



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- $a, b, c \in \mathbb{N}$; $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$; $ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$;
 $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$; $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$; $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$;
- $a_1 + b_1 \geq 9$; $b_1 + c_1 \geq 14$; $a_1 + c_1 \geq 19$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$; $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$;
 рав-во при $a_1 = 7$; $b_1 = 2$; $c_1 = 12$;
- $a_2 + b_2 \geq 10$; $b_2 + c_2 \geq 13$; $a_2 + c_2 \geq 18$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$; $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$;
 рав-во при $a_2 = 7$; $b_2 = 3$; $c_2 = 11$;
- $a_3 + b_3 \geq 10$; $b_3 + c_3 \geq 13$; $c_3 + a_3 \geq 30$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$; $a_3 + b_3 + c_3 \geq 27$;
 рав-во не достигается так как $a_3 + c_3 \geq 30$;
 тогда $a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$; рав-во при $a_3 = 15$;
 $b_3 = 0$; $c_3 = 15$;
- Тогда $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3}$;
 $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$; рав-во при $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$;
 $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$;
- Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$;

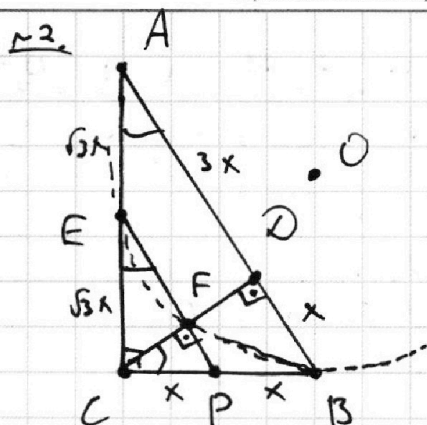
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF; AD:DB = 3:1;$$

$$\bullet \text{ Пусть } DB = x; AD = 3x;$$

$$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x;$$

$$BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x;$$

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x;$$

$$\bullet \text{ Тогда } \angle CAB = 30^\circ; EF \perp BC = P;$$

$$\angle CAB = \angle CEP = \angle BCD;$$

т.к. $AB \parallel EF$

$\bullet$ PB - касательная, тогда

$$CP = y; PB = 2x - y; FP = \frac{y}{2}; PE = 2y;$$

$$\bullet \text{ Тогда } PB^2 = PF \cdot PE; (2x - y)^2 = \frac{y}{2} \cdot 2y;$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = y^2; 4x^2 = 4xy; y = x;$$

$$\bullet EC = \sqrt{3}x; CP = x; PB = x; CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x; EF = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x;$$

$$S_{CEF} = \frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2;$$

$$S_{ABC} = 2\sqrt{3}x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2;$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3};$$

Ответ: $\frac{16}{3};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2};$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi;$$

• если $\pi < x \leq 2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x - \frac{\pi}{2};$

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; 4x = 8\pi; x = 2\pi;$$

• если $0 < x \leq \pi$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x;$

$$\frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; 2\pi = 6x; x = \frac{\pi}{3};$$

• если $-\pi < x \leq 0$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2};$

$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; 4x = -2\pi; x = -\frac{\pi}{2};$$

• если $-2\pi < x \leq -\pi$, то $\arcsin(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} - x;$

$$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; -8\pi = 6x; x = -\frac{4}{3}\pi;$$

• если $-3\pi \leq x \leq -2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{5\pi}{2};$

$$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; 4x = -12\pi; x = -3\pi;$$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi;$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

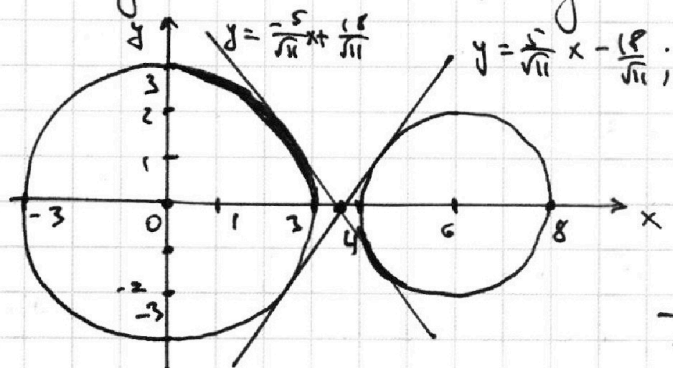


реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

т.е. при каком-то b ;

- $x^2 + y^2 = 3^2$; - оуп. с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3;
- $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$; $(x-6)^2 + y^2 = 4$; - оуп. с центром в $(6; 0)$ и радиусом 2;
- $2y = -ax + 3b$; $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$;



$$y + kx + l = 0;$$

у-ние касат.
к оуп. оуп.

