



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Вспомогательный основной теоремой арифметики и разложением числа

$$a, b, c. \quad a = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3} \dots; \quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \dots; \quad c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \dots, \quad d_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$$

Дано, что разложение чисел есть совершенные, т.е. в.к. для любых натуральных чисел a, b, c выполняется, что d_i, β_i, γ_i при $i \geq 4 = 0$. Тогда условие того, что

$$ab : 2^8 3^{10} 5^{10} \Leftrightarrow 2^{d_1+\beta_1} 3^{d_2+\beta_2} 5^{d_3+\beta_3} : 2^8 3^{10} 5^{10}, \text{ то равносильно}$$

$$\text{система: } \begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ d_2 + \beta_2 \geq 10 \\ d_3 + \beta_3 \geq 10. \end{cases} \quad \text{Аналогично составим систему для: } b \text{ и } c$$

$$\begin{cases} d_1 + \gamma_1 \geq 13 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \quad \text{Возьмем первые 3 системы:}$$

$$2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 42 \Rightarrow$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 21. \quad \text{Аналогично } d_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq 41/2 \text{ и } d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 53/2$$

$$abc = 2^{d_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{d_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{d_3+\beta_3+\gamma_3} \rightarrow \min \Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 21 \text{ и } c$$

$$\text{учтём } d_i + \beta_i + \gamma_i \in \mathbb{Z}: \quad d_2 + \gamma_2 + \beta_2 = 20; \quad d_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26. \Rightarrow$$

$$\min(abc) = 2^{21} 3^{20} 5^{26}.$$

Р.З. В начале решения мы обнаружили, что d_i, β_i, γ_i при $i \geq 4 = 0$

Дело, чтобы не можем так же считать и считать $i \leq 3$, т.к. числа

2, 3, 5-простые и есть в числе, на которое по условию делится ab, bc и ac .

Таким образом следует из систем уравнений, найденных нами.

$$\text{Ответ: } 2^{21} 3^{20} 5^{26}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

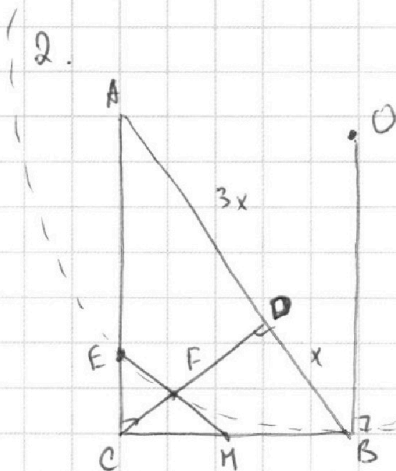
5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведем отрезок EF до пересечения

$\angle B$ в с.м. $EM \parallel AB \Rightarrow \triangle CEM \sim \triangle CAB$
(следует из равенства углов $\angle EMC$ и $\angle ABC$ и $\angle CEM$ и $\angle CAB$)

Также имеем $\triangle CFM \sim \triangle CDB$
 $\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow AD:DB = EF:FM = 3:1$

Пусть $AD = 3x$; $BD = x$.

~~Из подобия треугольников ADC и AEP ($\angle A$ общий и $\angle APC = \angle ACD = 90^\circ$) $\frac{CP}{AD} = \frac{AB}{AC}$~~

Из подобия треугольников ADC и CDB ($\angle A = 90^\circ - \angle ACD = \angle DCB$ и $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$)

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow \text{По т-е Пифагора } BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x.$$

Пусть $\triangle CEM \sim \triangle CAB$ с коэффициентом подобия k . Тогда $EM = 4x \cdot k$.

Тогда $EF:FM = 3 \Rightarrow EF = 3kx$ и $FM = kx$. $MB = BC - MC = 2x - 2xk = 2x(1-k)$.

