



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

✓

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

✓

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

✓

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

✓

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \quad (1)$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \quad (2)$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \quad (3)$$

Пусть каждое из чисел a, b, c представлено в виде:

$$n = 2^{\alpha_n} \cdot 3^{\beta_n} \cdot 5^{\gamma_n}$$

(заметим, что среди простых не включаемся в разложение этих числа, иначе они бы были не наименьшими)

$$a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a} \quad b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b} \quad c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c}$$

$$(1): \alpha_a + \alpha_b \geq 6 \quad \beta_a + \beta_b \geq 13 \quad \gamma_a + \gamma_b \geq 11$$

$$(2): \alpha_b + \alpha_c \geq 14 \quad \beta_b + \beta_c \geq 21 \quad \gamma_b + \gamma_c \geq 13$$

$$(3): \alpha_a + \alpha_c \geq 16 \quad \beta_a + \beta_c \geq 25 \quad \gamma_a + \gamma_c \geq 28$$

$$\text{найдем } \min(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c), \min(\beta_a + \beta_b + \beta_c), \min(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)$$

Складывая каждое из выражений (1), (2), (3) получаем следующие ограничения снизу:

$$2(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c) \geq 6 + 14 + 16 = 36 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq 18$$

$$2(\beta_a + \beta_b + \beta_c) \geq 13 + 21 + 25 = 59 \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq 29,5,$$

$$\text{откуда } \beta_a + \beta_b + \beta_c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq 30$$

$$2(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c) \geq 11 + 13 + 28 = 52 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 26$$

Откуда:

$$\Rightarrow \min abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

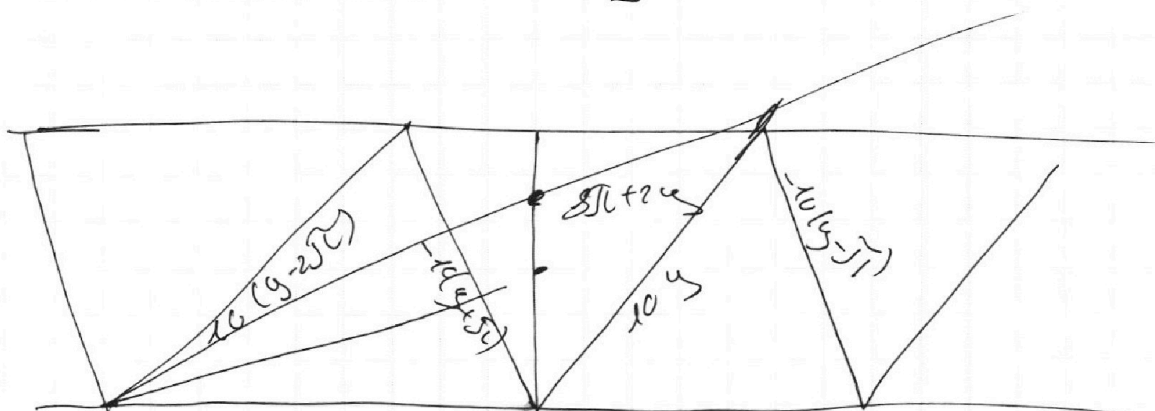


~3

$$10 \arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$10 \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\arccos(\cos y) = 8\pi + 2y$$



$$1) 8\pi + 2y = 10y \Rightarrow y = \pi \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\pi$$

$$2) 8\pi + 2y = -10(y - \pi) \Rightarrow 12y = 2\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{3}$$

$$3) 8\pi + 2y = 10(y + 2\pi) \Rightarrow 8y = 16\pi \Rightarrow y = 2\pi \Rightarrow$$

$$10y + 8\pi + 2y > 10\pi \Rightarrow \text{from previous } y = \frac{1}{12}\pi = -\frac{4}{3}\pi, x = \pi(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}) = \pi(\frac{3+8}{6}) = \frac{11\pi}{6}$$

$$4) 8\pi + 2y = -10(y + \pi) \Rightarrow 12y = -18\pi \Rightarrow y = -\frac{3}{2}\pi, x = \frac{2}{3}\pi$$

$$5) 8\pi + 2y = 10(y + 2\pi) \Rightarrow 8y = 8\pi - 20\pi \Rightarrow y = -1.5\pi, x = \frac{11\pi}{6}$$

$$6) 8\pi + 2y = -10(y + 3\pi) \Rightarrow 12y = 22\pi$$

$$12y = -38\pi \Rightarrow y = -\frac{38}{12}\pi = -\frac{19}{6}\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{19}{6}\pi = \frac{22}{6}\pi = \frac{11}{3}\pi$$

$$7) 8\pi + 2y = 10(y + 4\pi) \Rightarrow y = -4\pi, x = 4.5\pi \Rightarrow$$

Это последний случай, т.к. $8\pi + 2y$ уже обратится в 0, а решение существует только тогда, когда пересечение происходит при $y \geq -\frac{11}{6}\pi$