условие касания:

$$\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}} = 3; \frac{|6k+l|}{\sqrt{k^2+1}} = 2;$$

- в оуп. оуп. $l > 0$; $6k+l > 0$;
 $l = 3\sqrt{k^2+1}$; $6k+l = 2\sqrt{k^2+1}$; $18k+3l = 2l$; $-l = 18k$;
 $-6k = \sqrt{k^2+1}$; $36k^2 = k^2+1$; $35k^2 = 1$; $k = \frac{1}{\sqrt{35}}$;
 но это внеш. касат.

- $6k+l < 0$; $k < 0$
 $l = 3\sqrt{k^2+1}$; $-6k-l = 2\sqrt{k^2+1}$; $-18k-3l = 2l$; $5l = -18k$;
 $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}$; $\frac{36k^2}{25} = \sqrt{k^2+1}^2$; $36k^2 = 25k^2+25$;
 $11k^2 = 25$; $k = -\frac{5}{\sqrt{11}}$; $l = -\frac{18}{5} \cdot \frac{-5}{\sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$;

- $l < 0$; $6k+l > 0$; $k > 0$;
 $-l = 3\sqrt{k^2+1}$; $6k+l = 2\sqrt{k^2+1}$; $18k+3l = -2l$;
 $18k = -5l$; $l = -\frac{18}{5}k$; $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}$;
 $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$; $l = -\frac{18}{\sqrt{11}}$;
 две касательные (внутренние);

$$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}; y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}};$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тогда $-\frac{a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}}$; $a = \frac{10}{\sqrt{11}}$; или $a = \frac{-10}{\sqrt{11}}$;
 $-\frac{a}{2} \leq \frac{-5}{\sqrt{11}}$; $a \geq \frac{10}{\sqrt{11}}$; $-\frac{a}{2} \geq \frac{10}{\sqrt{11}}$; $a \leq \frac{-10}{\sqrt{11}}$;
при касании точек пересечения
прямой с окружностью будет
два, поэтому при $a = \frac{10}{\sqrt{11}}$ или $a = \frac{-10}{\sqrt{11}}$,
какая система имеет мак-
симум 2 решения при касании.
при $a < \frac{-10}{\sqrt{11}}$ или $a > \frac{10}{\sqrt{11}}$ найдётся
такое b , что решений будет
4, то есть прямая будет пересе-
кать максимум одну окружность,
значит ≤ 2 решений;
при $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$ всегда най-
дётся такое b , что прямая
будет иметь 4 пересечения с окруж-
ностями, достаточно провести
её через точку пересечения двух
внутренних касательных; через точку
 $(3, 6; 0)$, $0 = -1,8a + \frac{3}{2}b$; $1,5b = 1,8a$;
 $b = \frac{18}{15}a$; $b = \frac{6}{5}a$; $b = 1,2a$;
при таком b будет 4 решения
системы;
Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$;

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\bullet \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 8; \quad x \neq 10; y \neq 0.5; x > 0; y > 0.5$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2.5}{\log_3 x} + 8 = 0; \quad \log_3^4 x + \frac{3.5}{\log_3 x} + 8 = 0;$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 y = \log_{25y^2} (3'') - 8;$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} - \frac{5.5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0; \quad \log_3^4 (5y) - \frac{3.5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0;$$

Заметим, если $u = \log_3 x; v = \log_3 (5y)$,

то $u^4 + \frac{3.5}{u} + 8 = 0$; если u - решение
первого ур-ния,
 $v^4 - \frac{3.5}{v} + 8 = 0$; то v - решение

u наоборот v - реш. 2-го; - $\sqrt[2]{1}$ первого;

