



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \cdot k_1, \quad k_1 \not\equiv 2, 3, 5, \quad k_1 \in \mathbb{N}, (k_1 \geq 1)$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1, z_1 \geq 0)$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \cdot k_2, \quad k_2 \not\equiv 2, 3, 5, \quad k_2 \in \mathbb{N}$$

$$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}, (x_2, y_2, z_2 \geq 0)$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3} \cdot k_3, \quad k_3 \not\equiv 2, 3, 5, \quad k_3 \in \mathbb{N}$$

$$x_3, y_3, z_3 \in \mathbb{Z}, (x_3, y_3, z_3 \geq 0)$$

$$ab \div 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$k_1 k_2 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ y_1 + y_2 \geq 14 \\ z_1 + z_2 \geq 12 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \not\equiv 2, 3, 5)$$

$$bc \div 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \Rightarrow 2^{x_2+x_3} \cdot 3^{y_2+y_3} \cdot 5^{z_2+z_3} \cdot k_2 k_3 \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 12 \\ y_2 + y_3 \geq 20 \\ z_2 + z_3 \geq 17 \end{cases}$$

$$\text{Аналогично} \quad ca \div 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \Rightarrow 2^{x_1+x_3} \cdot 3^{y_1+y_3} \cdot 5^{z_1+z_3} \cdot k_3 k_1 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \geq 14 \\ y_1 + y_3 \geq 21 \\ z_1 + z_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\text{Суммируем} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 \geq 14 + 12 + 8 \\ y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_1 \geq 21 + 20 + 14 \\ z_1 + z_2 + z_2 + z_3 + z_3 + z_1 \geq 39 + 17 + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{55}{2} \\ z_1 + z_2 + z_3 \geq 34 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{Z} \\ (y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z} \rightarrow (y_1 + y_2 + y_3) \in \mathbb{Z} \rightarrow) \\ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{56}{2} = 28 \end{matrix}$$

Сравнимся с $\min(abc)$.

$$abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3} \cdot k_1 k_2 k_3 \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{56}{2}} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$\text{Минимум достигается при } \begin{matrix} x_1=5; x_2=3; x_3=5 \\ y_1=8; y_2=6; y_3=14 \\ z_1=17; z_2=6; z_3=14 \end{matrix} \quad \begin{matrix} k_1=1, k_3=1 \\ k_2=1 \end{matrix}$$

Но т.к. $z_1, z_2, z_3 \geq 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 \geq 39 \Rightarrow$ станем вхожде-
ния в abc хотя бы 39. ~~Доказано~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Минимум $z_1 + z_2 + z_3 \geq 30$ достигается при $z_1 = 12, z_2 = 0, z_3 = 27$

Тогда $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

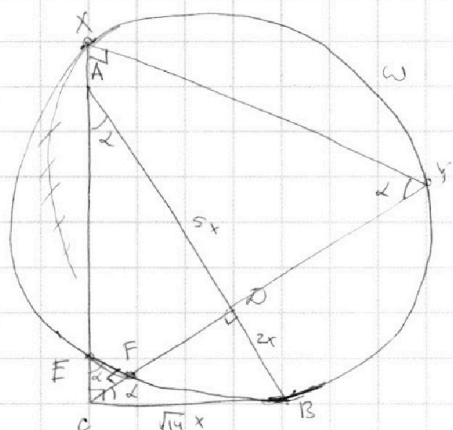
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Given: $\frac{AO}{OB} = \frac{5}{2}$, $EF \parallel AB$

Hamilton: $\frac{[ABC]}{[CEFF]}$ - ?