Ответ: $-\frac{1}{2}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, 2\pi, \frac{22}{6}\pi, 4, 5\pi$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 44) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

при задании параметра a , мы выбрали b сред и
вспрямляем с помощью тангенса наклона,
и если мы найдем тангенс прямого, это она
пересекает и (2) имеет 4 точки пересечения, $\Rightarrow$
подобный параметр a нам подходит

$$\begin{aligned} \text{в)}: 6ay &= b - 5x \Rightarrow y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \Rightarrow \\ -\frac{5}{6a} &= \text{tg наклона прямой при } a=c \Rightarrow \text{прямая } \perp \text{ оси } OX \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+3)^2 = 4 \end{cases}$$

крайние случаи касания касаются касаются соответственно

случаи касания о 2 радиусах окружности

внутреннее касание

угол φ (см рисунок)

этот случай тангенс

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{9^2 - 7^2}}{7} = \frac{\sqrt{32}}{7}$$

$$\Rightarrow \text{tg наклона} \in (-\infty; -\text{tg } \varphi) \cup (\text{tg } \varphi; +\infty)$$

$$-\frac{5}{6a} \in (-\infty; -\text{tg } \varphi) \cup (\text{tg } \varphi; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{6a}{5} \in \left(\frac{1}{\text{tg } \varphi}; \frac{1}{\text{tg } \varphi} \right)$$

подставляя $\frac{1}{\text{tg } \varphi} = \frac{7}{\sqrt{32}}$ получаем
ответ:

$$a \in \left(-\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{\sqrt{32}}; \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{\sqrt{32}} \right)$$



МФТИ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~ 5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{23} \frac{1}{121} - 5 = -2 \log_{23} 11$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{1}{23}\right) + \log_{11} x = \log_{\left(\frac{1}{23}\right)^3} (11^{-13}) - 5 =$$

$$-13 \log_{\left(\frac{1}{23}\right)^3} (11) - 5$$

$$x > 0 \quad \frac{1}{23} > 0 \quad x \neq 1 \quad y \neq 2 \quad \frac{1}{23} = 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + 2 \log_{11} x = \log_{11}^4 \frac{1}{11} + \log_{11} \frac{1}{23} + 13 \log_{11} \frac{1}{23}$$

$$\text{пусть } x = 11^a \quad \frac{1}{23} = 11^b$$

$$a^4 - 6 \frac{1}{a} = -\frac{2}{3} \frac{1}{a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} \frac{1}{b} - 5$$

$a \neq 0$ и $b \neq 0$
(привнеси недостающую)

$$3a^5 - 16 = -15a$$

$$3a^5 - 16 = -15a$$

$$3b^5 + 16 = -15b$$

$$3a^5 + 15a = 16$$

$$3b^5 + 15b = -16 \Rightarrow$$

Ф-ция монотонно растет $\Rightarrow \exists!$ единственное

число для a и b , которое можно указать по формуле

$\Rightarrow \exists!$ произведение ab

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

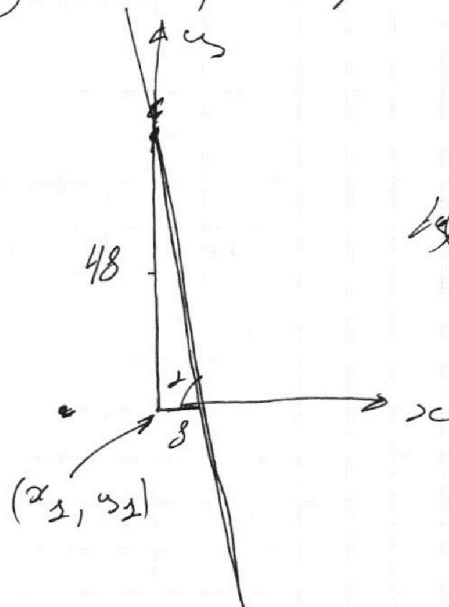
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пусть зафиксируем координаты x_1 и y_1 точки A
изобразим ГПГ, т.е. $6x_2 + y_2 = 48$



