



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad \text{т.е. } ab = k \cdot 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad \text{т.е. } bc = t \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{15} 3^{18} 5^{30} \quad \text{т.е. } ac = p \cdot 2^{15} 3^{18} 5^{30}$$

Тогда можно записать следующие системы неравенств.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 & (5) \\ a_2 + c_2 \geq 19 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} b_3 + a_3 \geq 10 & (2) \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 & (3) \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

где  $a_i; b_i; c_i$  - это степень  $i$  которая входит

в  $a, b$ , или  $c$  соответственно.

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N} \quad \text{то } a_i; b_i; c_i \geq 0 \text{ и } i \in \mathbb{Z}.$$

$$\cancel{b_2 \geq 2, \quad c_2 - b_2 \geq 10.}$$

$$\cancel{c_3 - a_3 \geq 3.}$$

$$\cancel{2c_2 \geq 24}$$

$$\cancel{2c_3 \geq 21}$$

мин решаем

этих нерав.

$$(a_2, b_2, c_2) =$$

$$a_2 \geq 7$$

$$\cancel{c_3 \geq 10,5}$$

т.е. мин  $c_3$  может быть равно 1

$$\cancel{b_3 \geq 2,5}$$

$$\cancel{a_3 \geq 7,5}$$

$$(7; 2; 12)$$

$$b_2 \geq 2$$

(2) можно из нерав.

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$\text{т.к. } a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$$

$$\text{запишем то } (a_3; b_3; c_3) =$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

$$\text{мин значение } a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$$= (7, 3, 11)$$

логично.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ можно 3 нерав.:

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 26,5$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 13,25$$

$$\text{т.е. } a_5 + b_5 + c_5 \geq 13$$

$$\text{т.е. } a_5 + b_5 + c_5 \geq 13$$

Заметим, что одну из

$$(a_5; b_5; c_5) =$$

$$(10; 0; 20)$$

однако заметим, что есть такое нерав.

$$a_5 + c_5 \geq 30 \quad \text{т.к. все в целых числах. (можн.)}$$

то можно сразу ограничить, что  $a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$  и мин. значение равно 30.

② можно 3 нерав.:

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\text{мин значение } 21 \text{ при } (a_2; b_2; c_2) = (7; 7; 12)$$

$$\text{тогда } abc = 2^{7+7+12} \cdot 3^{10+10+20} \cdot 5^{7+3+11} = 2^{26} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

и.н. жм.

или мин жм.  $a_i \neq b_i \neq c_i$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$



|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



№ 2

Дано:

$\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )

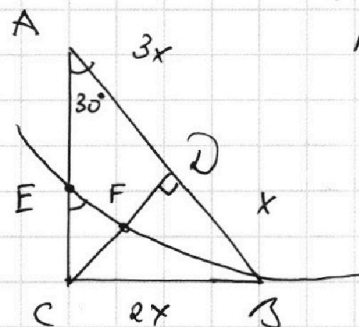
$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{3}{1}$$

$CD$  - высота.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

Решение:



из теоремы о отрезках  
в треугольнике  $\triangle$   
 $ACB$  и высоте  $CD$ :

$$AC = \sqrt{AD \cdot AB} =$$

$$2x\sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{CD \cdot CA} =$$

$$2x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} =$$

$$x\sqrt{3}$$

$$\text{Пусть } DB = x \Rightarrow AD = 3x \Rightarrow AB = 4x$$

заменим, что  $2CB = AB \Rightarrow$  в т.  $\triangle ABC$

$$\angle CAB = 30^\circ \text{ и } \angle CBA = 60^\circ$$

т.к.  $EC \parallel AB$  и  $4x$ -мк  $AEFB$  вписан в  $\square$ .  
и  $AE \parallel FB$

и  $AB \parallel EF$   $AEFB$  - трапеция, которая равнобедренная.

