



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$: $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$ $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}$ $\min abc$
 Показано что $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{48} = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{48} \Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}$

~~Заметим, что $abc: ac \Rightarrow$~~
 $\Rightarrow abc: 5^{24} \Rightarrow$ $abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24} \Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}$ (ибо $a, b, c \in \mathbb{N}$).

$a = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$
 $b = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^8$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$
 $\Rightarrow ab = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20}$ $bc = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{22}$ $ac = 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$
 $\Rightarrow$ пример работает, в нем $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}$, т.е. ровно на-
 ма оценка.

Ответ: $\min abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}$.

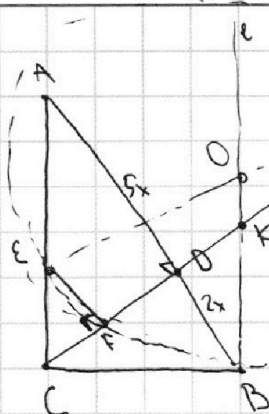
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AD$, $CD \perp AD \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle EFD = 90^\circ$, а
так как B — окружность $(E, F, B) \Rightarrow$ или провести
 FD до второго пересечения, то этот пересекать в точ-
ку E' , которая диаметрально противоположна E .
Нам известна кас. BC (или O — центр окр., то $OB \perp BC$)
 $\Rightarrow OB \parallel AC$ ($\angle C = 90^\circ$). EE' — диаметр $\Rightarrow O$ — это пересечение
 EE' и l (прямая AC , которая через B), причем
 O — сеп. EE' $\Rightarrow$ пусть K — точка пересечения l и CE' ,
тогда OK — сеп. линии $\Delta EE'$ ($\Rightarrow K$ — середина CE'). Пусть

$AD = 5x \Rightarrow BD = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{10}x$ (используем в прямоугол. $\Delta CD^2 = AD \cdot BD$) $\Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{35}x$ и $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{14}x$. $l \parallel AC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow \frac{5x}{2x} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow KD = \frac{2 \cdot CD}{5} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}x}{5}$, так-
же $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BK = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \sqrt{35}x}{5}$. Пусть мы знаем что $BC^2 = CF \cdot CE'$. CE' как сумма
отрезков (отм. нашей окр.) $14x^2 = CF \cdot CE' = CF \cdot (CF + 2 \cdot CK) \Rightarrow 7x^2 = CF \cdot CK$. Пусть $CK = y$, тогда $CF = \frac{7x^2}{y}$.
Из подобия $\Delta CKD \sim \Delta BCD$ $\Rightarrow \frac{CK}{BD} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow CK = \frac{BD \cdot CD}{BC} = \frac{2x \cdot \sqrt{10}x}{\sqrt{14}x} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}x}{\sqrt{14}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}x}{\sqrt{2 \cdot 7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}x}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}x}{\sqrt{7}}$.
 $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{14x^2 - \frac{4 \cdot 35x^2}{25}} = x \sqrt{14 - \frac{28}{5}} = x \sqrt{\frac{70 - 28}{5}} = x \sqrt{\frac{42}{5}} = \frac{\sqrt{42}x}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}$.
Тогда $CF \cdot CK = 7x^2 \Rightarrow \frac{7x^2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}$. Тогда $CF = \frac{7x^2}{\sqrt{2}x/\sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}x}{\sqrt{2}}$.

Итак $S_{ABK} = \frac{AB \cdot CK}{2} = \frac{7x \cdot \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}x^2}{2\sqrt{5}}$; $S_{DEF} = S_{ACD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \frac{CD \cdot AD}{2} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2$. Тогда $\frac{S_{ABK}}{S_{DEF}} = \frac{CD \cdot AD \cdot CF^2}{2 \cdot CD \cdot AD \cdot CF^2} =$
 $= \frac{AB \cdot CK^2}{AD \cdot CF^2} = \frac{7x \cdot 10x^2}{5x \cdot 5x^2} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{28}{5} = 5,6$

Ответ: $S_{ABK} / S_{DEF} = \frac{28}{5} = 5,6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