т.к. $u \neq 0$, то $u^5 + 8u + 3.5 = 0$

и $v \neq 0$, то $v^5 + 8v - 3.5 = 0$

заметим, что эти функции строго
возрастающие $\Rightarrow$ имеют ровно 1
корень, т.к. если подставить допустимы
1000 и -1000, то будут разные знаки
у полученных значений; 0 - не
корень, функции непрерывны (без
выключений нуля), тогда ровно 1 решение.

$$\log_3 x = -\log_3 (5y); \quad \log_3 (5xy) = \log_3 1;$$

$$5xy = 1; \quad xy = \frac{1}{5}; \quad xy = 0.2;$$

Ответ: 0,2;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $O(0;0); P(-14;42); Q(6;42); R(20;0);$
 $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33; (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33;$

- заменим, что на прямой вида $y = -3x + b$, где $b \in \mathbb{Z}$ значение функции $F(x,y) = 3x + y$, постоянно;
 $y + 3a = -3(x-1) + b; 3(x-1) + y + 3a = 3x + y;$
 - тогда $f(x_2; y_2) - f(x_1; y_1) = 33;$
всего таких прямых в нашем параллелограмме 61, достигаются все значения от 0 до 60;
 - тогда A может быть с прямой, где $f(x,y) = 0$, проинтерпретируем прямые от 0 до 60;
 $A < 0; B < 33; A < 27; B < 60;$
 $A < 1; B < 34; \dots$
- на прямой, той номер; 3 всего 15 подводящих точек с целыми координатами, на остальных лишь 14;
тогда всего способов выбрать A и B
 $10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2 = 5778;$
(т.к. можно взять любую точку на первой прямой и любую на другой)
Ответ: 5778;



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$AS = BC = 12; SA + BC = 90;$$

а) рассмотрим сечение $SA A_1$;

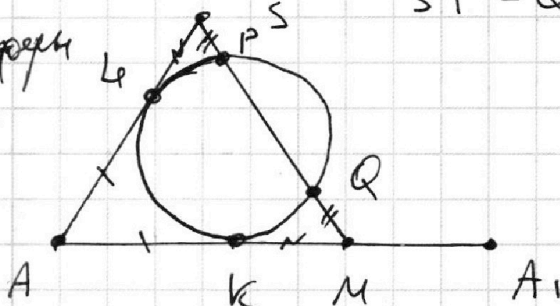
$$SP = QM;$$

ω - окружность - сечение сферы

ω касается AS в L;

ω касается AM в K;

тогда $AL = AK$
(как отрезки касательных)



$$\begin{aligned} \bullet MK - \text{касательная} &\Rightarrow MK^2 = MQ \cdot MP; \\ SL - \text{касательная} &\Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ; \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MK = SL \Rightarrow AM = SA = 12; \text{ тогда } AA_1 = 18;$$

$$\bullet BC = 12; AH = h_a = \frac{S_{ABC}}{BC} \cdot 2 = \frac{180}{12} = 15; AH - \text{высота } \triangle ABC;$$

$$\sqrt{AA_1^2 - AH^2} = A_1H = 3\sqrt{36 - 25} = 3\sqrt{11};$$

$$\text{и наружная длина } BH = 6 + 3\sqrt{11}; CH = 6 - 3\sqrt{11};$$

$$AB^2 = 15^2 + (6 + 3\sqrt{11})^2; m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2};$$

$$AC^2 = 15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2;$$

$$m_c = \frac{\sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 - 36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 - 36\sqrt{11}}}{2};$$

$$= \frac{\sqrt{1008 - 108\sqrt{11} - 15^2 - 135}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2};$$

$$m_b = \frac{\sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 + 36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 + 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 + 108\sqrt{11}}}{2};$$

$$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11} = \sqrt{162^2 - 27^2 \cdot 11} =$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 81^2 - 27^2 \cdot 11} = \sqrt{2^2 \cdot 3^8 - 3^4 \cdot 11} = 3^3 \sqrt{36 - 11} =$$