тогда  $\angle EAB = \angle FBA = 30^\circ \Rightarrow FB$  - биссектр.

$$\angle CBD \quad (\angle CBD = 60^\circ \quad \angle FBD = \frac{1}{2} \angle CBD = 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{FD}{DB} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{CB}{DB} = \frac{2}{1} \quad CF = 2FD.$$

$$FD = \frac{CF}{2}$$

т.к.  $FE \parallel AB$  то.

$$\angle EFL = \angle ADC = 90^\circ = \angle ACB.$$

$$\angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \left(\frac{2x\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 3$$

$$FD + CF = x\sqrt{3}.$$

$$\frac{3}{2}CF = x\sqrt{3}.$$

$$CF = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: 3.





|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

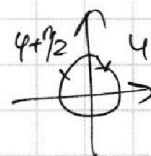
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \pi/2. \quad \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\leq \frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} &\leq \frac{2\pi}{5} & x &\leq 2\pi \\ \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\geq -\frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} &\geq -\frac{3\pi}{5} & x &\geq -3\pi. \end{aligned}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi a = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi a \\ x = -\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi b = -\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi b \end{cases}$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi a, \quad \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2\pi b,$$

$$4x = -2\pi + 10\pi a, \quad a \in \mathbb{Z} \quad 6x = 2\pi + 10\pi b, \quad b \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a, \quad 2) \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b,$$

$$1) \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \leq 2\pi. \quad -\frac{5\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \geq -\frac{3\pi}{5} \quad 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\frac{5}{2}a \leq 2,5$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi a \geq -3\pi.$$

$$5a \leq 5$$

$$a \leq 1$$

$$\frac{5}{2}a \geq -2,5.$$

$$a \in \{-1; 0; 1\}$$

$$a \geq -1$$

$$\text{т.е. } b \in \{-1; 0; 1\}$$

$$2) \quad \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b \leq 2\pi$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi b \geq -3\pi$$

$$1 + 5b \leq 6$$

$$1 + 5b \geq -9. \quad b \geq -\frac{8}{5}$$

$$5b \leq 5 \quad b \leq 1$$

$$5b \geq -8$$

$$b \geq -1,6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{тогда } x = -\frac{n}{2} - \frac{5}{2}n = -\frac{6n}{2} = -3n.$$

$$x = -\frac{n}{2}.$$

$$x = -\frac{n}{2} + \frac{5}{2}n = 2n.$$

$$x = \frac{n}{3} + \frac{5n}{3} = 2n$$

$$x = \frac{n}{3} - \frac{5n}{3} = -\frac{4n}{3}$$

$$x = \frac{n}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ -3n; -\frac{4n}{3}; -\frac{n}{2}; \frac{n}{3}; 2n \right\}$$



|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \text{— окружность с центром в } (0; 0) \text{ и радиусом } 3. \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \text{— окружность с центром в } (6; 0) \text{ и радиусом } 2.$$

$$(1) 2y = 3b - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$$

Также заметим, что параметр  $b$  отвечает за

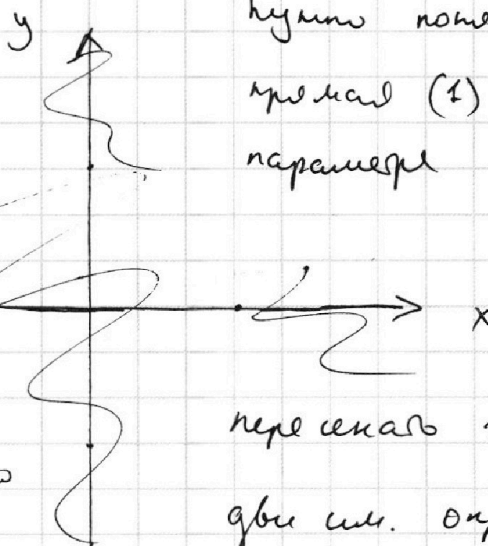
угловую

принадлежность

от оси абсцисс

(вплоть до значения  $0$ ) и т.д.

$b$  — произвольный параметр, угловую можно считать  $0$ ;  $a$  — задает наклон прямой.



линию поворота тогда

прямая (1) при любом параметре  $b$  не будет

пересекать в 4х точках

двух или окружностей.