По т-е о секущей и касательной к окружности. $MB^2 = MF \cdot ME$

$$(2x(1-k))^2 = kx \cdot 4kx \Rightarrow 4x^2(1-k)^2 = 4x^2k^2 \Rightarrow k^2 = (1-k)^2 \text{ и } k = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

ME — средняя линия. $S_{CEF}:S_{CFM} = EF:FM = 3:1 \Rightarrow S_{CEF} = \frac{3}{4} S_{CFM}$.

$$\frac{S_{CFM}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: 16:3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

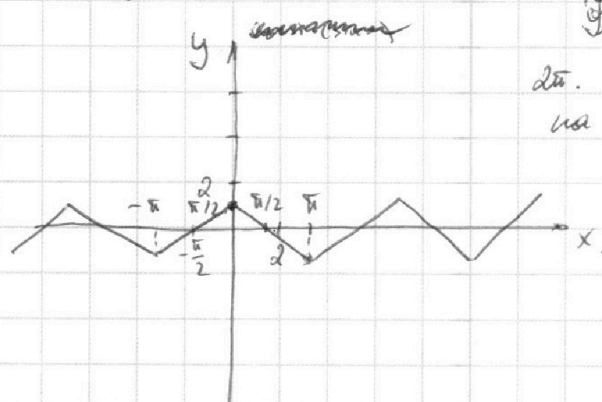
53.

$$\text{Saw} \sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

При $x \in [0; \pi]$, $\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$.

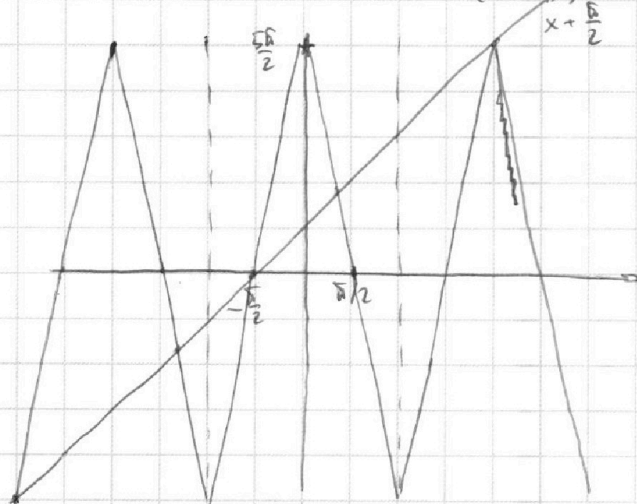
При $x \in [-\pi; 0]$, $\frac{\pi}{2} - x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} + x$.

Нарисуем график:



Функция периодична с периодом 2π . Нам нужно, как она behaves на отрезке $[-\pi; \pi]$

Нарисуем график $\text{Saw} \sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ и $x + \frac{\pi}{2}$:



Вспомогательные:

$$x = 2\pi; x = -3\pi; x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{пересечение } x + \frac{\pi}{2} \text{ с } \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow$$

$$6x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ и пересечение}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \text{ с } -x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 6x = -3\pi \Rightarrow$$

$$x = -\frac{4}{3}\pi$$

Ответ: $2\pi; -3\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



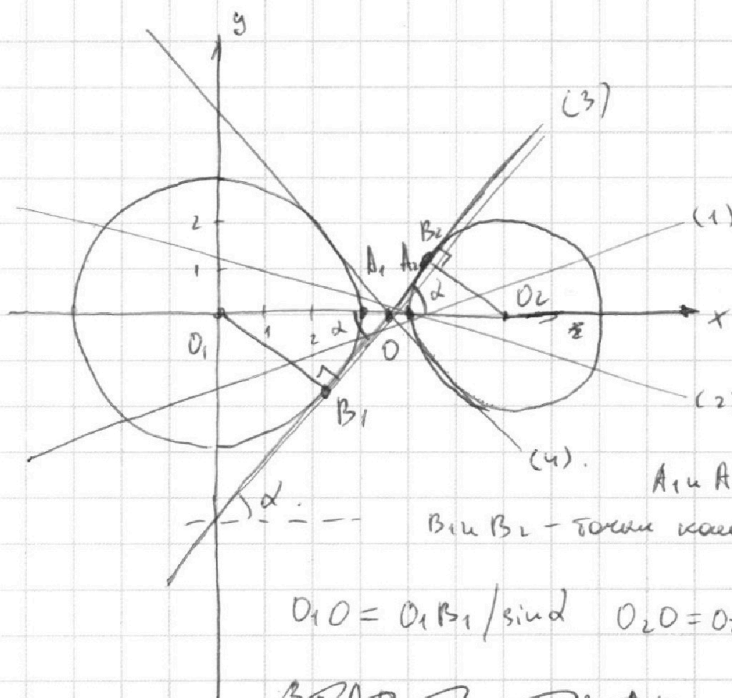
54.

$$\begin{cases} ax + dy - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3b - ax \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Получаем, что решение системы это пересечение прямой $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с

двумя окружностями: 1 - с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3, 2 - с центром в $(6; 0)$ и радиусом 2.



