



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}), bc : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}), ac : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}); (abc)^2 : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52});$$

Степень входящая тройки в число abc — целое число, не меньшее
30 (в противном случае $(abc)^2$ имеет степень не более 58)

т.е. вывод: $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, при этом $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28}$.

Итого, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ (т.к. делится на это число)

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

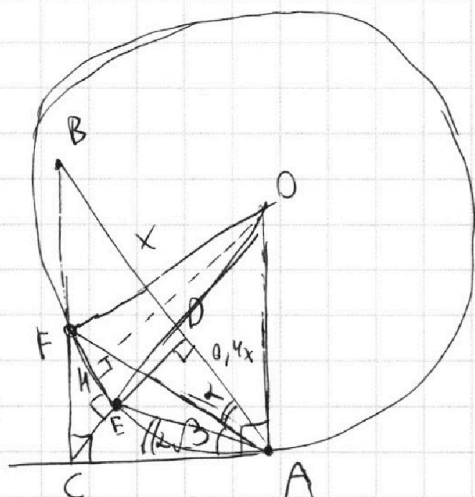
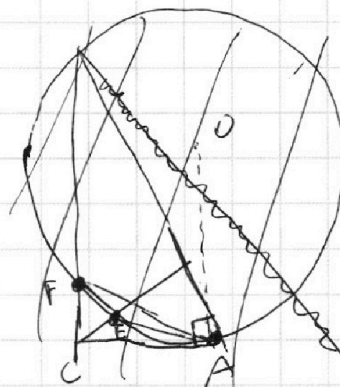
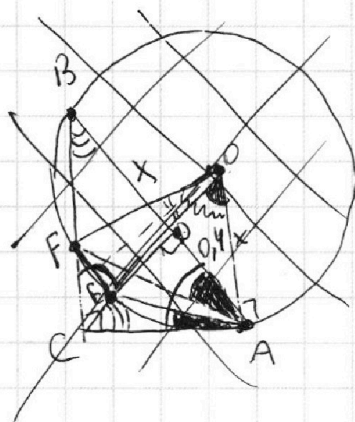
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $BD = x$, $DA = 0,4x$. O - центр окр.



Пусть также $\angle CAE = \alpha$, $\angle CAF = \beta$
 $\angle FPA = 2\angle FAC$; $\angle EOA = 2\angle CAE$
 $= 2\beta$ $= 2\alpha$

Проведем OH - медиану $\triangle BOE$

$\angle FOH = \angle HOE$. Или так $AC \perp BA$

$FE \parallel BA (\Rightarrow FE \perp CD)$, $OH \perp FE$, но $OH \parallel CD$. ①

а также $CA \perp OA$ и $CA \perp BC \Rightarrow BC \parallel OA$ ②. Из ① и ② следует, что $\angle HOA = \angle BCD$

$\angle BCD = 90 - \angle B = \angle BAC$. Или $\angle HOA + \angle AOE = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \angle AOH = \angle BAC$

то $\angle BAC = \alpha + \beta = \angle FAC + \angle FAB$, а значит $\angle FAB = \alpha$.

По двум углам подобны $\triangle CAE$ и $\triangle BAF$ ($90 - \angle BAC = \angle B = \angle DCA$, $\alpha = \angle EAC = \angle FAB$)

1. $\frac{AC}{BA} = \frac{BF}{CE}$ $CD^2 = AD \cdot DB$; $CD = \sqrt{0,4x}$. По т. Пиф.: $AC = \sqrt{(0,4x)^2 + (0,4x)^2} = \sqrt{0,56}x$

$BC = \sqrt{(1,4x)^2 + (0,56x)^2} = \sqrt{2,4176}x$; Из 1. $CE = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} BF$; $CF = CE \cdot \frac{BC}{CD}$

$CF = \frac{\sqrt{0,56} BF \cdot \sqrt{1,4}}{0,4} = BF$

$\triangle (FE \sim \triangle AC)$ по 2 углам $\Rightarrow$ медианы

вырожденные как $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{0,56x^2}{1,4 \cdot 0,4x^2} = \frac{0,8 \cdot 4}{2} = 1,6$ Ответ: 1,6.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \begin{cases} 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k), k \in \mathbb{Z} \\ 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.к. $\arccos$ принимает значения от 0 до π .