Решение: Обозначим $\angle C = \alpha$.

$$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAD = \alpha; \angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$$
$$\angle ECF = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle$$
$$\rightarrow \angle DCB = 90^\circ - \angle ECF = 90^\circ - 90^\circ + \angle = \angle$$

1). $\triangle CDB \sim \triangle ADC$ ($\triangle ADC$ и $\triangle CDB$ - вписанные Δ , $\angle DAC = \angle DCB = \alpha$)

$$\frac{C_D}{D_B} = \frac{A_D}{C_D} \rightarrow C_D = \sqrt{A_D \cdot D_B}$$

Обозначим $AO = 5x \Rightarrow OB = \frac{2}{5} AO = 2x \Rightarrow CO = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$

2). по Тл. Пифагора: $CB^2 = CO^2 + OB^2 = 10x^4 + 4x^4 = 14x^4$
 для COB

$$CB = \sqrt{14} \text{ x}$$

Do Tri. Pircopora que ΔABC : $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 25x^2 + 10x^2 = 35x^2 \Rightarrow AC = \sqrt{35}x$

3). no Th. o cenzury u kac-u: $CB^2 = CE \cdot CA$

3). По Th. о секущей и кас-и: $CB^2 = CE \cdot CX$, где $r.X = AC \cap w$
 $CB^2 = CF \cdot CY$, где $r.Y = CD \cap w$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} \cdot \frac{CX}{CY} = 1 \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CF}{CX} \quad \text{XCY - односторонний} \Rightarrow \triangle XCY \sim \triangle FCF$$

$$\Rightarrow \angle EFC = \angle YXC = 90^\circ ; \angle XYC = \angle FEC = \alpha$$

4). Е $\triangle ABC \sim \triangle ECF \rightarrow$ (м.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ECF$ - подобные и $\angle CFF = \angle CAB = A$)

$$\Rightarrow \frac{[ABC]}{[CEF]} = \frac{CB \cdot AC}{CF \cdot EF} = k^2 \quad \begin{array}{l} (4/3) [ABC] = \text{mnoжество } A B C \\ [CEF] = \text{mnoжество } A C E F \end{array}$$

$$\text{also } K = \frac{CB}{CF} = \frac{FE}{AB} = \frac{AB}{EC} = \frac{CA}{EF}$$

5).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 2x \geq -5\pi \\ \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \\ \begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n \end{cases} \end{cases}$$

$$1). x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}; x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$2). x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}; x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq 3\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi k \leq 5\pi$$

$$-1 \leq k \leq 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -2\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 3\pi$$

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n \leq 3\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi n \leq 10\pi$$

$$-1 \leq n \leq 2, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = -2\pi$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = 3\pi$$

$$\text{Ответ } x \in \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = \frac{ax+4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$\triangle OAF \sim \triangle CAO$$

$$\frac{OF}{CO} = \frac{OA}{CA}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{OA}{10-OA}$$