(прямая (около) поворота может пересекать макс в 2х точках)



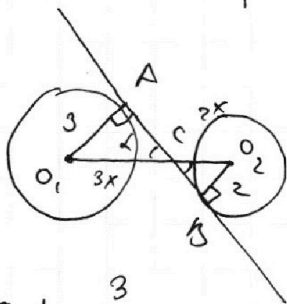
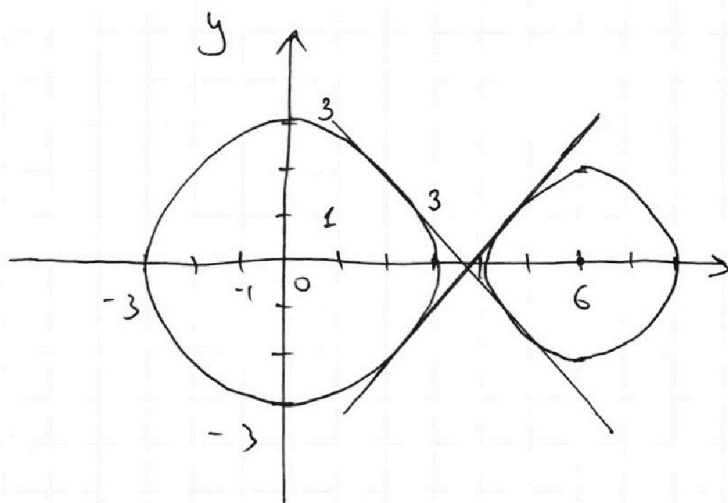
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\lg 2 = \frac{3}{AC}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{18}{r}\right)^2 - 9} = \frac{3}{5}\sqrt{11}$$

$$\lg 2 = \frac{35}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{т.е. } \frac{-a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}} \quad (\text{ориз. касан.})$$

$$a = \frac{+10}{\sqrt{11}}$$

Всегда где  $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$

т.е. наименьший радиус не может быть любым. б. где вех остальных значений а можно найти. <sup>тогда</sup> б, т.е. прямая будет пересекать две окр. в двух точках касания. т.е. Ответ:

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Заметим что  
касательные  
к окружностям  
(общая выпр.)  
и общая окр.

перпендикулярна  
кас. выпр. она  
будет касаться окр. окр.  
в двух точках и выпр.  
не перес. выпр. не перес.

далее если мы  
будем уб.  $\angle$  касан.  
прямой (меньший  
 $\angle$ ) то выпр.  
будет аналогичной  
окр. и касается вех  
точек, выпр.  
не выпр.

и аналогично где выпр.  
касательная

$$a = -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = -8.$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8. \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = -8.$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3 - 8$$

$$5y > 0 \quad y > 0$$

$$5y \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = -8.$$

$$\log_3^4 (5y) - 3,5 \log_{5y} 3 = -8. \quad \log_3^4 5y - \frac{3,5}{\log_3 5y} = -8$$

Рассмотрим выражение

$$\log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 t} = -8. \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \quad \log_3^4 t + \frac{3,5}{-\log_3 t} = \log_3^4 t + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}} \quad \textcircled{2}$$

$$\log_3^4 \frac{1}{5y} + \frac{3,5}{\log_3 5y} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{5y} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{5y}} = \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} \quad \text{т.е.} \quad \log_3^4 t - \frac{3,5}{\log_3 t} = \log_3^4 \frac{1}{t} + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{t}}.$$

$$\log_3^4 \frac{1}{5xy} + 3,5 \left( \frac{\log_3 x 5y}{\log_3 \frac{1}{5y} \log_3 x} \right) = 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 5xy + \frac{3,5 \log_3 5xy}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} = 0.$$

$$\log_3 5xy \left( \log_3^3 5xy + \frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x} \right) = 0.$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}.$$