10 $\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$, так как $\arcsin(\cos x)$ определен при $\forall x$,
при этом он принимает значения $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\pi - 2x}{10} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \pi - 2x \in [-5\pi, 5\pi] \Rightarrow$
 $\Rightarrow -2x \in [-6\pi, 6\pi] \Rightarrow 2x \in [-4\pi, 6\pi] \Rightarrow x \in [-2\pi, 3\pi]$
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Rightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \Rightarrow \cos x = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) -$
 $-\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}(\pi - x - \frac{\pi - 2x}{10})) \cdot \cos(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10})) = 0$

$$\sin(\frac{1}{2}(\frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{10})) = 0$$

$$\frac{5\pi - 8x}{20} = \pi k$$

$$\frac{\pi - 2x}{5} = \pi k$$

$$\pi - 2x = 5\pi k$$

$$2x = \pi - 5\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2}(1 - 5k)$$

$$k \leq -2 \Rightarrow -5k \geq 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 5k \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11\pi}{2} > 3\pi,$$

не подходит

$$k \geq 2 \Rightarrow -5k \leq -10 \Rightarrow 1 - 5k \leq -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{-9\pi}{2} < -2\pi, \text{ не подходит}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = 3\pi$$

Тогда для полученных нами x равенство нулей выполняется (ибо они корни уравнения), при этом они принадлежат $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ тогда все уравнения равны $\Rightarrow$ все нули это значения x только эти.

Ответ: $x \in \{-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi\}$.

$$\cos(\frac{1}{2}(\frac{5\pi - 10x + \pi - 2x}{10})) = 0$$

$$\frac{6\pi - 12x}{20} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi n$$

$$-6x = 10\pi n + 2\pi$$

$$-3x = 5\pi n + \pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}(5n + 1)$$

$$|x| \leq 3 \Rightarrow 5n \leq -1 \Rightarrow 5n \leq -1 \Rightarrow x \geq \frac{14\pi}{3} > 3\pi, \text{ не подходит}$$

$$|x| \geq 2 \Rightarrow 5n \geq 10 \Rightarrow 5n \geq 11 \Rightarrow x \leq \frac{-11\pi}{3} < -2\pi, \text{ не подходит}$$

$$n = 1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$n = -1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$n = -2 \Rightarrow x = 3\pi$$