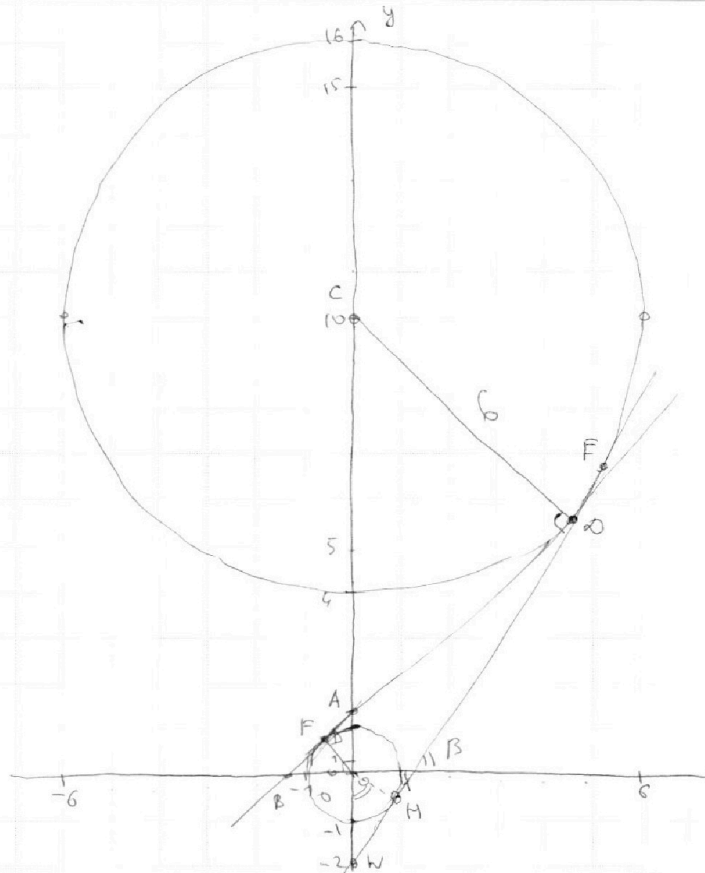
$$OA = \frac{10}{7}$$

$$\triangle BAO \sim \triangle OAF$$

$$\frac{OB}{OF} = \frac{OA}{AF}$$

$$\frac{OB}{1} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{1}{7}}$$

$$OB = \frac{10}{7}$$



по Th. Пифагора для $\triangle OAF$: $AF^2 = AO^2 - OF^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\Rightarrow OB = \frac{10}{7 \cdot \frac{\sqrt{51}}{7}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$$

$$\tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

1). $\left| \frac{a}{3} \right| \leq \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow$ прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ты max 2 раза

2). $\left| \frac{a}{3} \right| > \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \exists b$: прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ пересекает окр-ты 4 раза
(существуют b перенос прямой так, чтобы она пересекала 4 раза)

Расс-м вторую кас-ую HE: $\triangle OWH \sim \triangle CHE \Rightarrow \frac{OW}{CW} = \frac{OH}{CO} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{OW}{10+OW} = \frac{1}{6} \Rightarrow OW = 2$

$\tan \beta = \frac{HW}{OH} = \frac{HW}{1}$ По Th. Пифагора для $\triangle OWH$: $HW^2 = OW^2 - OH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow HW = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \beta = \sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сравним $\sqrt{\frac{51}{7}}$ и $\sqrt{3}$

$$51 < 49 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{51}{7}} < \sqrt{3}$$

Значит, уже для $|\frac{a}{3}| \geq \sqrt{\frac{51}{7}}$ будет возможен 11 пересек

прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{46}{3}$ на $\frac{46}{3}$ так, что она пересекает эллипс 4 раза

1). $|\frac{a}{3}| \leq \sqrt{\frac{51}{7}}$ — max 2 решения (одну из эллипс-ей прямая не) пересекает

2). $|\frac{a}{3}| > \sqrt{\frac{51}{7}}$ — $\exists b$: что $y = \frac{a}{3}x + \frac{46}{3}$ пересекает эллипс 4 раза

тогда

$$|\frac{a}{3}| > \sqrt{\frac{51}{7}}$$
$$\begin{cases} \frac{a}{3} > \sqrt{\frac{51}{7}} \\ \frac{a}{3} < -\sqrt{\frac{51}{7}} \end{cases} \quad a \in (-\infty; -3\sqrt{\frac{51}{7}}) \cup (3\sqrt{\frac{51}{7}}; +\infty)$$

Ответ: $a \in (-\infty; -3\sqrt{\frac{51}{7}}) \cup (3\sqrt{\frac{51}{7}}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1). \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5(2x)} - 3$$

Замена: $a = \log_5 2x$, $a \neq 0$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$a^4 - \left(\frac{3}{a} + \frac{4}{3a} \right) + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

Расс-м $f(a) = 3a^5 + 9a - 13$, $f'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(a)$ - монотонно

логарифмическая ф-ция $\Rightarrow$ решение $f(a) = 0$ единственно и существует

Возв-е к замене: $\log_5 2x = a_1$

$$x = \frac{5^{a_1}}{2} > 0, \quad \left(\begin{array}{l} x \neq \frac{1}{2} = \frac{5^{a_1}}{2} \Rightarrow a_1 \neq 0 \\ \text{при } a_1 = 0: f(a) = -13 < 0 \\ \text{не решение} \Rightarrow a_1 \neq 0 \end{array} \right)$$

$$2). \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{-1}{3 \log_5 y} - 3$$

Замена: $b = \log_5 y$, $b \neq 0$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3b} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Расс-м $g(b) = 3b^5 + 9b + 13$, $g'(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow$

$g(b)$ - монотонно возраст. ф-ция $\Rightarrow$ решение $g(b_1) = 0$ единственно
и существует.