$$\log_3^3 5xy = -\frac{3,5}{\log_3 \frac{1}{xy} \log_3 x}$$

$$(\log_3 5xy + \log_3 5x)^3 \log_3 xy \log_3 x = 3,5.$$

$$(a+b)^3 = \frac{3,5}{ab}.$$

$$\text{Order: } \frac{1}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

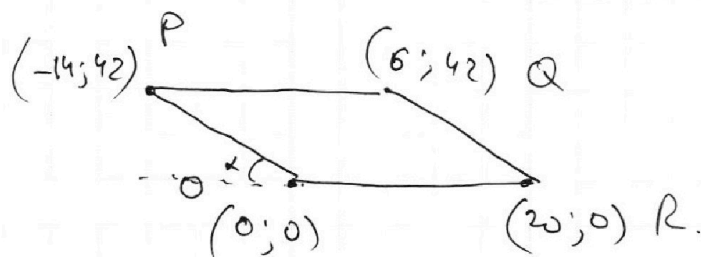
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.6



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$k_{PQ} = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3$$

т.е. прямая PQ имеет вид  $y = 3x$

$$PQ: y = 42$$

$$OR: y = 0$$

$$QR: y = -3x + 60$$

$$0 = -60 + 60$$

$$60 = 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 3\Delta x + \Delta y = 33$$

§

$$\Delta y = 33 - 3\Delta x$$

$$\Delta y_{\max} = 42 - 0 = 42$$

$$\Delta y_{\min} = 0 - 42 = -42$$

$$\Delta x_{\max} = 20 - 0 = 20$$

$$\Delta x_{\min} = 0 - 20 = -20$$

$$33 + 60 = 93$$

$$33 - 3\Delta x = 42$$

$$-9 = 3\Delta x$$

$$\Delta x = -3$$

$$33 + 6 = 39$$

$$33 - 3\Delta x = -42$$

$$75 = 3\Delta x$$

$$\Delta x = 25$$

$$\frac{42}{-33} \div 3$$

$$\frac{-60}{-27}$$

возрастает

т.е. все вар. 24. Ответ: 24.

| $\Delta x$ | $\Delta y$ |
|------------|------------|
| -20        | 93         |
| -19        | ...        |

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| -3  | ... | 42  |
| -2  | ... | 39  |
| -1  | ... | 36  |
| 0   | ... | 33  |
| 1   | ... | 30  |
| 2   | ... | 27  |
| 3   | ... | 24  |
| ... | ... | ... |
| 20  | ... | -21 |

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

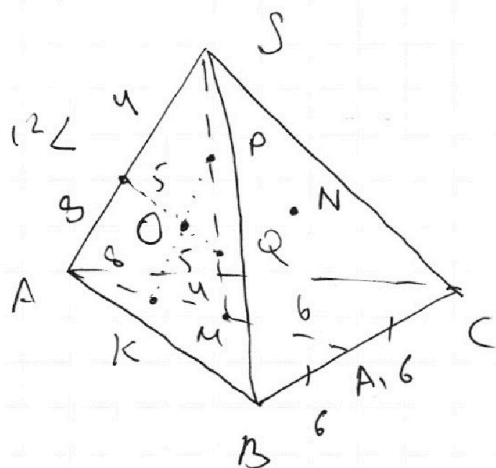
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

57



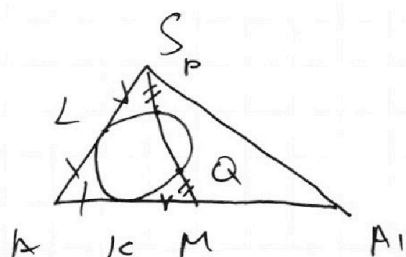
$$SQ = PM$$

$$SP = HQ \quad (\text{не varies с } \alpha)$$

располож. от. гр. гр. и  
P и Q не имеют веса  
судит равна)

$$S_{\text{ABC}} = 90^\circ$$

$$SA = BC = 12$$



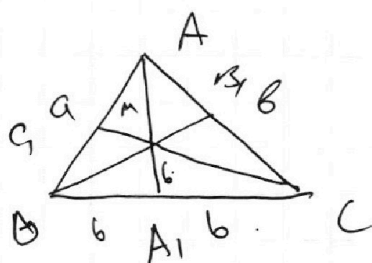
$$AL = A|c - \text{определ. нас. к } W$$

$$SL = \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{MQ \cdot MP} = 1 \text{ cm}$$