$$\angle 2 = 6$$

$$\angle 2) \frac{30}{17} < 6$$

y
 x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

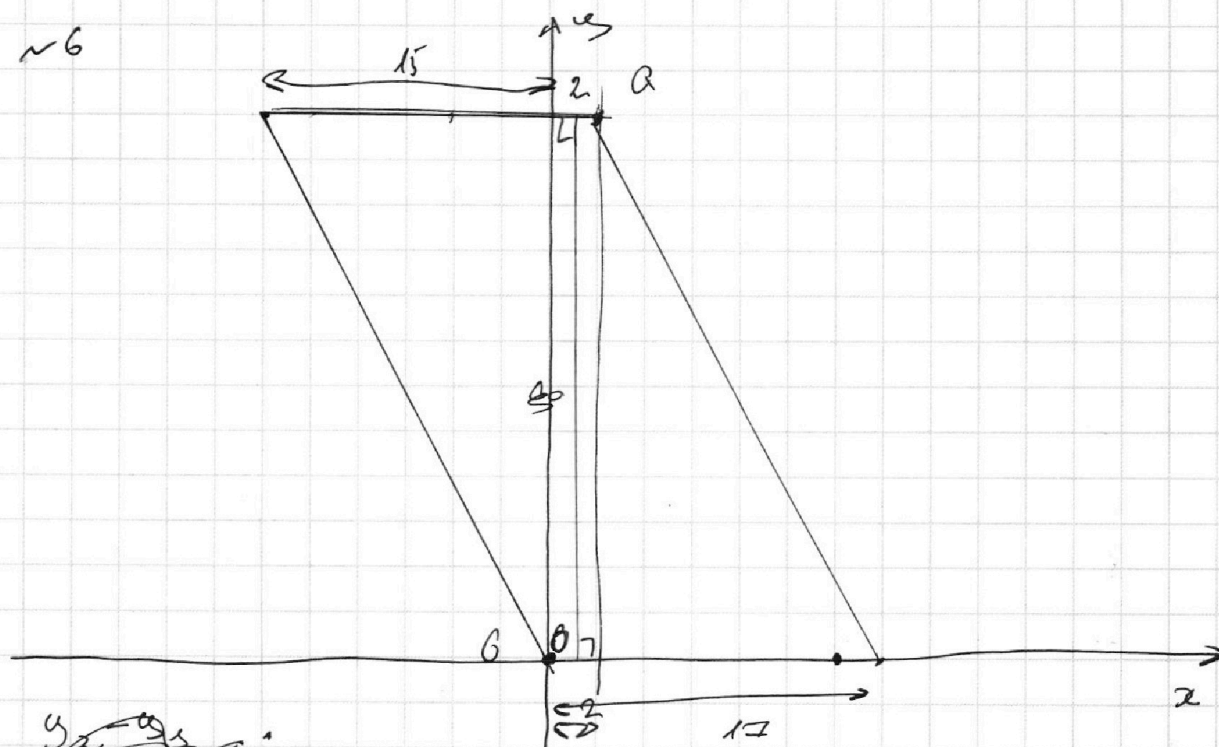
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~6



$y_2 - y_1 \equiv 0 \pmod{6}$, т.к. иначе

повышится $6x_2 - 6y_2 + y_2 - y_1$ нарушается, т.к. $x_2 - x_1$ оказывается нецелым числом

На границе ~~от~~ длины, отличной от 17 есть ровно

4 целые точки: ~~0, 0~~, C, P, Q, R, ~~0~~

для каждой точки ~~на границе~~ внутри параллелограмма
посчитаем кол-во точек, удовлетворяющих условию,
затем найдем сумму разделив на 2, т.к.
каждая пара учитывается дважды (или ~~каждый~~ если m, n
и m, n удовлетворяют условию, то и (m, n) и (n, m) удовлетворяют)

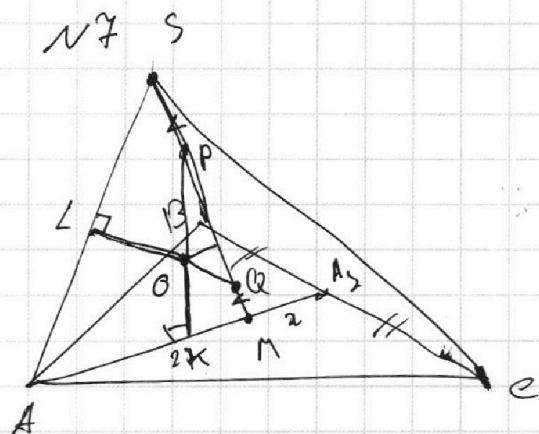
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

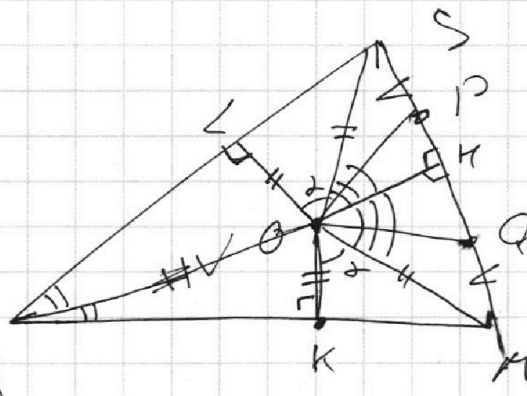
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