Поманно, что $b_1 \neq 0$, т.к. $g(0) = 13 \neq 0$

Тогда возвращение к замене: $b_1 = \log_5 y$

$$y = 5^{b_1}$$

Поманно, что если $\begin{cases} 3a_1^5 + 9a_1 - 13 = 0 \\ 3b_1^5 + 9b_1 + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -b_1$

(т.к. $f_1(a) = 3a^5 + 9a$, $f_1'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f_1(a)$ монотонно возрастает)
и $\exists! a_1$: $f_1(a_1) = 13$; $f_1(b_1) = -13$ и это при $a_1 = -b_1$

Тогда $xy = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{b_1} = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{-a_1} = \frac{1}{2}$

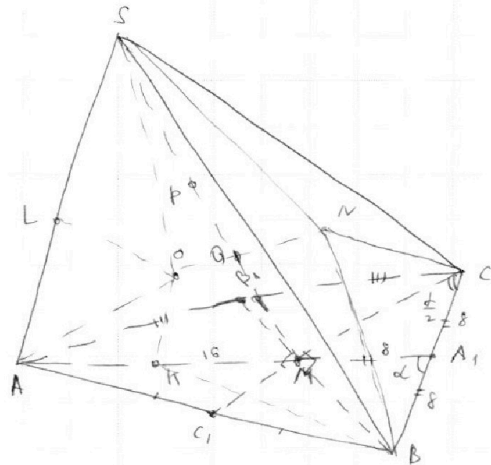
Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

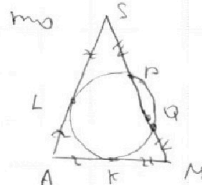


Дано: $SP = MQ$, $S(ABC) = 100$,
 $SA = BC = 16$

а). м.к. т. L и т. K - т. касания сферы

$$\Rightarrow AL = AK$$

м.к., L, K, P, Q $\in$ сфере, mo u (SAM),



по Th. о секущей и кас-ти:

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP =$$

$$= SP \cdot MP = SP(MQ + QP) =$$

$$= SP(PQ + SP) = SP \cdot SQ = SL^2$$

$$\Rightarrow KM = SL \Rightarrow SA = SL + LA = AK + KM = AM = 16$$

1). м.к. AA_1 - медиана, $\Rightarrow \frac{AM}{AA_1} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$$

$$MA_1 = AA_1 - AM = 24 - 16 = 8$$

2). $S(ABC) = \frac{CB}{2} \cdot AA_1 \sin \alpha$

$$\text{где } \alpha = \angle AA_1B$$

$$100 = \frac{16}{2} \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{25}{48}$$

3). в $\triangle CMB$: $\angle A_1BM = \angle A_1MB$ ($\angle MA_1B$ - р/д а) $\Rightarrow \angle A_1BM = \frac{\pi - \alpha}{2}$

$$\angle CA_1M = \angle CMA_1 \Rightarrow \angle (MA_1C - \text{р/д а}) \Rightarrow \angle CMA_1 = \angle MA_1B = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \angle CMA_1 + \angle A_1BM = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CMB = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CM \perp MB$$

4). $CM = CB \cos \frac{\alpha}{2} = 16 \cos \frac{\alpha}{2} = 16 \sqrt{\frac{48 + \sqrt{1679}}{96}}$

$$\left(\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{625}{48^2}} = \frac{\sqrt{1679}}{48} \right); \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ м.к. } \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{48 + \sqrt{1679}}{96}}$$

$$BM = CB \sin \frac{\alpha}{2} = 16 \sin \frac{\alpha}{2}$$

5). $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot \frac{3}{2} CM \cdot \frac{3}{2} BM = 6 \cdot 9 \cdot 16^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 27 \cdot 16^2 \sin \alpha =$
 $= 27 \cdot 16^2 \cdot \frac{25}{48} = 27 \cdot \frac{16 \cdot 25}{3} = 9 \cdot 16 \cdot 25 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 60^2 = 3600$