∴ SA = AM = 12

$$AM = \sum AA_i$$

$$12 = \frac{2}{3} AA_1, \quad AA_1 = 18$$



Пусть  $AB = a$   $AC = b$ .

$$\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - 12^2}{4}} = 18.$$

$$2a^2 + 2b^2 - 144 = 324.48$$

$$2a^2 + 2b^2 = 1440 \quad 1796.$$

$$a^2 + b^2 = 720$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 8 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$C_G = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 26^2 - a^2}{4}}$$

$$B B_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 144 + 2a^2 - b^2}{4}}$$

~~$$AA_4 \cdot BB_4 \cdot CC_4 = \frac{18}{4} \sqrt{288 + 2a}$$~~

Задача 2. В  $\triangle ABC$  - равнобедрен,  $M$   $A_1$ -медиана.  $\angle BMC = 6^\circ$ .

1.  $\angle BMC = 90^\circ$  maka  $BM \cdot MC = \frac{1}{3} S_{ABCD} = 30$ .

(из того что в М; мен АМ-мн.  
а мн. генет  $S_{\Delta}$  на  $\frac{1}{2}$ )

$$B_M = \frac{2}{3} B B_1$$

$$MC = \frac{2}{3} C_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} BB_1 CC_1 = 30 \quad | \cdot AA_1$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{15}{30} \cdot \frac{9}{18} \cdot 9 = 1215$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 15 \\ \hline 405 \\ + 81 \\ \hline 1215 \end{array}$$

SN кас. W  
и SL кас. W (сечение сферы  
многоугольником SNL)

так как SN = SL = 4.  $\Rightarrow \angle A = 8$

AH - высота в  $\triangle ABC$ .

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} \quad AH = 15$$

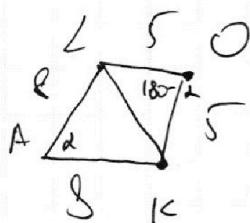
$$\frac{AH \cdot 18}{2} = 90$$

нужно найти  
высоту у т. S в  $\triangle$   
SAC.

Аналог.

по с. кос:

$$25 + 25 + \cos 2 \cdot 25 \cdot 2 = 64 + 64 - 2 \cdot 64 \cos \alpha$$



$$\begin{array}{r} 128 \\ + 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ - 80 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \cdot 2 \\ 36 \cdot 2 \\ 18 \\ \hline 192 \cdot 2 \\ 36 \cdot 2 \\ 48 \cdot 2 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$192 \cos \alpha = 78$$

$$\cos \alpha = \frac{78}{192} = \frac{13}{32}$$

таким образом по с. кос найдем

$$ASA_1: 12^2 + 18^2 - 12 \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{13}{32} = SA_1^2 = 231$$

$$SA_1 = \sqrt{231}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 144 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 18 \\ \hline 96 \\ + 216 \\ \hline 216 \\ + 1212 \\ \hline 216 \\ + 1212 \\ \hline 216 \\ + 1212 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 3 \\ \hline 87 \\ + 237 \\ \hline 237 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 468 \\ - 237 \\ \hline 231 \end{array}$$

Ответ:  $\Rightarrow 1215$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Черновик.

