$

б) $SN = SL = 3 \Rightarrow AL = 7 = AK$

$SP \cdot SQ = 3^2$

$SP + SQ = SM$ (Вернулись к то что было в начале)

MQ

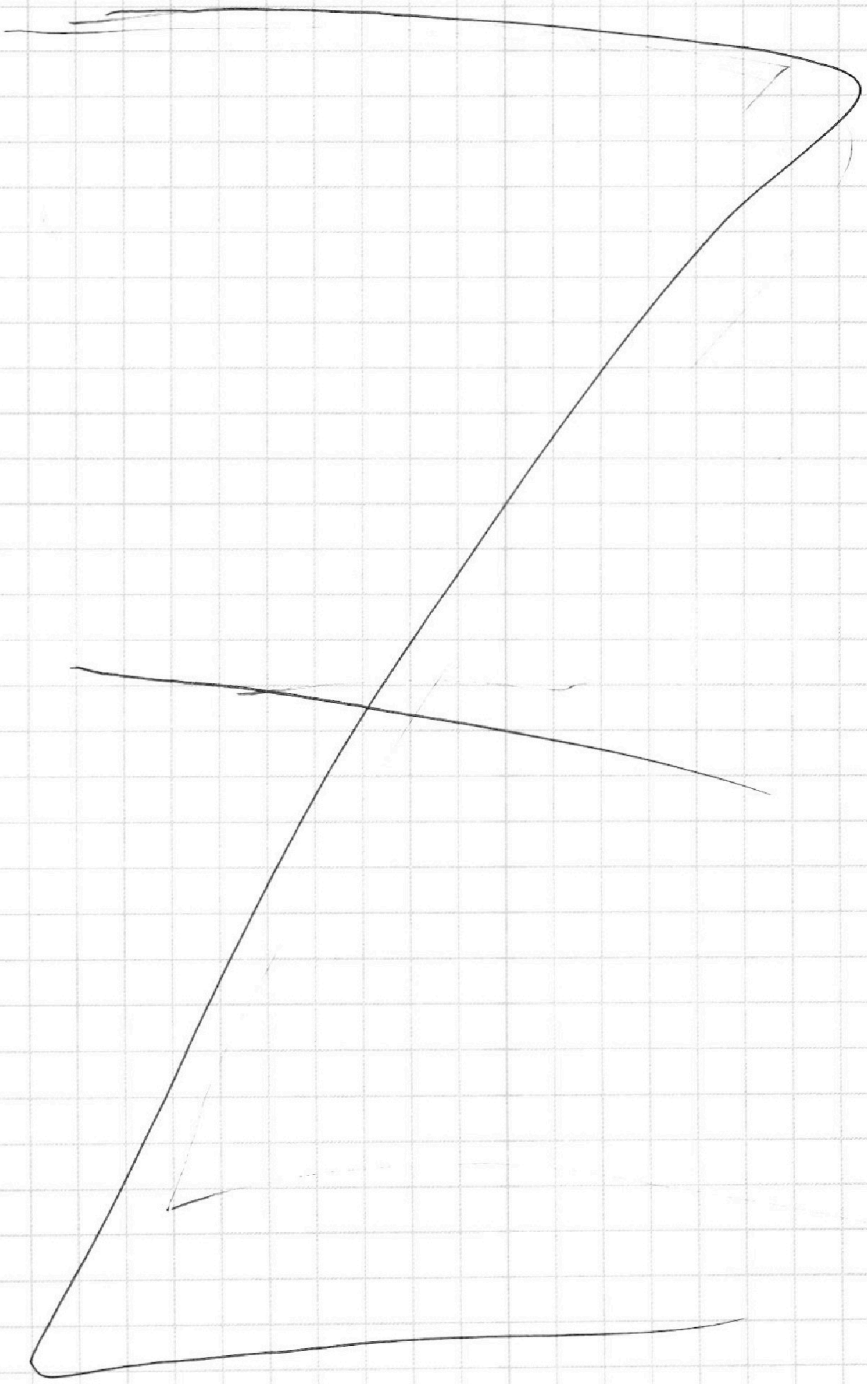
$SM = SP + SQ \geq 2\sqrt{SP \cdot SQ} = 6 \Rightarrow SM \geq 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~1 - Черновик