Ответ: 3600



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5). SM и SL - кас-е к сфере $\Rightarrow SL = SM = 4$

$\Rightarrow AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AN$

по сло AO - ч. сферой $\Rightarrow AO^2 = AL^2 + LO^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AO = 13$

$SO^2 = LO^2 + SL^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow SO = \sqrt{41}$

$OA_1^2 = OK^2 + KA_1^2 = 5^2 + (AA_1 - AN)^2 = 5^2 + (24 - 12)^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

$\Rightarrow OA_1 = 13$

$AN^2 = OA_1^2 - ON^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AN = 12$

$ON^2 = OC^2 - CN^2 = OC^2 - 5^2 = KC^2 \Rightarrow CN = KC$

$KB^2 = OB^2 - OK^2 = OB^2 - ON^2 = NB^2 \Rightarrow KB = NB$

$CN = KC$

$KB = NB \Rightarrow ANKC = ANKB$

BC - ось сфер

SA, AA_1 - кас-е к сфере, SM и NA_1 - кас-е к сфере. $\Rightarrow ON \perp (BSC)$

(сфера касается между плоскостями (SBC) и (ABC))

OK - кас-е $\Rightarrow OK \perp (ABC)$ т.к. т.к. - т. касания сферы и плоскости

$\Rightarrow$ т.к. L, N $\in$ $\perp$ сечению $\Rightarrow S, N, A_1 \in \perp$ прямой

$\Rightarrow$ $AS A_1 - P/\perp A$



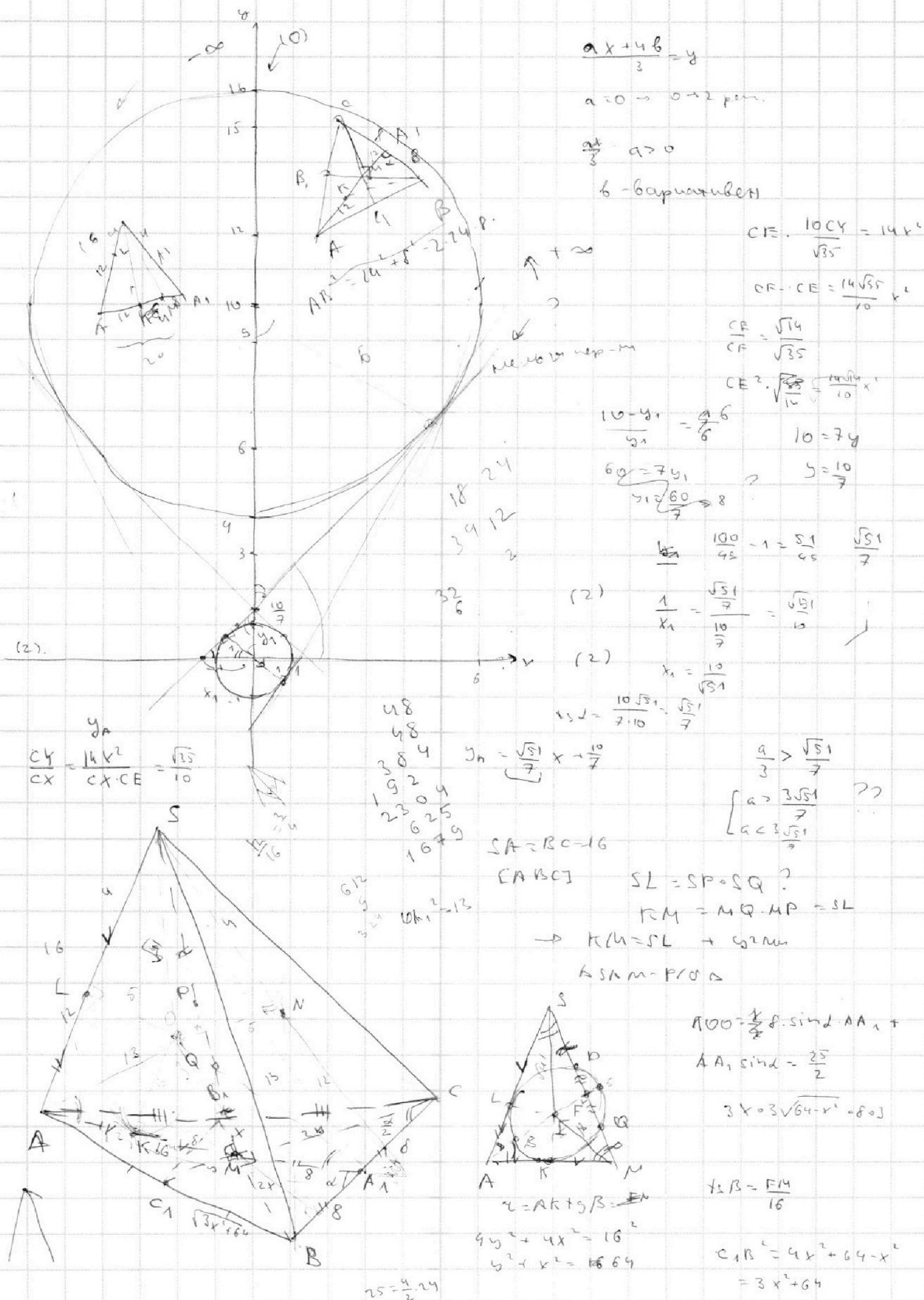
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\arcsin a = b$$