$$k, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

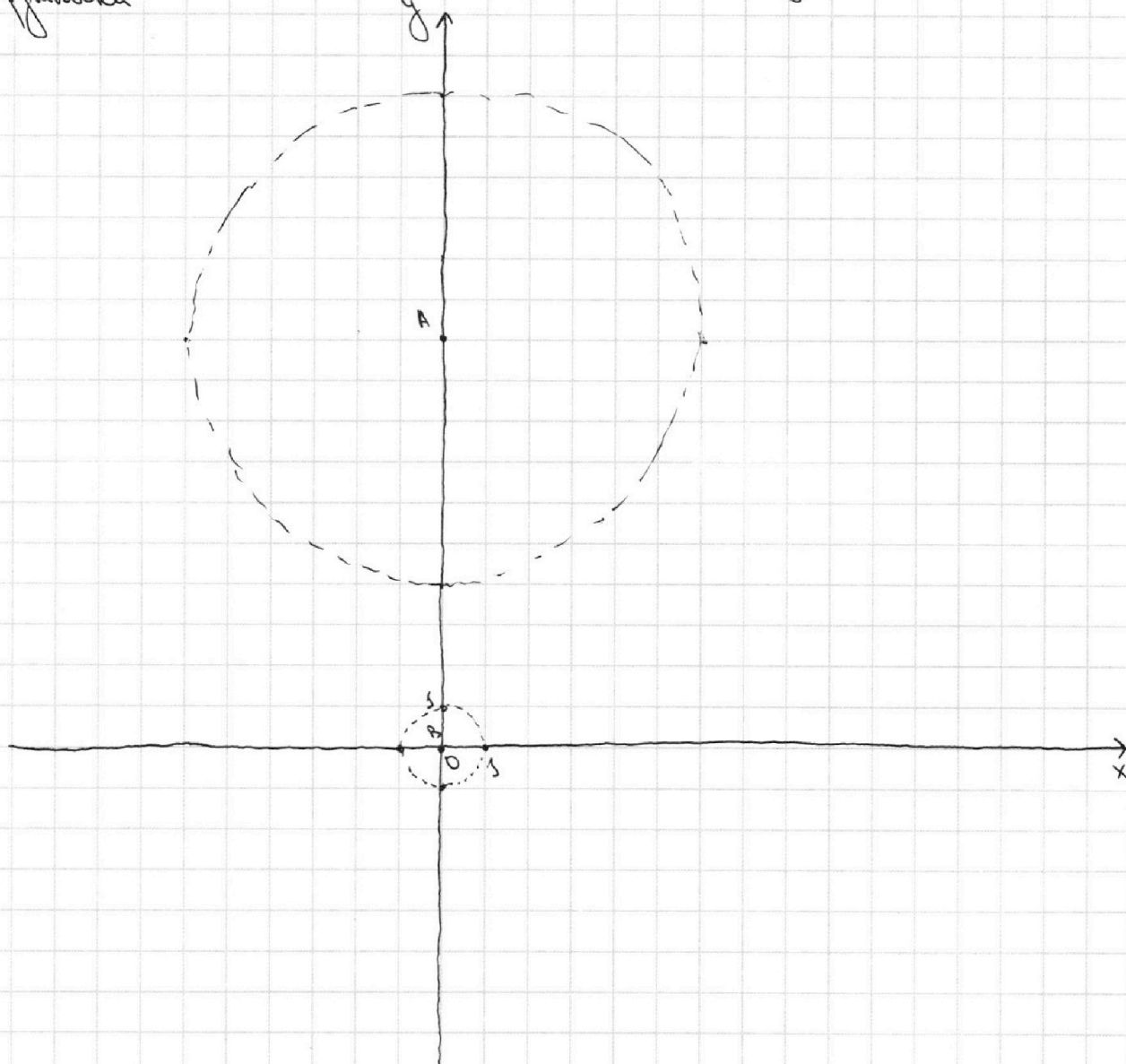
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow 3y = ax + 4b \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 10) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 \end{cases}$$

? а: b: равно 4 рел.

Посмотрим на график II уравнение, понятно, что это объединение 2 фиксированных окружностей



I окр.: центр $A(0, 10)$ и $r=6$

II окр.: центр $B(0, 0)$ и $r=1$

График I уравнение - прямая, у которой за наклон отвечает а, а за расстояние наклонности - b. Нам нужно равно 4 рел. $\Rightarrow$ наша прямая должна касаться каждой окружности в 2 точках $\Rightarrow$ расстояние от A до нашей прямой ≤ 6 и расстояние от B до нашей прямой ≤ 1 . Заменим расстояние от A до прямой: $\frac{|4b - 30|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, это $\leq 6 \Rightarrow \frac{|4b - 30|}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 6 \Rightarrow |4b - 30| \leq 6\sqrt{a^2 + 9}$. Заменим расстояние от B до прямой: $\frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, это $\leq 1 \Rightarrow \frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 1 \Rightarrow |4b| \leq \sqrt{a^2 + 9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow |4b| < \sqrt{a^2 + 9} \Rightarrow$ нас такая вещь:
 $\left\{ \begin{array}{l} |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9} \\ |4b| < \sqrt{a^2+9} \end{array} \right. \Rightarrow |30-4b| < 6\sqrt{a^2+9} \Rightarrow |4b| + |30-4b| < 7\sqrt{a^2+9}$ при этом из-

бегство это $|4b| + |30-4b| \geq 4b + (30-4b) = 30 \Rightarrow 7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow \sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7} \Rightarrow a^2 + 9 > \frac{900}{49} \Rightarrow a^2 > \frac{900-441}{49} = \frac{459}{49} \Rightarrow |a| > \frac{\sqrt{459}}{7} = \frac{3\sqrt{51}}{7}$, но не то при таких a $7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow 6 \cdot$

$\sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7}$ и $\sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7}$. Возьмем $b = \frac{15}{4}$, тогда $4b = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \Rightarrow |4b| \leq \frac{30}{4} < \sqrt{a^2+9}$ и

$|4b-30| = |\frac{30}{4} - 30| = 30 \cdot \frac{3}{4} < \sqrt{a^2+9}$, т.е. для a таких, что $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$, можно брать $b = \frac{15}{4}$.