Дано, что прямые 1 и 2 пересекают окружности в 4 точках.

Прямые 3 и 4 - общие касательные к окружностям. Эти прямые пересекают окружности в 2 точках.

Рассмотрим угол α .

A_1 и A_2 - т. перес. окружн. с ОХ.

B_1 и B_2 - точки касания. О - т. пересечения окружностей с ОХ.

$$O_1O = O_1B_1 / \sin \alpha \quad O_2O = O_2B_2 / \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{3 + A_1O}{\sin \alpha} = \frac{2 + A_2O}{\sin \alpha} \Rightarrow 3$$

$$3 + A_1O = \frac{3}{\sin \alpha} \quad 2 + A_2O = \frac{2}{\sin \alpha} \quad \text{Сложим: } A_1A_2 + 5 = \frac{5}{\sin \alpha}; \quad A_1A_2 = 6 - 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Решением } -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \text{ и } a < \frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow \text{Для } -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}} \text{ найдётся}$$

b , удовлетворяющее.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$15. \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 + 43 - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_3 y = \log_3 y^2 + (5^4) - 8$$

$$\text{Преобразуем: } \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \frac{5}{2} \log_3 x - 8; \log_3^4(5y) + 2 \log_3 y = \frac{11}{2} \log_3 y - 8.$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 8 = 0; \log_3^4(5y) + \frac{9}{2} \log_3 y + 8 = 0$$

$$\text{Заменим, что } \log_3^4(5y) = (-\log_3(5y)^{-1})^4 = \log_3^4(5y)^{-1} \Rightarrow$$

$$\log_3^4(5y)^{-1} + \frac{9}{2} \log_3 y^{-1} + 8 = 0.$$

Пусть $f(x) = \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 8$. Тогда данные условия задачи равносильны утверждению о том, что решение $f(x) = 0$ достигается.

$$\text{Пусть корни } x \text{ и } (5y)^{-1} \text{ совпадают} \Rightarrow x = \frac{1}{5} y^{-1} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Пусть они не совпадают: исследуем функцию } g(t) = t^4 + \frac{7}{2}t + 8, \quad t = \log_3 x$$

$$t^4 + \frac{7}{2}t + 8 = 0 \Rightarrow \frac{2t^5 + 16t + 8}{2t} = 0 \quad t \neq 0 \Rightarrow 2t^5 + 16t + 8 = 0$$

$$g'(t) = 4t^3 + 16 = 0 \quad t \in \emptyset \Rightarrow g'(t) > 0, \text{ при } \forall t \Rightarrow \text{функция монотонно}$$

возрастает и может пересекать $y=0$ только в одной точке и корни

x и $(5y)^{-1}$ совпадают.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

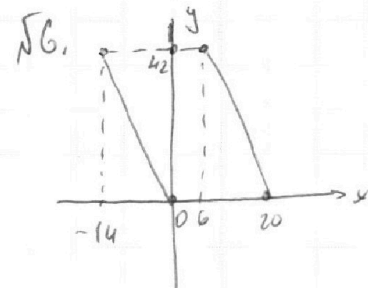
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для того, чтобы точка $A(x, y)$ принадлежала выпуклому-
мультимножеству, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq 60 - 3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y + 3x \leq 60 \end{cases} \quad (1)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33. \quad (2)$$

Нам необходимо найти количество способов выбрать x_1, x_2, y_1, y_2 , чтобы выполнялись
условия (1) и (2). Дело, что если мы определим сумму $3x_2 + y_2$, то

$3x_1 + y_1$ определится единственным образом. Так как $3x_1 + y_1 \geq 0$, то

$3x_2 + y_2 \geq 33$, тогда количеству $3x_2 + y_2$ будет соответствовать

$$(3x_2 + y_2 - 33) = 3x_1 + y_1.$$

$$3x_2 + y_2 = 33, 34, 35, \dots, a \quad 3x_1 + y_1 = 0, 1, 2, 3, \dots, b.$$

Дело, что для a верно: $3x_2 + y_2 = a \Rightarrow y = a - 3x \Rightarrow 0 \leq a - 3x \leq 42$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} - 14 \leq x \leq \frac{a}{3} \end{cases} \quad \text{Учитывая } x \in \mathbb{Z}: \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil - 14 \leq x \leq \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor, \text{ где}$$