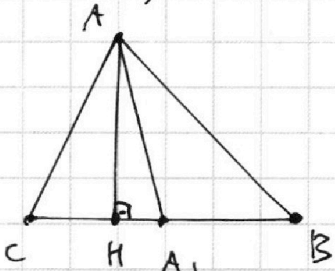
$$= 3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135;$$

$$\bullet AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 135 \cdot 18 = 2430;$$

б) Ω касается BC в точке N; $SN = 4$;

$$R = 5; SN = r; O - \text{центр } \Omega; ON = 5, SO = \sqrt{41};$$

• так как $AS = AM$, то точки S и M рав-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

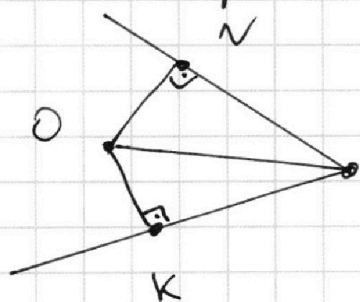
концами, относительно $O \rightarrow$

$$\Rightarrow OK = 5; OM = OS = \sqrt{41}; KM = 4;$$

$$AK = 12 - 4 = 8;$$

Тогда $KH' = 15 \cdot \frac{10}{18} = \frac{15 \cdot 5}{8} = \frac{25}{3};$
 KH' — ~~перпендикул.~~ на BC ;

• рассмотрим сечение $\triangle NKH'$:



$$ON = OK = 5;$$

$$KH' = \frac{25}{3} = H'N \text{ (как осн. касат.)}$$

$$\sin \angle OH'N = \frac{8}{\frac{5}{3} \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}};$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha;$$

$$\cos \angle KH'N = 1 - 2 \cdot \frac{9}{34} = \frac{34 - 18}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17};$$

$$\angle KH'N = \arccos \frac{8}{17};$$

Ответ: а) 2430 ; б) $\arccos \frac{8}{17}$;



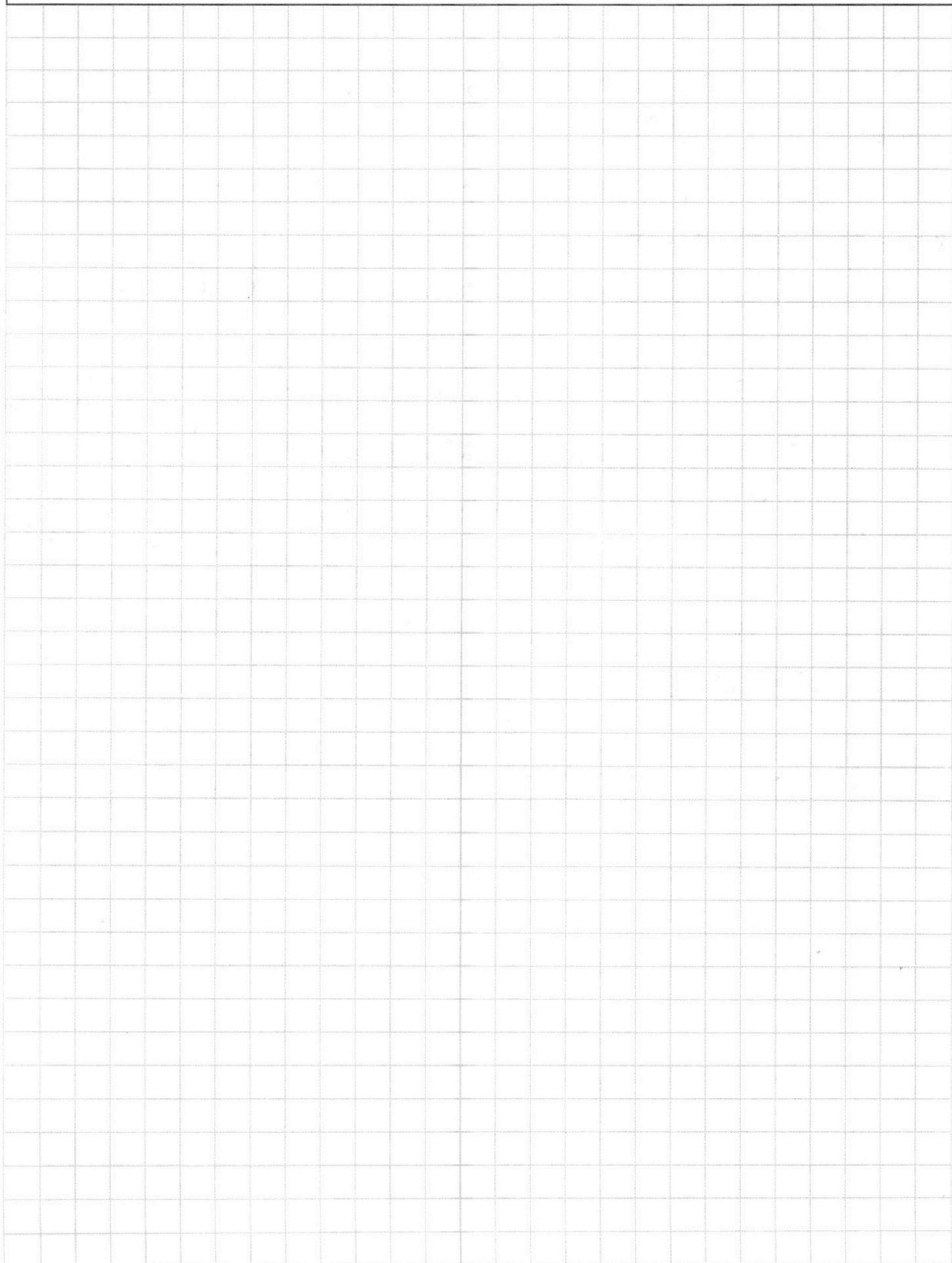
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