$$a = \sin b$$

$$a \in [-1; 1]$$

$$b \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

$$3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{10\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \leq \frac{2\pi}{5} \leq 3\pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \leq \frac{10\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-1 \leq k \leq 2$$

$$k \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \\ x \in [-\pi; 3\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ \dots \\ -2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} k \leq 3\pi \end{cases}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{5} k \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$-1 \leq k \leq 1 \quad k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$k = -1:$$

$$1). \text{ Check } k = -1: \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}(-1)\right)\right) = \frac{\pi - (\pi + 5\pi k)}{10} = \frac{-\pi}{2} k$$

$$1). k = -1: \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(-1) \quad \checkmark$$

$$2). k = 0: 0 = 0$$

$$3). k = 1: \frac{3\pi}{2} = \checkmark$$

$$2). \arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}k\right)\right) = \frac{\pi - (-\pi + 5\pi k)}{10} = \frac{2\pi - 5\pi k}{10} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi k}{2}$$

$$1). k = -1: -\frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} \quad \checkmark$$

$$2). k = 0: \frac{\pi}{5} = \checkmark$$

$$3). k = 1: -\frac{\pi}{5} = \checkmark$$

$$4). k = 2: -\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} \quad \checkmark$$

$$0.5) k = 2:$$

$$1. \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} z_1 & z_2 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_3 + x_1 \geq 14$$

$$x_1, \dots \geq 0$$

$$\min(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 \quad x_2 + x_3 \geq 12 \quad x_3 + x_1 \geq 14$$

$$x_1 + x_3 \geq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{34}{2} = 17$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{55}{2} > 27$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 34$$

$$\begin{matrix} 12 & 0 & 17 \\ 13 & 4 & 26 \\ 15 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 21 & 55 & 56 & 12 \\ 14 & & 4 & 12 \\ 35 & & 16 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 7 & 5 & 7 & 1 & 1 & 9 \\ & & & 6 & 2 & 10 & \\ & & & 15 & 3 & 9 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 6 & 11 & 11 & 1 & 1 & 6 \\ 10 & 2 & 15 & & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 17 & 16 \\ 35 & 40 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 56 & 12 \\ 68 & 17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 12 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7 & 7 & 13 \\ 8 & 6 & 14 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 8 & 6 & 14 & 26 & \checkmark \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x > 0$$