$$1) 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x; 8x = 20\pi k - 4\pi; x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Вспомогательное } \arccos t \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 10\pi k - 4\pi \leq 10\pi$$

$$\text{Значит } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2}; 0 \leq 5k \leq 10; k \in \mathbb{Z}; k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; 10 \arccos(\cos \sqrt{1}) = 9\pi + \pi; 10\pi - 10\pi - \text{верно}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}; 10 \arccos(\cos(-\frac{\pi}{2})) = 9\pi - 4\pi - \text{верно}$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{9\pi}{2}; 10 \arccos(\cos(-\frac{9\pi}{2})) = 9\pi - 9\pi - \text{верно}$$

$$2) 5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x; 12x = -20\pi k + 4\pi; x = -\frac{5}{3}\pi k + \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{5}{3}\pi k + \frac{\pi}{3} \leq \frac{9\pi}{2}; -3\pi \leq -10\pi k + \pi \leq 24\pi; -10 \leq -10k \leq 20; k \in \mathbb{Z}; k = -1, 0, 1, 2.$$

$$k = -2 \rightarrow x = \frac{10}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}; 10 \arccos(\cos \frac{11\pi}{3}) = 9\pi - \frac{2\pi}{3} - \text{неверно}$$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{17}{6}\pi; 10 \arccos(\cos \frac{17\pi}{6}) = 9\pi - \frac{4\pi}{3} - \text{верно}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3}; 10 \arccos(\cos \frac{\pi}{3}) = 9\pi - \frac{7\pi}{3} - \text{верно}$$

$$k = 1 \rightarrow x = -\frac{4\pi}{3}; 10 \arccos(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = 9\pi + \frac{2\pi}{3} - \text{верно}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{17}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменим, $t = \log_{11} x$ и $n = \log_{11} 0,5y$

Итак имеем 2 ур-ия: $t^5 - \frac{16}{3t} + 5 = 0$; $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

и $n^5 + \frac{16}{3n} + 5 = 0$; $n^5 + 5n + \frac{16}{3} = 0$

тогда при $t=n$ $t^5 + 5t = -(\frac{16}{3t} + 5)$

$n^5 + t^5 + 5(n+t) = 0$

$n+t = \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = \log_{11} xy \cdot 0,5 = \log_{11} \frac{1}{2} + \log_{11} xy$

$xy = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



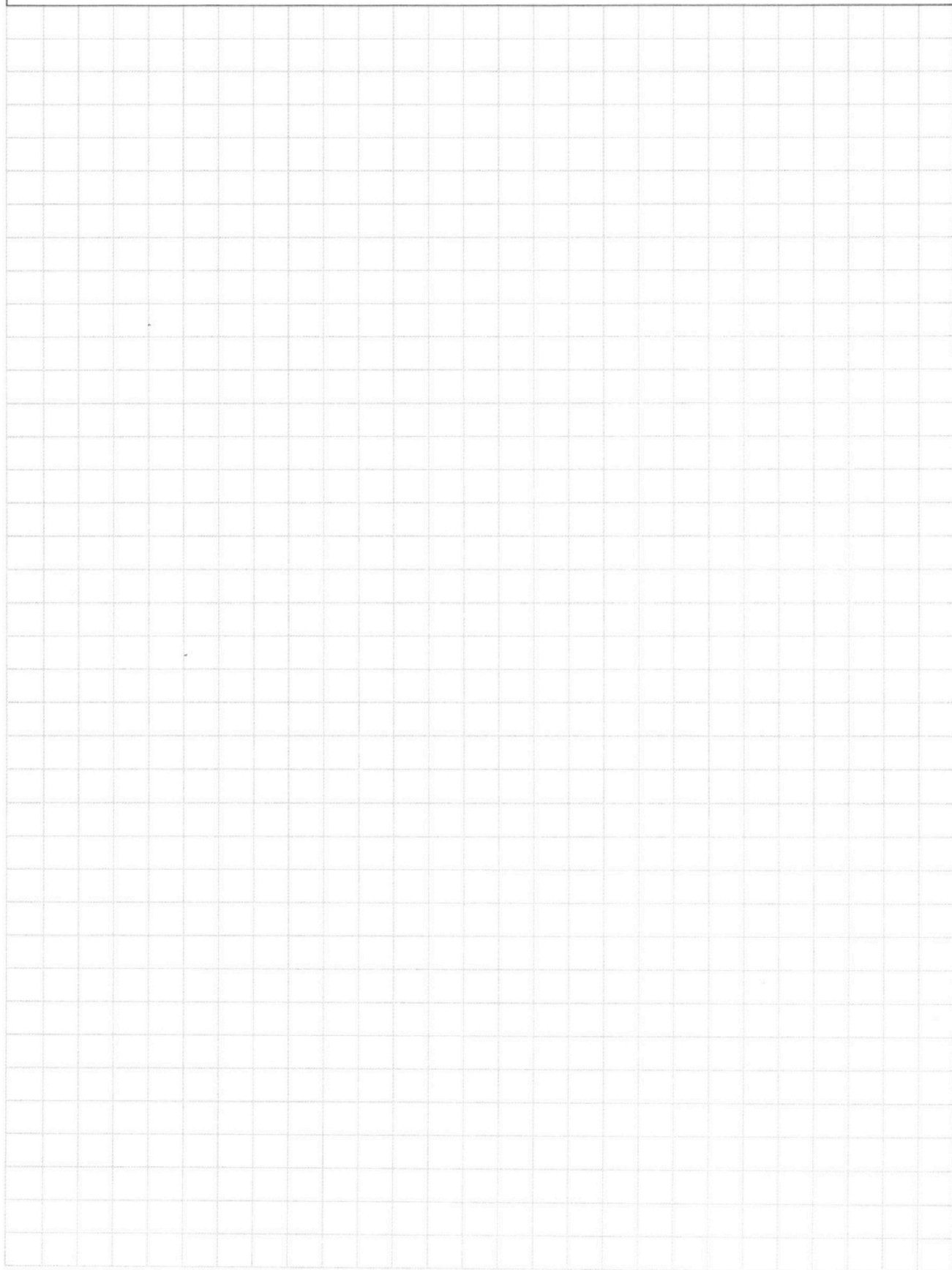
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