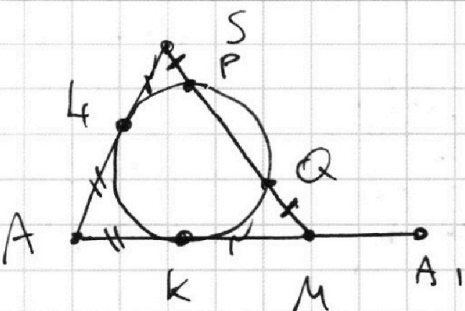
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

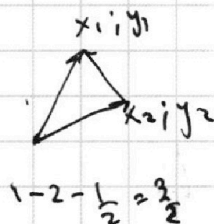
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

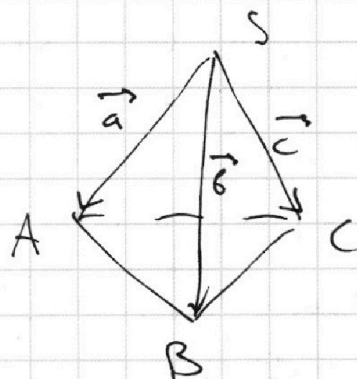


$$S_{ABC} = 90; \quad SA = BC = 12;$$



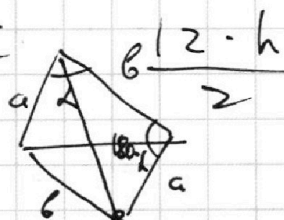
$$(1; 2); (2; 1)$$

$$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{4 - 1} = \frac{3}{2};$$



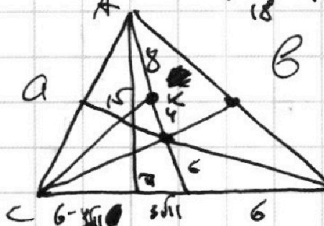
$$|\vec{a}| = 12; \quad \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$|\vec{c} - \vec{b}| = 12;$$



$$\frac{b \cdot 12 \cdot h}{2} = 90$$

$$h = 15; \quad \frac{10}{18} \cdot 15 = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}; \quad AS = AM = 12;$$



$$AA_c = 18;$$

$$SK^2 = SP \cdot SQ; \quad KM^2 = MQ \cdot MP; \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2; \quad a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = m^2; \quad 2(a^2 + b^2) = c^2 + m^2$$