найдем a (а для других a мы найдем, что нельзя найти).
 Ответ: $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$, т.е. $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (\log_2 x)^4 - 3 \log_2 5 = \log_{25} 625 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_{25} \left(\frac{5}{5}\right) - 3 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } x, y > 0; x \neq \frac{1}{2} \neq y \neq \frac{1}{5}$$

$$\text{пусть } \log_5 2x = a \quad \log_5 y = b \quad (a, b \neq 0)$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{1}{a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{где } a^5 + 3a - 4 = 0 \quad \text{и} \quad 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$a^5 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 4) = 0. \text{ Рассмотрим на } f(a) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 4 \text{ показано, что}$$

$$b \ a > 0 \ f(a) > 0, \text{ если } a \leq 1, \text{ то } a^4 + a^3 \geq 0 \text{ и } a^2 + a \geq 0 \text{ (ибо } a^4 \text{ и } a^3 > 0 \text{ и } |a| > 1) \Rightarrow f(a) >$$

$$0, \text{ если } a \in (0; 1), \text{ то } 4 + a^3 + a \geq 2 \text{ (ибо } |a| < 1) \Rightarrow f(a) > 0. \text{ Значит } f(a) > 0 \text{ при } \forall a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 + a^3 + a^2 + a + 4 \neq 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \log_5 2x = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}!$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0, \text{ показано, что если } f(b) = 3b^5 + 9b + 13, \text{ то } f'(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(b) \text{ имеет все}$$

$$\text{где } \Rightarrow y \text{ имеет ровно 1 корень (у многочлена четной степени всегда есть 2 корня).}$$

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

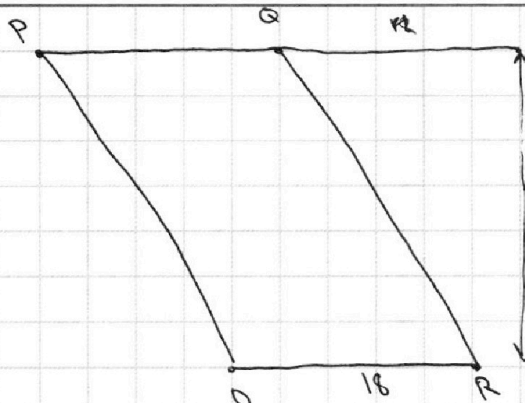


1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



non-le map $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$:
 $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$
 Пусть $x_2 - x_1 = a$ и $y_2 - y_1 = b$,
 то $5a + b = 45 \Rightarrow b = 45 - 5a$.
 Так как $|b| \leq 80$ и $|a| \leq 18$,
 то $45 - 5a \leq 80$ и $45 - 5a \geq -80$.
 Решая, получим $a \geq -7$ и $a \leq 17$.
 Так как a целое, то $a \in \{-7, -6, \dots, 17\}$.
 Тогда $b = 45 - 5a \in \{15, 20, \dots, 80\}$.
 Всего 24 пары (a, b) .

$$\begin{aligned} |a| \leq 18 &\Rightarrow 5a \in [-90, 90] \Rightarrow 45 - b \in [-90, 90] \Rightarrow -b \in [-135, 45] \Rightarrow b \in [-45, 135], \text{ npr} \\ \text{from } |b| \leq 80 &\Rightarrow b \in [-80, 80] \text{ npr from } b: 5. |b| \leq 80 \Rightarrow b \in [-80, 80] \Rightarrow 45 - 5a \in [-80, 80] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9 - a \in [-16, 16] \Rightarrow -a \in [-25, 7] \Rightarrow a \in [-7, 25] \Rightarrow a \in [-7, 18], \text{ since } |a| \leq 18. \end{aligned}$$