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

$$243 \angle 81$$

$$\frac{81}{243}$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_3^4 x$$

$$8 = \frac{5 \log_3 3}{\log_3 3} + \frac{5 \log_3 3}{\log_3 3}$$

$$8 = \frac{5 \log_3 3}{\log_3 3} - \frac{5 \log_3 3}{\log_3 3}$$

$$\log_3^4 t + 3,5 \log_t 3 = -8$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3$$

$$= \frac{8}{t} = 8x$$

$$t^4 + 3,5 \frac{1}{t} + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x \log$$

$$\frac{7}{11}$$

$$t^4 - \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$

$$\log_x 2 = 3^{12-5} = \log_x 3^7$$

$$\log_{25} 2^3 = \log_{25} 3^7$$

$$24 \quad 36 \quad 36 \quad 24$$

$$\log_{x^2}$$

$$\frac{5 \log_3 3}{\log_3 3}$$

$$\log_3^4 x y + 3,5 \log_x 3 - 3,5 \log_{xy} 3 = -16$$

$$t^4 + \frac{3,5}{t} = -8$$

$$3,5 (\log_x 3 - \log_{xy} 3) =$$

$$\frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 xy}$$

$$\log_3 xy - \log_3 x$$

$$\log_3 x \log_3 xy$$

$$\log_3 x = -\log_3 xy$$

$$xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{x}$$

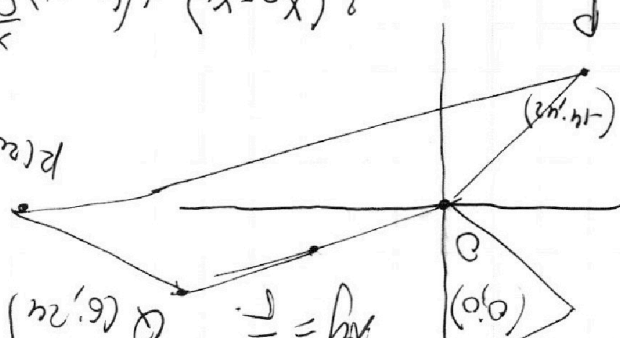
$$\log_3 \frac{xy}{x} = \log_3 (xy - 1) + (x - 2x) 8$$

$$P(0,0)$$

$$Q(0,24)$$

$$\log_3^4 x - \frac{3,5}{x}$$

$$x = \frac{xy}{1}$$







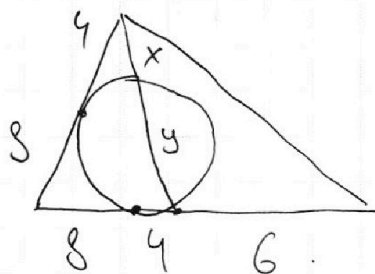
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

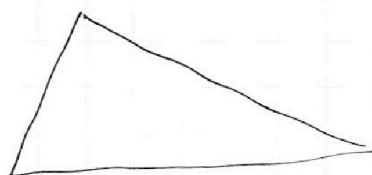
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 = x(x+y)$$

Черновик



$$\frac{64}{2}$$

$$128 - x \cdot 64 \cdot 2 = 25 + 2 \cdot 25x$$

$$103 = 104x$$

$$x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

черновик

$$\begin{array}{r} 243 \text{ } \overline{) 18} \\ 27 \end{array}$$

3<sup>5</sup>

$$\log_3^4 x + \log_x 3 = -8$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$\log_3^4 x + \log_3 x = -1$$

$$t^4 + \frac{1}{t} = -8$$

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

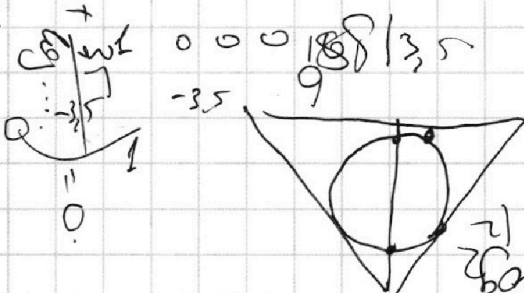
$$\begin{array}{r} 60 \\ \overline{) 25} \\ 3,5 \end{array}$$

$$\log t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0$$

$$t^5 + 3,5t + 8t = 0$$

$$2t^5 + 7 + 16t$$

$$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0$$



$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = \log_3^4 5y = 3,5 \log_{5y} 3$$

$$\frac{11}{2} \cdot 5,5$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -1,5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -1,5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$-8 - 3,5 \log_{5y} 3 + 8 - 5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 5y - 9 = -16 - 3,5 \log_{5y} 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



$$5 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sinh^2 x}$$

$$ax + 2y - 3b = 0. \quad 2y = -ax + 3b.$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