$ab : 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$ac :$

a: только на 2

b: только на 2, 3, 5

c: только на

$$abc = \frac{ab \cdot bc}{b} \geq \frac{(2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14})(2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43})}{b} \geq$$

$14 + 18 = 32$

$32 + 43 = 75$

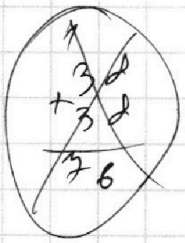
$11 + 15 = 26$

$17 + 26 = 30 + 13 = 43$

$$\geq 2^{7} \cdot 3^{11} \text{ (кр. 0 чев)}$$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} \geq \sqrt{2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{17+18+43}}$$

$$\sqrt{\cdot k m n} \geq \quad +1\ 2_3 \quad +1\ 2_5$$



$$= \sqrt{2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \cdot k \cdot m \cdot n} \geq$$

$$\geq \sqrt{2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

пример бы:

$ab = 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc =$

$a = 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

$b =$

$c =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 17$ Черновик.

Черновик

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi \cdot 3 + \pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~х - начало~~ черновик

$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2}a - 4$

~~$343 = 3^5$?~~

$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2}a - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \end{cases}$

$a+b$ - ?

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$\begin{cases} a^4 = \left(\frac{3}{2}+2\right)\cdot\frac{1}{a} - 4 = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} - 4 \\ b^4 = \left(\frac{5}{2}-6\right)\cdot\frac{1}{b} - 4 = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a^5 = \frac{7}{2} - 4a \\ b^5 = -\frac{7}{2} - 4b \end{cases}$

$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = -4(a+b)$

~~$(a-b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 4(a-b)$~~

$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = -4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

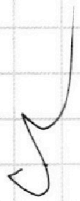
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X					

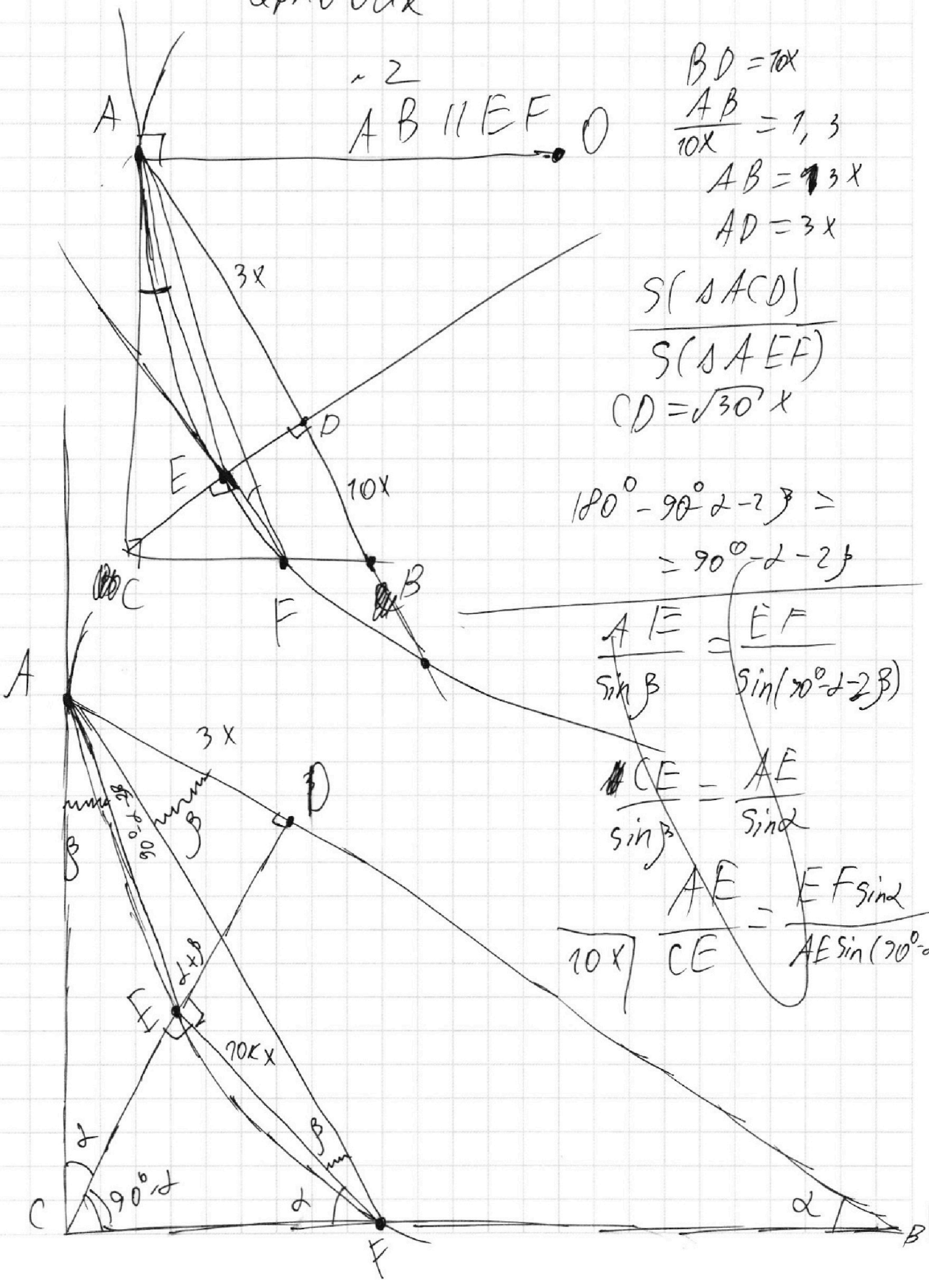
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№2