$$m = 36; \quad c = 12; \quad 2(a^2 + b^2) = 12^2 (1 + 3^2)$$

$$a^2 = 15^2 + 36 - 36\sqrt{11} + 99 = 360 - 36\sqrt{11}; \quad b^2 = 15^2 + 36 + 36\sqrt{11} + 99 = 360 + 36\sqrt{11}$$

$$m_c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \sqrt{720 - 72\sqrt{11} + 2 \cdot 12^2 - 360 - 36\sqrt{11}}$$

$$\frac{135}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}; \quad m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11}$$

$$(2m)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2); \quad m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

$$m_c = \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11}; \quad 9 \cdot 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 16 - 11}$$

$$108 \overline{) 648} \quad 6 \overline{) 144} \quad 12 \overline{) 720} \quad 12 \overline{) 1440} \quad 12 \overline{) 1440} \quad 12 \overline{) 1440}$$

324

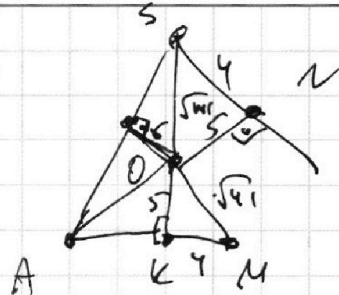
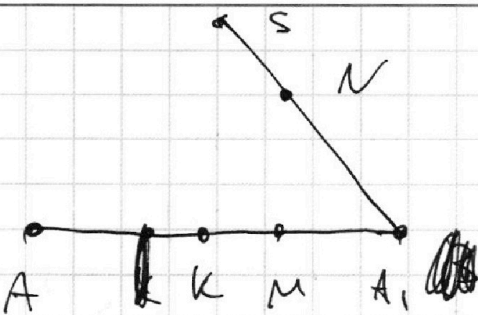
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

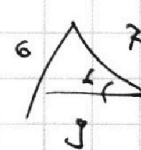
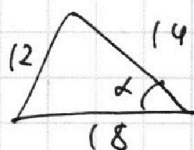
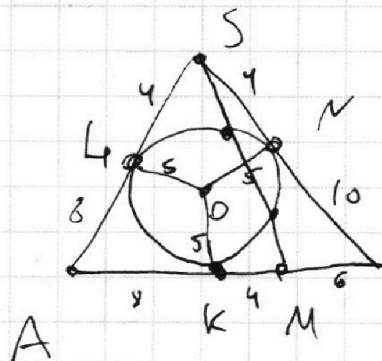
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16 + 25 = 41$$

$$MO = SO = \sqrt{41};$$

$$KM = 4;$$



$$50 + 80$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ - 80 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$36 = 19 + 81 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{57}{69};$$

$$\cos \alpha = \frac{19}{21};$$

$$\cos \alpha = \frac{19}{21};$$

$$5 \frac{25}{3} \rightarrow 1 \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \rightarrow 3 \frac{5}{3}$$

$$\frac{5 \cdot \sqrt{34}}{3}$$

$$\left(\frac{50}{\sqrt{34}} \right)^2 =$$

$$\frac{5}{\sqrt{11}} x - \frac{18}{\sqrt{11}} = y \quad 5 \sqrt{1 + \frac{25}{9}} = h = \frac{\frac{125}{3}}{\frac{5 \cdot \sqrt{34}}{3}} = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11} = 9$$

$$y^2 = (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11}$$

$$11x^2 + 25x^2 - 180x + 18^2 = 99$$

$$36x^2 - 180x + 18^2 = (6x - 15)^2 = 0 \quad x = \frac{5}{2}$$

$$18^2 = 324$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ - 89 \\ \hline 235 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad a, b : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$a_2 + b_2 \geq 10$$