$\lceil x \rceil$ - минимальное число не меньшее x , $\lfloor x \rfloor$ - максимальное

число, не большее $x \Rightarrow$ количество выборов x равно $\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 15$
Для каждого выбранного x соответствует y такое, что $y = a - 3x \Rightarrow$
количество способов выбрать $y + 3x = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{a}{3} \right\rceil + 15$, то для $a: 3$

получим, а для $a/3 - 14 \Rightarrow$ т.к. среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots$

если $y \geq 3$, то и $x \geq 3$, то если выбрать пару $(3; 3)$, то количество способов: $15^2 = 225$, иначе $-14^2 = 196$. Среди пар $(33; 0); (34; 1); \dots (60; 27)$ $\frac{59-33+1}{3} + 1 = 10$ парных 3 и $28-10 = 18$ не кратных $3 \Rightarrow$ ответ: $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196 = 5998$.

Ответ: 5998.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. 2.



П.к. L-т. касание и K-т. касание, но т-е

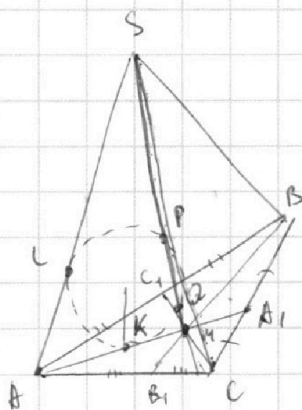
о касании $AL = AK$. $SP = QH \Rightarrow$ каска

т.т. S и т. H имеют симметричные точки

точки касания $\Rightarrow SL = HK \Rightarrow AL = AK$

$SL = HK$ и $AL = AK \Rightarrow AK + HK = SL + AL = 5$.

2. 3.



$SP = QH \Rightarrow$ т. S и H имеют симметричные точки

точки касания $\Rightarrow SL = HK$.

$AL = AK$, но т-е о касании $\Rightarrow AS = AH = 5$.

$\Rightarrow AB_1 = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



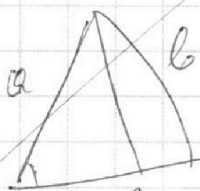
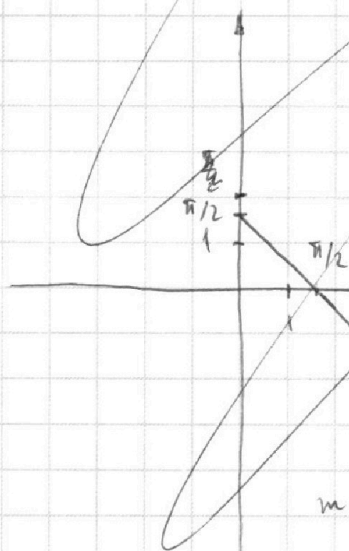
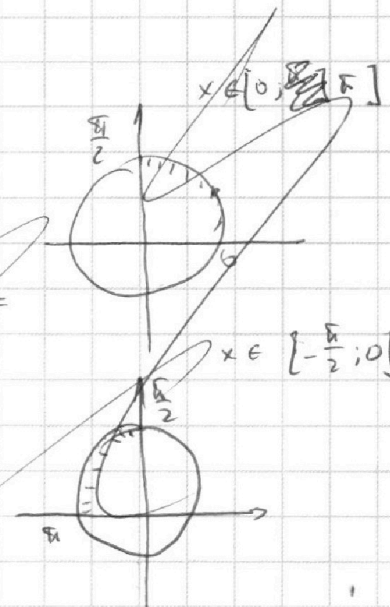
53. $\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$

Для $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

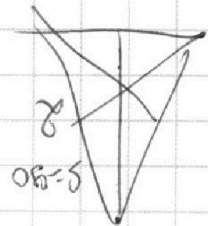
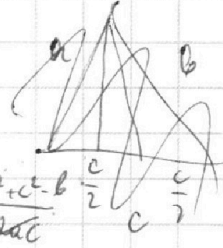
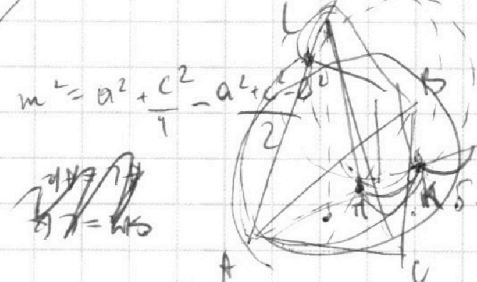
Для $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} + x$