AB ∥ EF



$BD = 10x$

$\frac{AB}{10x} = 1,3$

$AB = 13x$

$AD = 3x$

$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle AEF)}$

$CD = \sqrt{30}\,x$

$180^\circ - 90^\circ - \alpha - 2\beta =$

$= 90^\circ - \alpha - 2\beta$

$\frac{AE}{\sin\beta} = \frac{EF}{\sin(90^\circ-\alpha-2\beta)}$

$\frac{CE}{\sin\beta} = \frac{AE}{\sin\alpha}$

$\frac{AE}{CE} = \frac{EF\sin\alpha}{AE\sin(90^\circ-\alpha-2\beta)}$

$10x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X					

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

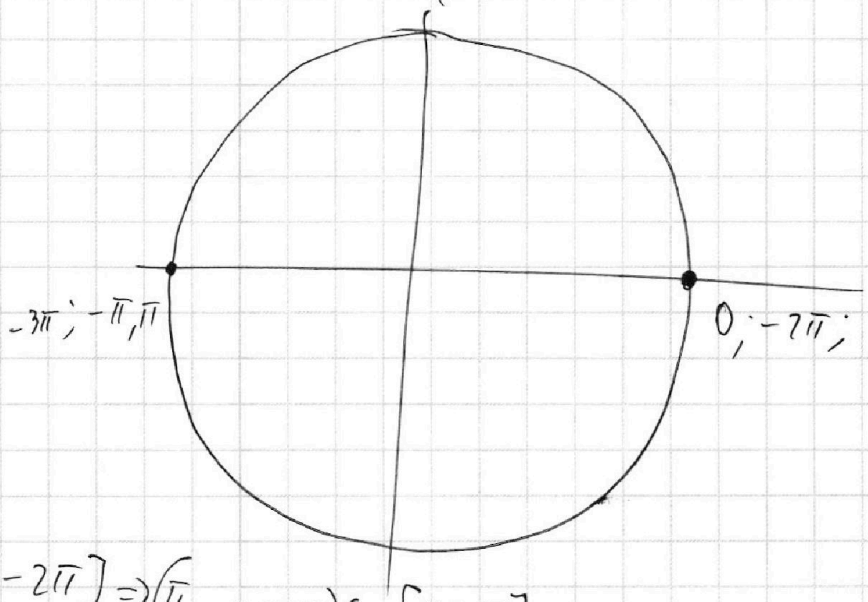
$\frac{3\pi}{2}+x=5\arccos(\sin x)\in[0;10\pi]$

$\frac{3\pi}{2}+x=5\arccos(\sin x)\in[0;5\pi]$

$x\in[-\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}]\Rightarrow(\frac{\pi}{2}-x)\in[-3\pi;2\pi]$

$5\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}+x))$

$5\arccos(\sin x)=5\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$



а) $\frac{\pi}{2}-x\in[-3\pi;-2\pi]\Rightarrow(\frac{\pi}{2}-x+3\pi)\in[0;\pi]\Rightarrow$

$\Rightarrow\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=\frac{\pi}{2}-x+3\pi$