$$2x \neq 1$$

$$8x^3 > 0$$

$$\frac{1}{4} = 0.2$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{11}{3 \cdot 9} - 3$$

$$\left(\frac{4}{3} + 3\right) \frac{1}{a} - \frac{13}{3 \cdot 9}$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \log_5^4 \frac{5}{8x^3} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$a^4 = \frac{4}{3a} + \frac{3}{a} - 3$$

$$a^4 = \frac{13}{3a} - 3$$

$$F(a) = 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$F'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \rightarrow$$

$$0 = a^4 = -\frac{9}{15} \rightarrow \text{no r. max (min)}$$

$$1 \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{12}{3} - \frac{13}{3} = 1$$

$$a = \log_5 5$$

$$-a = \log_5 2x$$

$$y = 5^a$$

$$2x = 5^{-a}$$

$$x = \frac{5^{-a}}{2}$$

$$\frac{5^{-a}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$[a \neq 0] \checkmark \checkmark$$

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$x \neq \frac{1}{2} \quad y \neq 1$$

$$3 \cdot \frac{3^5}{2^5} + \frac{9 \cdot 3}{2} - 13 = 0$$

$$3^6 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 13 \cdot 2^5$$

$$2^4(22 - 26)$$

→ если корень есть → один

$$\log_2 8 = \log_2 \frac{64}{8} = \log_2 8 = 2$$

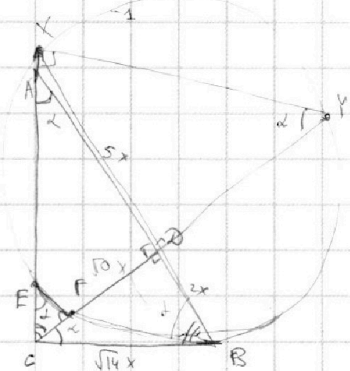
$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 4 = \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$8^4 + \frac{4}{8} = -\frac{1}{36} - 3$$

$$8^4 + \frac{4}{8} + \frac{1}{36} + 3 = 0$$

$$8^4 + \frac{13}{36} + 3 = 0$$

$$38^5 + 98 + 13 = 0$$



$$[X_0 = \frac{1}{2}]$$

$$\frac{[ABC]}{[CEF]}$$

$$CE = CA = CB^2 = CF \cdot CD = 14x^2$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{5x}$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$$

$$\frac{[ABC]}{[CEF]} = \left(\frac{EF}{AC}\right)^2 = \frac{2^2}{35} \left(\frac{CF}{CB}\right)^2 = \left(\frac{CF}{AB}\right)^2 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$CB^2 = CE \cdot AC = CF$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{14x}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{14}{10}}$$

EC

$$\frac{CY}{AB} = \frac{CF}{7x}$$

$$\frac{CY}{EC} = \frac{CF}{7x} \quad CF = \frac{14x^2}{CE}$$

$$B. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{CD} = \frac{EF}{10}$$

$$\frac{CF}{\sqrt{35}} = \frac{CF}{\sqrt{10}} = \frac{EF}{5}$$

$$\frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{CF} = CF$$

$$14x^2 = CF \cdot CF$$

$$CF^2 + CF^2 = CF^2$$

$$100 = \frac{16}{2} \cdot h_p \quad h_p = \frac{100}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{25}{2 \cdot 24} = \frac{25}{48} \rightarrow \cos \alpha$$

$$\rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow x \rightarrow ?$$

$$14x^2 = CF$$

$$CF = CX = 14x^2$$

$$CF = CY = 14x^2$$

$$CF = CX = 14x^2$$

$$\frac{CY}{AC} = \frac{CF}{CD}$$

$$CF = \frac{\sqrt{35}}{10} \cdot CX$$

$$\frac{CF}{CX} = \frac{\sqrt{35}}{10}$$

$$CF = CX \sqrt{\frac{35}{14}}$$

$$CX = CF$$

$$\frac{CF}{\sqrt{35}x} = \frac{CF}{\sqrt{14}x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!