Покажем, сколько точек есть $b=80$ и $a=-7$. $b=80 \Rightarrow BE \perp PQ$ и $AE \perp QR$, при этом $a=-7 \Rightarrow$ хороних нах равно $18+5-7=12$. Тогда $b=75$ и $a=-6$, если мы функциру нах хороних. хороних, то хороних нах $19-6=13$ хороних, хороних нах хороних. хороних равно $21-75=6 \Rightarrow$ всего $6 \cdot 13=78$. Тогда b хороних хороних a нах $21-|b|$ хороних хороних нах хороних хороних $19-|a|$ хороних хороних нах на хороних хороних хороних $\Rightarrow$ всего хороних $(21-|b|)(19-|a|)=21 \cdot 19 - 19|b| - 21|a| + |a||b|$. Нам хороних нах хороних $a, b: (-7, 80); (-6, 75); (-5, 70) \dots (11, -45)$, то всего 26 нах, хороних все нах хороних хороних хороних хороних $26 \cdot 21 \cdot 19 - 19(80+75+70+5+\dots+45) - 21(7+6+\dots+1+0+1+\dots+18) + (7 \cdot 80 + 6 \cdot 75 + \dots + 16 \cdot 45)$.
 $19(80+75+\dots+0+5+\dots+45) = 95(16+\dots+1+1+\dots+9) = 95 \cdot \left(\frac{16 \cdot 17}{2} + \frac{10 \cdot 9}{2}\right) = 95(45+17 \cdot 8) = 95(136+45) = 95 \cdot 181$

$$81(7 + \dots + 1 + 1 + \dots + 16) = 81\left(\frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{16 \cdot 19}{2}\right) = 81(21 + 152) = 81(173) = 13992$$

$$26 \cdot 81 \cdot 19 - 95 \cdot 181 - 81 \cdot 192 = (13 \cdot 81 \cdot 19 - 181 \cdot 5 \cdot 19) + (13 \cdot 19 \cdot 81 - 192 \cdot 81) = 19(13 \cdot 81 - 181 \cdot 5) + 81(13 \cdot 19 - 192) = 19(1053 - 905) + 81(247 - 192) = 19 \cdot 148 + 81 \cdot 55$$

Stärke normiert $(2.80 + 6.75 + \dots + 18.45) = 18(45 + 40 + \dots + 5) + 9.0 + 7.80 + 6.75 + \dots + 1.50 =$
 $= 18.5 \cdot (9 + \dots + 1) + 5(7.16 + 6.15 + \dots + 1.10) = 90.45 + 5(112 + 90 + 70 + 52 + 36 + 22 + 10) = 90.45 + 5 \cdot$
 $\cdot (170 + 110 + 112) = 90.45 + 5 \cdot (280 + 112) = 90.45 + 5 \cdot 392$

$$19 \cdot 148 + 91 \cdot 55 + 90 \cdot 45 + 5 \cdot 392 = 2960 - 148 + 11(55 + 50) + 1960 = 4920 - 148 + 11 \cdot 105 = 8505 + 4920 - 148 = 13425 - 148 = 13277$$

Order: B277

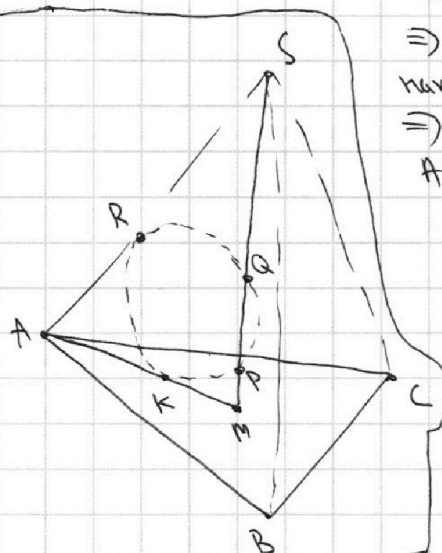
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

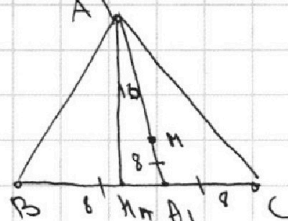
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть R — точка касания сферы с AS . $SP = MQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow SQ = MP \Rightarrow SP \cdot SQ = MP \cdot MQ \Rightarrow$ у M и S одинаковая степень от сферы $\Rightarrow MK^2 = SR^2$ (по отрезкам кас.)
 $\Rightarrow MK = SR$. Также $AR = AK$ как отрезки кас. Значит,
 $AS = AM$, $SA = BC (=16) \Rightarrow AM = BC = 16$.