Построим график $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$



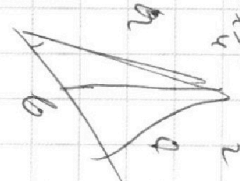
$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2ac \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{4} = \frac{(a-c)^2}{4}$



$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$m^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2ac \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{4} = \frac{(a-c)^2}{4}$



$y = kx + b$

$0 = -\frac{3\pi}{2}k + b$

$-\frac{5\pi}{2} = -8k + b$

$5 = k - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

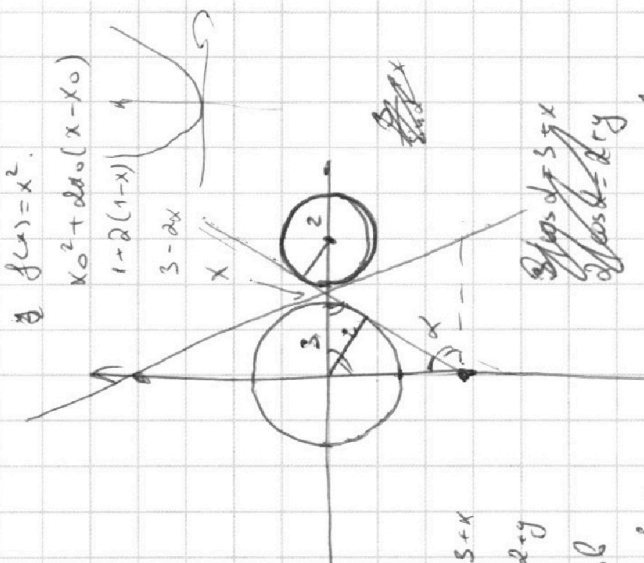
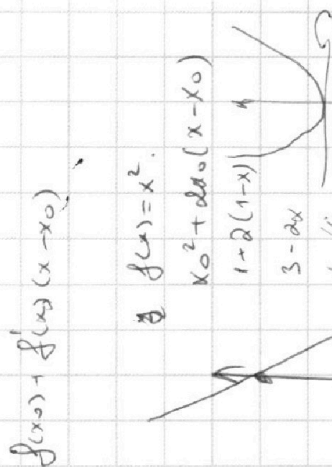
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

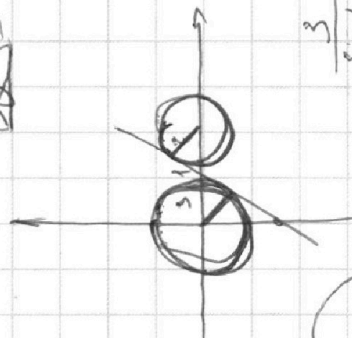
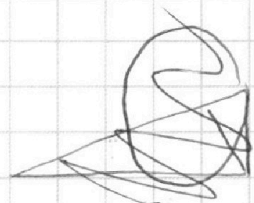
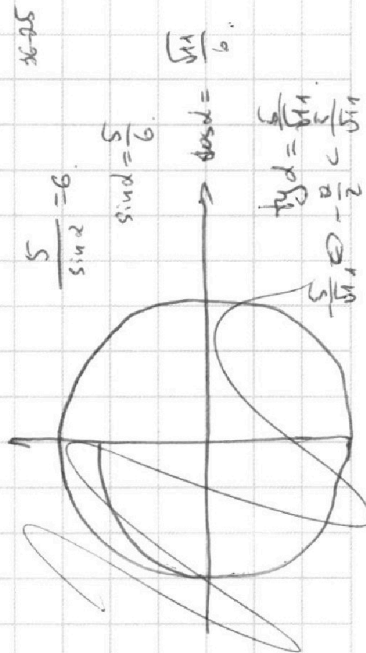
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ