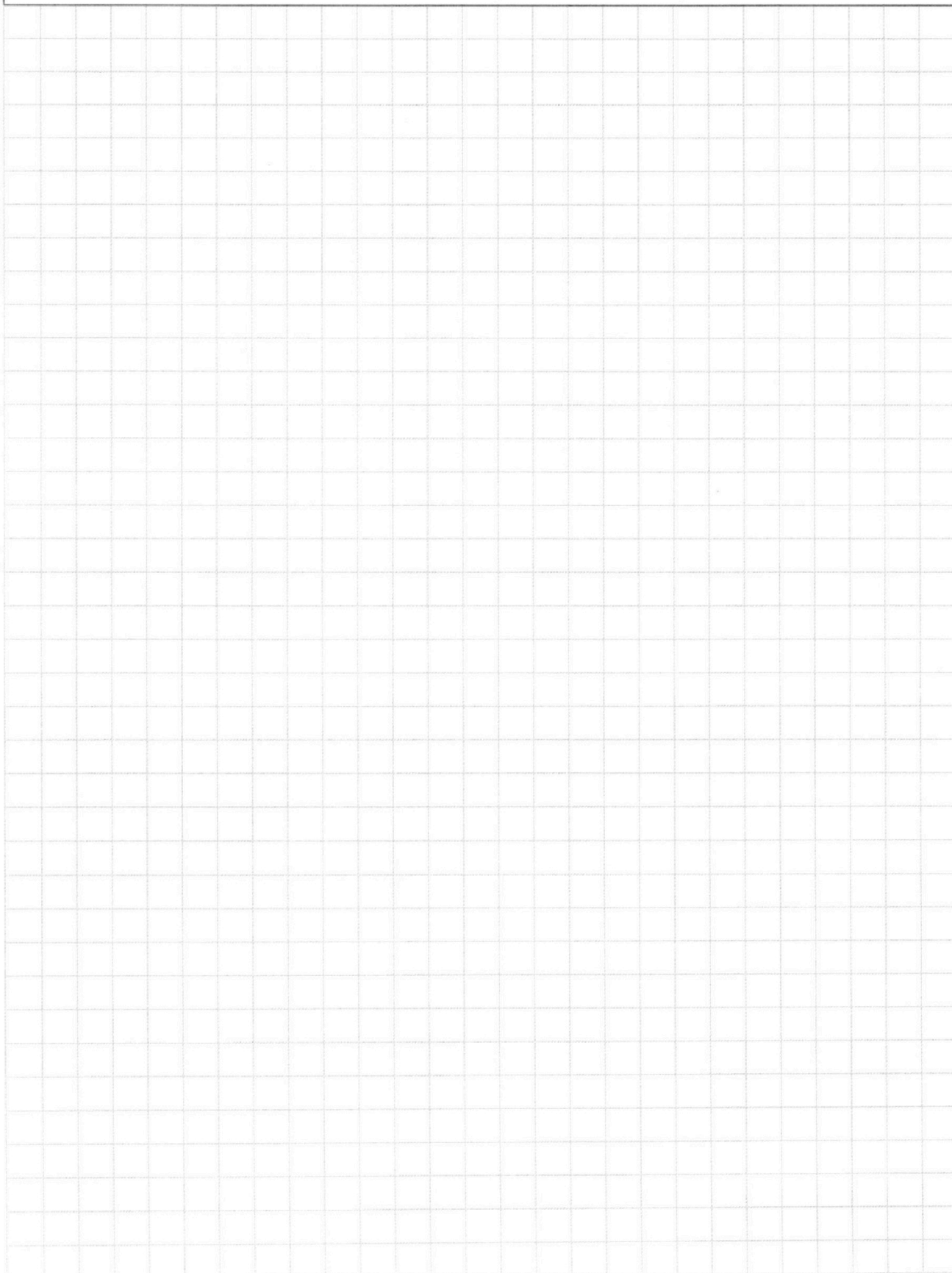
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\sqrt{3} \quad 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos 2 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow 9\pi - 2x \in [5\pi, 5\pi]$$