Посмотрим на $\triangle ABC$.



$$AM = BC = 16; S_{\triangle ABC} = 100$$

$$AA_1 = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{32}{3} = \frac{256}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{256}{3} = 100 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8} \Rightarrow \frac{32}{3} = 12.5 \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{100}{8}$$

$$= \frac{BM \cdot CM}{2}, \text{ также } S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot h' \cdot BC \text{ (} h' \text{ — высота из } M \text{ на } BC \text{)}. h' = \frac{h}{3} \text{ (где } h \text{ — высота из } A \text{ на } BC \text{)}.$$

$$\frac{h \cdot AC}{2} = S_{\triangle ABC} = 100 \Rightarrow h_A = \frac{200}{16} = \frac{25}{2} \Rightarrow h' = \frac{25}{6} \Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{100}{3} \Rightarrow \frac{BM \cdot CM}{2} = \frac{100}{3} \Rightarrow BM \cdot CM = \frac{200}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \frac{9}{4} \cdot \frac{200}{3} = 3 \cdot 50 = 150 \Rightarrow AP_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 24 = 3600.$$

Ответ: а) 3600.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\begin{aligned} a &= 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \\ b &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \\ c &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax - 3y + 4b &= 0 \Rightarrow ax + 4b = 3y \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) &= 0 \\ ? a : 3b : \text{равно + рен.} \end{aligned}$$

$$17 + 12 + 39 = 39 + 29 = 68$$

$$17 + 12 + 39 = 39 + 29 = 68$$

$$34$$

$$a: 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad b: 2^3 \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad c: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arcsin(\cos x) \in [-5\pi; 5\pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

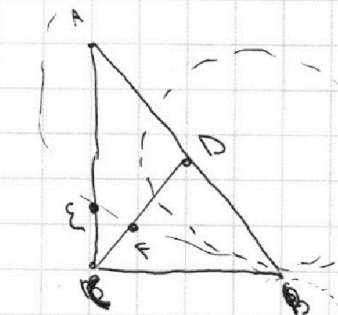
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin 2x - \sin 2 = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{2 - 2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 + 2x}{2}\right)$$

$$\sin 2x - \sin 2 = \frac{2}{3} \sin 1 \cdot \cos 2x = \frac{2}{3} \sin(1 - 2 \sin^2 1) =$$

$$3 \sin 2 - 4 \sin^2 2 - \sin 2$$

$$2 \sin 2 - 4 \sin^2 2$$

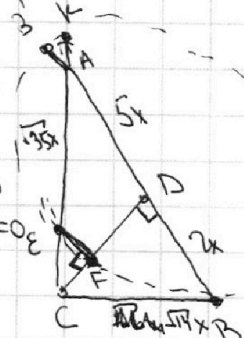


AB || EF

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + D = 0$$

$$2x - 5y - 4b = 0$$



$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\sin \angle B = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

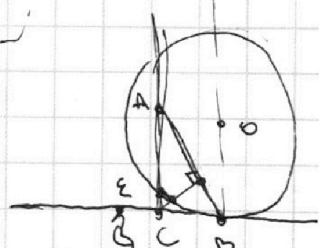
$$|4b - 18| < 18$$

$$|4b| < 3$$

$$|2| < 3$$

$$|a| = 0$$

$$|14| < 18$$



$$B = \frac{1}{2}$$

$$|2| < 3$$

$$|14| < 18$$

$$y = 2x + 3 \quad \text{or} \quad \arcsin(a_1)$$

$$2x - y + 3 = 0 \quad \frac{3}{\sqrt{4+9}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$= 2 \sin 2 (1 - \sin^2 2) +$$

$$+ \sin 2 (1 - 2 \sin^2 2) =$$

$$= 2 \sin 2 - 2 \sin^2 2 + \sin 2 -$$

$$- 2 \sin^2 2 = 3 \sin 2 - 4 \sin^2 2$$

$$\sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \sin 2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$EF \parallel AB$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCF}}$$

$$27 \cdot 7 = 9 \cdot 21 = 189$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x > 0; x \neq \frac{1}{2}; y > 0; y \neq 1$$

$$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - 3 \log_5 5 = \log_5 625 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_5 \left(\frac{1}{5}\right) - 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8505 \\ + 4920 \\ \hline 13425 \\ - 148 \\ \hline 13277 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2960 \\ + 1960 \\ \hline 4920 \\ 81 \cdot 105 = 8100 + \\ + 81 \cdot 5 = 8100 + \\ + 405 \end{array}$$