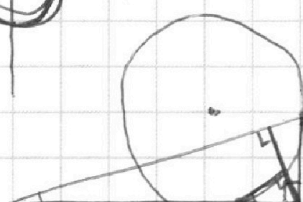
$$= \frac{\sin}{8} + \frac{\sin}{2} = 5 + x + y = 9$$



$$\frac{3}{\sin d} = \frac{5+x}{\sin d} = 2+y$$

$$dy = -ax + 3b$$

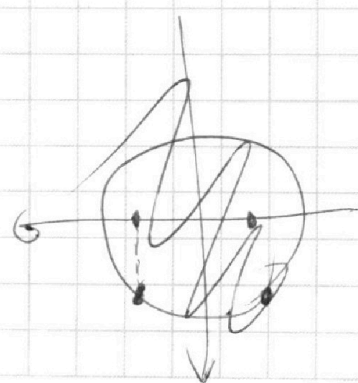
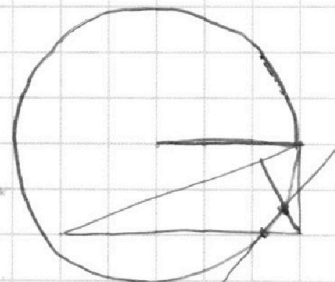
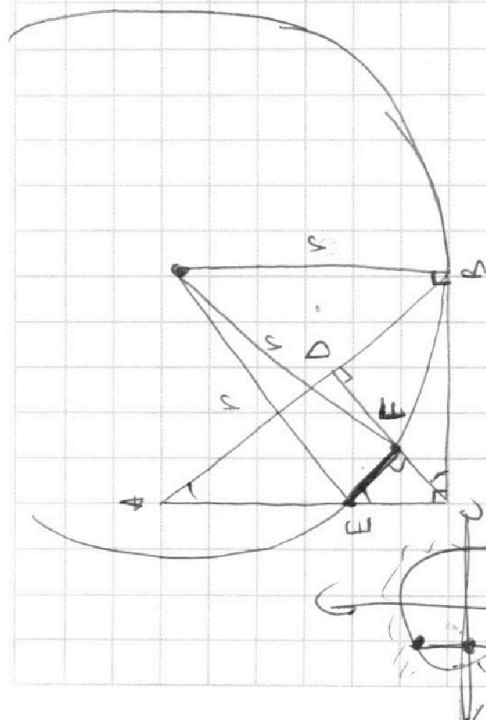
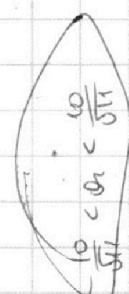
$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b.$$



$$2x + 2y - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{bmatrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, \quad bc: 2^{10} 3^{13} 5^{13}, \quad ac: 2^{13} 3^{18} 5^{30}$$

$$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \quad c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$$

$$2^{\alpha_1 + \beta_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \quad 1 \text{ кр.}$$

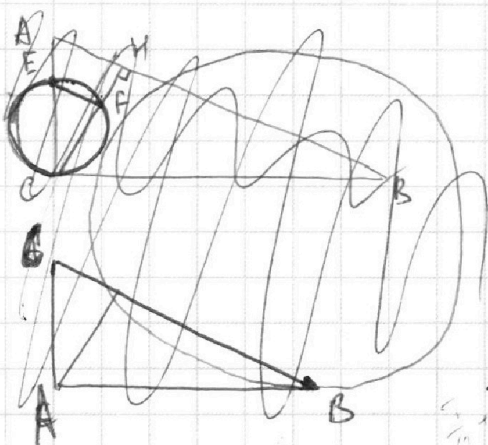
$$\log_3 x + 6 \log_3 3 = \log_3 243 = 5$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 38$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 19$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 18$$

2.



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x = sy^{-1}$$

$$xy = 5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 3$$

$$\log_3^4 x + 2 \log_{sy} 3 = \log_{2sy^2} (3^{11}) - 8, \log_3^4 x + 2 \log_{sy} 3 - \frac{11}{2} \log_{sy} 3 = 0$$

$$\log_3^4 x + 2 \log_{sy} 3 = 6 \log_{2sy^2} (243) - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{3}{2} \log_{sy} 3 - 8 = 0$$

$$\log_3^4 sy + \frac{3}{2} \log_{sy} 3 - 8 = 0$$

$$\log_3^4 sy^{-1} + \frac{3}{2} \log_{sy^{-1}} 3 - 8 = 0$$

$$f(x) = \log_3^4 x + 6 \log_3 x$$

$$f(x) = \log_3^4 x + \frac{3}{2} \log_{sy} 3 - 8$$

$$y = \sqrt{3}x$$

$$\frac{3x}{5} = \frac{y}{x} \Rightarrow y^2 = 3x^2 \Rightarrow \sqrt{2}x = 2\sqrt{3}x$$

$$\log_3^4 (sy) + 2 \log_{sy} 3 = \log_{2sy^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 (sy) + 6 \log_{sy} 3 = 4 \log_{sy} 3 + \log_{2sy^2} 3 + \log_{2sy^2} 3 + \log_{2sy^2} 3 + \log_{2sy^2} 3$$