$$-5\pi \leq 9\pi - 2x \leq 5\pi \quad -7\pi \leq x \leq -2\pi$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}x &= 9\pi - 2x \\ -10 \leq -10k \leq 10 & \begin{cases} \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ 10(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) &= 9\pi - 2x \\ x &= 9\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi k = \pi(8,5 - 2k) \in [2\pi, 2\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+5) - \frac{16}{3} &= (x+5) + \frac{16}{3} \\ 10(-\frac{\pi}{2}x + x + 2\pi k) &= 9\pi - 2x \\ 2x &= \frac{\pi(8,5 - 2k)}{3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{5}{6a}x + \frac{6}{6a}$$

$$4 = (x+2)^2 + (y+2)^2$$

$$(2y)^2 = (2x)^2 + 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{aligned} 2y + 5y &= 9 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{7})^2 &= x^2 + 1 \\ x &= \frac{32}{49} \end{aligned}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\angle AOC = \frac{\pi}{4} \quad \arccos(\frac{4\sqrt{2}}{9}) = \angle BAO = \frac{\pi}{4}$$

$$\log_{11} x$$

$$\log_{11} 4,59$$

$$\frac{1}{6} \log_{24}$$

$$\begin{aligned} t^4 - \frac{6}{t} &= \frac{2}{3}t - 5; \quad n^4 + \frac{1}{n} = \frac{-13}{3n} - 5 \\ t^4 - \frac{16}{3t} + 5 &= 0 \\ t^5 - \frac{16}{3} + 5t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^4 + \frac{25}{3n} + 5 &= 0 \\ n^5 + \frac{16}{3} + 5n &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

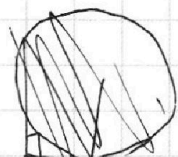
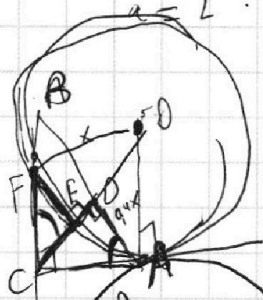
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик. №1. $ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$, $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{21}$
 $(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$; см. $bc: 3 \cdot 8 (abc)$ - целое, $b(abc)^2$ - целое.

а значит $(abc)^2: 3^{60}$; $abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, $ab: 5^{28}$, $abc: 5^{28}$

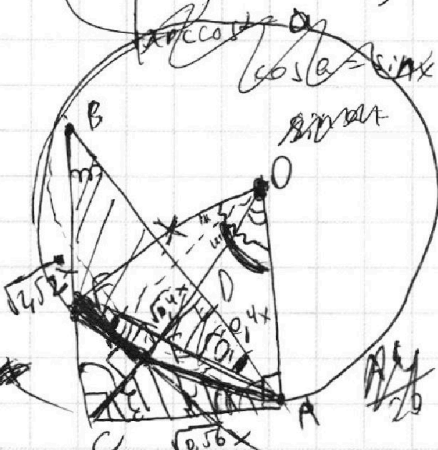
$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}; b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{20}; c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$$
$$abc = 2^{28} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



$$\frac{CD}{AD} = \frac{1.9}{0.4} = 4.75$$



$$CD = \sqrt{0.1} \cdot x$$
$$\sin \angle = CD$$

$$\frac{1.4}{0.4} = 3.5$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \cot^2 A = 1 + \frac{0.4}{0.1} = 1 + \frac{1}{0.25}$$
$$AC^2 = (0.4 + 9.6)x^2; AC = \sqrt{9.56}x$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{DE}{EC}$$
$$1.96 + 0.96 = 2.92$$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{AD}{AC} = \frac{BF}{CE}$$

$$\frac{2.92}{0.4} = 7.3$$

$$\sqrt{\frac{6.3}{0.96}} = \sqrt{\frac{9}{0.96}} = \sqrt{\frac{9}{0.96}}$$

$$CF = CE \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{1.4}{\sqrt{0.56}} \cdot BF \cdot \frac{\sqrt{3.52}}{0.4}$$

$$BF \cdot \frac{1.4}{\sqrt{0.56}}$$

$$6.3 \cdot 0.56 = 0.7^2 \cdot 4 \cdot 0.8$$

$$CF = \frac{4.2}{\sqrt{0.8}} \cdot BF$$

(F

$$CF = \frac{2.1}{0.4} \cdot \sqrt{0.8} \cdot BF = 1.5\sqrt{2.8} \cdot BF$$