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 13$$

$$b_3 + c_3 \geq 13$$

$$a_1 + c_1 \geq 19$$

$$a_2 + c_2 \geq 18$$

$$a_3 + c_3 \geq 30$$

$$2 + 7 \geq 9$$

$$2 + 12 \geq 14$$

$$2 + 12 \geq 19$$

$$2 + 7 + 12 = 21$$

$$9 + 13 + 14 = 28 + 14 = 42$$

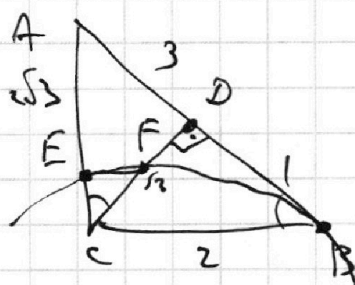
$$21 =$$

$$ax + by + c = 0$$

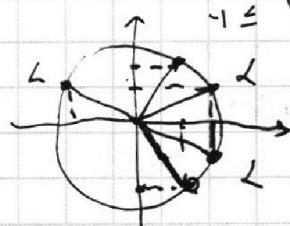
$$(ax + by + c) \sqrt{a^2 + b^2} =$$

$$10 + 13 = 23$$

$$\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{3}; \quad \frac{\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{8\sqrt{3}}{5}; \quad \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}; \quad \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

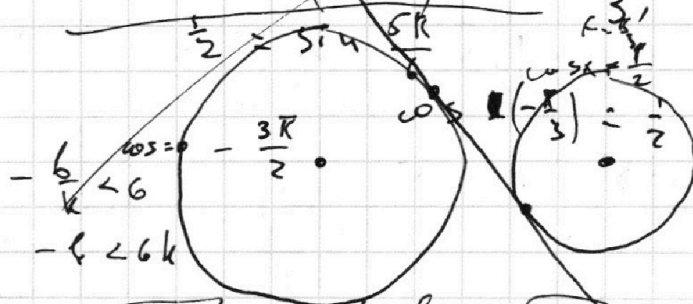
$$-\frac{\pi}{6} \leq \frac{x}{2} - \frac{2\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{6} + 10\pi$$

$$\cos x = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - x$$

$$y = kx + b$$

$$y - kx - b = 0$$

$$\frac{y - b}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

$$b = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

$$-6k - b = 2\sqrt{k^2 + 1}$$

$$-18k - 3b = 2b$$

$$5b = -18k$$

$$b = -\frac{18}{5}k$$

$$-3.6k = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

$$\frac{6}{5}k = \sqrt{k^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\log_3 x + 6 \log x 3 = \log x^2 243 - 8$$

$$\log_2 4 = \log_2 4 \cdot 2$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log x 3 - 8$$

$$t - 2,5 = 3,5$$

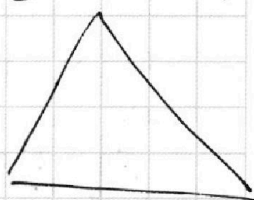
$$t = \log_3 x; \quad t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0; \quad [t]$$

$$\log_2^4 (xy) + 2 \log_2 y 3 = \log_2 25 y^2 3'' - 8$$

$$2 - 5,5 = -3,5$$

$$2 \log_2 y 3 = \frac{11}{2} \cdot \log_2 y 3 - 8$$

$$v = \log_2 y; \quad v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0 \quad [-v]$$



$$\log_3 x = -\log_3 5y; \quad \log_3^2 5xy = 0$$

$$x^5 + 8x + 3,5 = 0$$

$$xy = \frac{2,2}{\log_3 1}$$

$$2x^5 + 16x + 7 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

$$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5;$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

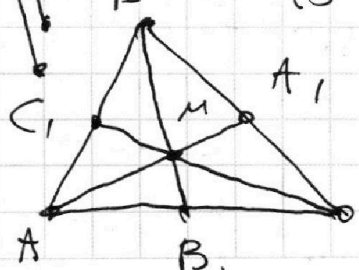
$$(y_2 + 3x_2) - (y_1 + 3x_1) = 33; \quad 60 - x = 33 \quad x < 60 - 33 \quad 27$$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ + 3528 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 50 \\ 1474 \\ \times 196 \\ 18 \\ \hline 1568 \\ + 196 \\ \hline 3528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 20 \\ \hline 420 \end{array}$$

$$15 \cdot 20 + 40 \cdot 14 = 560 + 560 = 1120$$



$$9(10 \cdot 25 + 2 \cdot 14^2)$$

$$\begin{array}{r} \times 642 \\ 9 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 392 \\ 250 \\ \hline 642 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ \times 14 \\ 18 \\ 196 \\ 21 \cdot 15 \\ 2 \\ + \\ 352 \end{array}$$