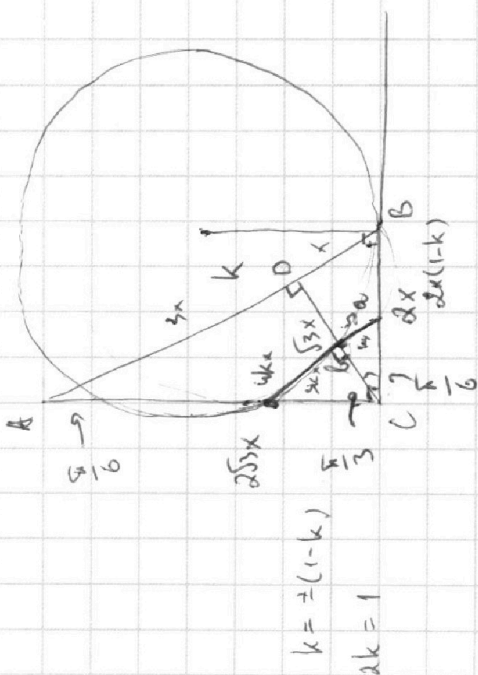
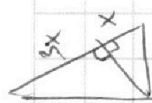
$$\log_3^4 (sy) + 6 \log_{sy} 3 = 4 \log_{sy} 3 + \log_{2sy^2} 3 + \log_{2sy^2} 3 + \log_{2sy^2} 3 + \log_{2sy^2} 3$$

$$2 \log_{sy^5} x + \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$10x^4 + 16 = 0$$



$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{64}$$

$$kx \cdot 4k = (k(1-k))^2$$

$$k^2 \cdot 4 = k^2 (1-k)^2$$

$$k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_{sy} 3 = \log_{x^2} 243 - 3$$

$$2 \log_{sy^5} x + \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_{sy} 3 + 8 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y \in \begin{cases} y = -\frac{42}{14}x = -3x \\ y = 0 \\ y = 42 \\ y = 60 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \geq 0 \\ y \leq 42 \\ y \leq 60 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq y + 3x \leq 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3x \leq 60 \\ 0 \leq y \leq 42 \end{cases}$$

$$y \leq 60 - 3x$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 42 \\ y + 3x \geq 0 \\ y \leq 60 - 3x \end{cases}$$

$$y + 3x = 60$$

$$\begin{cases} y + 3x = 60 \\ 0 \leq 3x \leq 60 \end{cases}$$

$$-3x \leq -3x \leq 0$$

$$-3 \leq x \leq 0$$

$$y = 60 - 3x$$

$$0 \leq 60 - 3x \leq 42$$

$$-9 \leq -3x \leq 42 - 60$$

$$-3 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

$$\left[\frac{a}{2} \right] - \left[\frac{a}{3} \right] + 14 + 1 = a - 3x$$

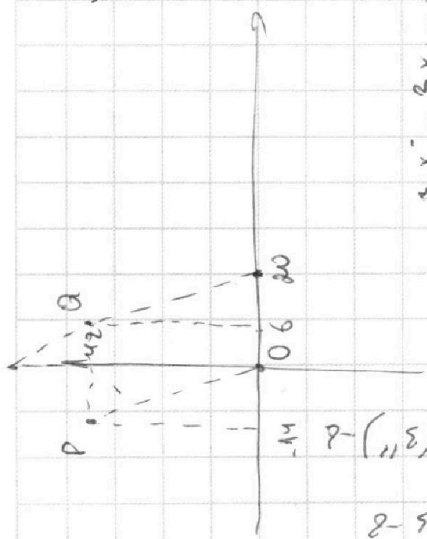
$$0 \leq a - 3x \leq 42$$

$$-9 \leq -3x \leq 42 - a$$

$$-3 \leq x \leq \frac{a - 42}{3}$$

$$\left[\frac{a}{3} \right] - 14 \leq x \leq \left[\frac{a}{3} \right]$$

$$11 - (-3) \pi$$



$$3x_1 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$