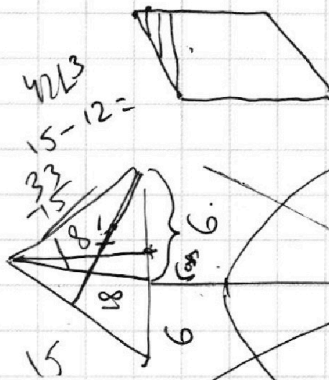
$$(x-6)^2 + y^2 = 4.$$

$$x^2 + 36 - y \cdot 6x = 36x$$

$$144 + x^2 - y \cdot 12x =$$

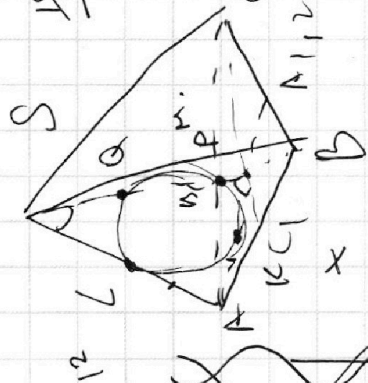
$$\log_3 \frac{1}{5xy} + 3.5$$

$$\frac{\log_3 4}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 3} = \frac{4}{3}$$

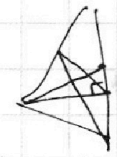


$$y = -\frac{a}{2}x + 15b.$$

$$\frac{18 \cdot 12}{2}$$



$$x = \frac{a}{k} + \frac{a}{10} - \frac{a}{10} = \frac{a}{k}$$



$$x = \frac{a}{k} + \frac{a}{10} - \frac{a}{10} = \frac{a}{k}$$

$$\sin \left( \frac{1}{k} \left( x + \frac{2}{10} \right) \right) \left( \frac{1}{k} + \frac{2}{10} \right) = \frac{1}{k} + \frac{2}{10}$$

$$\sin \left( \frac{1}{k} \left( x + \frac{2}{10} \right) \right) \left( \frac{1}{k} + \frac{2}{10} \right) = \frac{1}{k} + \frac{2}{10}$$

$$\cos x = \sin \left( \frac{1}{k} + \frac{2}{10} \right)$$

$$\sin(5\varphi) = \cos(x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6
 ☐ 7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$$a^b : 2^9 3^{10} 5^{10} \quad a+b+c \geq 21$$

$$b^c : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad 21$$

$$a^c : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$a^b = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$b^c = d \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$a^c = t \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k \cdot d \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{25} \sqrt{ktd \cdot 3 \cdot 5}$$

$$41 \quad 3 \cdot 3 \quad ab \quad 3 \cdot 5$$

bc

ac

$$2^9 3^{10} 5^{10} \quad a^b$$

$$2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad a^c$$

$$a+b=9$$

$$a+b=10$$

$$a+c=15$$

$$a+c=18$$

$$b+c=14$$

$$b+c=14$$

$$10 = a+b$$

$$30 = a+c$$

$$14 = b+c$$

$$16 = a-b$$

$$2a = 26 \quad a = 13$$

$$14 = a-b$$

$$a-b=10$$

$$a=10, b=0, c=20$$

$$b=3$$

$$a=7$$

$$b-c \quad c-b=8$$

$$b+c=13$$

$$2c=22$$

$$c=11$$

$$b-c=-10$$

$$a+b=9$$

$$b+c=14$$

$$a+c=19$$

$$b=2$$

$$c=12$$

$$a=7$$

$$5^{10} \cdot 40 + 13 = 53$$

$$3^{10} \cdot 3^{13} \cdot 3^{18}$$

$$718$$

$$19 + 9 + 28 + 14 = 42$$

$$53 \cdot 2^2 = 212$$

$$28 \cdot 14 = 42$$

$$13 = b+c$$

$$16 = a-b$$

$$2a = 26 \quad a = 13$$