? xy

$$(\log_5 2x)^4 - 3 \log_5 5 = \log_5 5 - 3 \quad 48^2 = 16 \cdot 144 \quad 15 - 7 = 12$$

$$a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0 \Rightarrow a^5 + 3a - 4 = 0 \quad \begin{array}{r} 144 \\ \times 16 \\ \hline 864 \\ + 144 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$b = 80 \quad a = 7$$

$$b^4 + \frac{13}{b} + 3 = 0 \Rightarrow 3b^5 + 5b + 13 = 0$$

$$148 \cdot 20 - 148 = 2960 - 148$$

$$f(x) = 5x^4 + 9$$

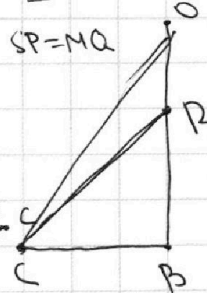
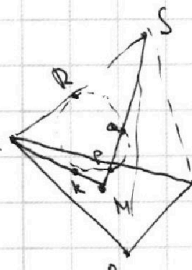
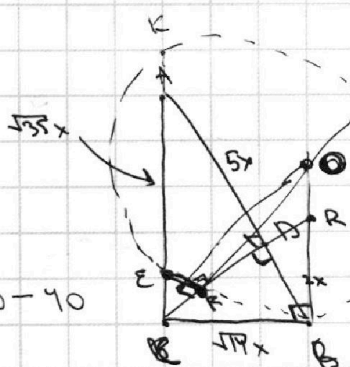
$$\begin{array}{r} 2304 \\ - 625 \\ \hline 1679 \end{array}$$

$$2304 - 625 =$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ \times 55 \\ + 405 \\ + 105 \\ \hline 4455 \end{array}$$

$$90 \cdot 45 = 81 \cdot 5 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} \times 91 \\ \times 13 \\ \hline 243 \\ + 81 \\ \hline 1053 \end{array}$$



$$5 \cdot 347 = 2000 - 40$$

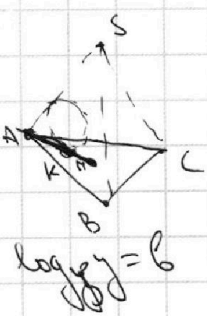
$$\begin{array}{r} 782 \\ \times 5 \\ \hline 1960 \end{array}$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

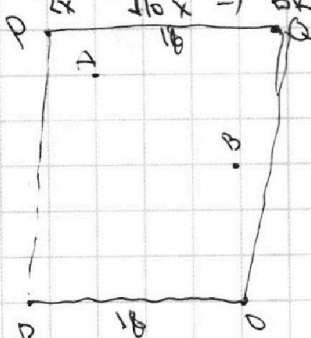
$$\frac{BR}{2x} = \frac{\sqrt{14}x}{\sqrt{10}x} \Rightarrow BR = x \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$12 + 9 = 26$$



$$\log_5 y = 6$$



$$\begin{aligned} 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 &= 45 \\ 5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) &= 45 \end{aligned}$$

$$5a + b = 45$$

$$(a-1)(b-7) = ab$$

$$(\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_5 0.2 - 3$$

$$|b| \leq 80$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 5 \\ 10 \cdot 5 \\ \hline 5 \cdot 14 \\ 4 \cdot 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \cdot 45 \\ 0 \cdot 45 \\ \hline 17 \cdot 40 \\ 1 \cdot 40 \end{array}$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \Rightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b \Rightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 14 \\ 4 \cdot 13 \end{array} \quad 312$$