рассмотрим $\triangle ASM$



$PC = QO$ по условию $\Rightarrow$

$PH = HQ \Rightarrow SH = HM$

$PM = SP \Rightarrow SO = OM$

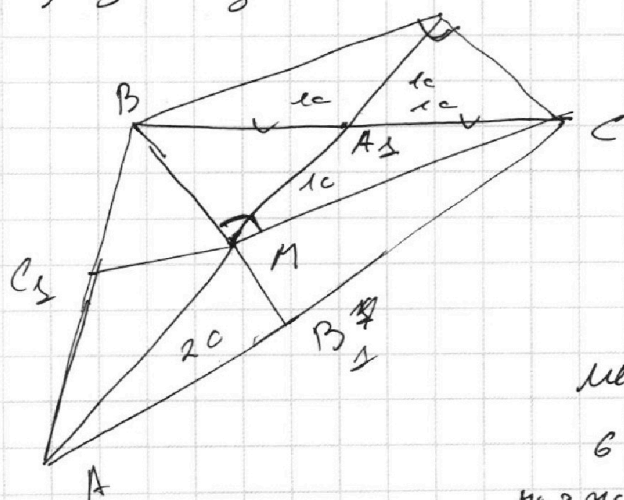
$\angle SAC = \angle HAO \Rightarrow \angle ACL = \angle ACK; \angle SCH = \angle HCM$ т.к.

$\triangle SCH = \triangle HCM \Rightarrow \angle SOL = \angle HOK \Rightarrow$
 $HC = OL$
 $MC = CS$

$\triangle ASM$ — п/б $\Rightarrow AM = 20$

рассмотрим $\triangle ABC$

медианы делятся точкой пересечения в отношении $2/1$: $2 \Rightarrow$



$BM = \frac{2}{3} BB_1$
 $MA_1 = 10 \Rightarrow$

$BM = \frac{2}{3} BB_1$

$CM = \frac{2}{3} CC_1$

т.к. $BC = 20, BA_1 = A_1C \Rightarrow$

$BA_1 = A_1C = \frac{BC}{2} = 10 \Rightarrow$

$\triangle BMC$ — п/б

медианы делятся точкой пересечения в отношении $2/1$: $2 \Rightarrow$

6 равновеликих частей $\Rightarrow$

т.к. 2 части ($\triangle BMC$) принадлежат $\frac{1}{3}$ площади

$\Rightarrow S_{BMC} = \frac{120}{3} = 60$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



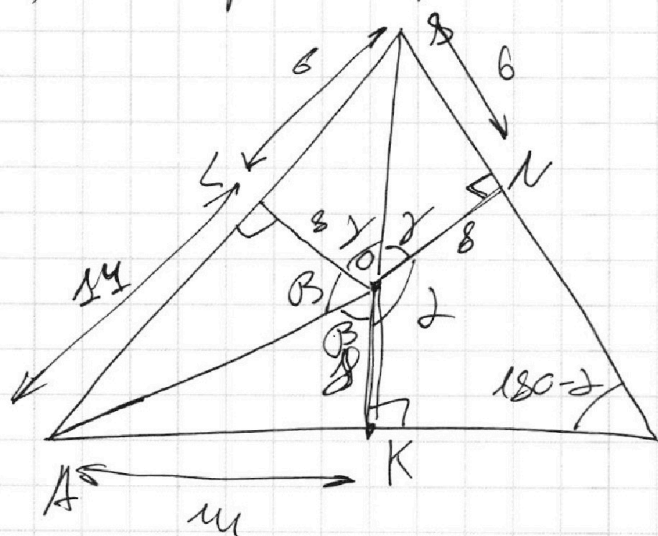
$$S_{\triangle B_1MC} = BM \cdot MC \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BB_1 \cdot CC_1 \Rightarrow 60$$

$$BB_1 \cdot CC_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 60 = 9 \cdot 30 = 270$$

$$AA_1 = 30 \Rightarrow$$

$$1) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 270 \cdot 30 = \underline{8100} \leftarrow \text{Ответ}$$

2) ~~Начиная~~ рассмотрим угол $\angle A_1SA_2$



$$\text{радиус} = 6 \Rightarrow$$

$$CL = CN = CK$$

$$SN = 6 \Rightarrow$$

$$SL = 6 \quad (\text{касательные к} \\ \text{сфере равнов})$$

$$\Rightarrow \angle A = 20 - 6 - 14 = \angle K$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{3}{4} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$2 = 180^\circ - 2 \arctg \gamma - 2 \arctg \beta$$

$\Rightarrow 180 - 2$ — острый угол, т.к. KO и ON — нормали

$$\Rightarrow \text{острый угол} = 180 - 2 = 2(\arctg \gamma + \arctg \beta) =$$

$$= \text{Ответ} = 2\left(\arctg \frac{3}{4} + \arctg \frac{7}{4}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~10~~

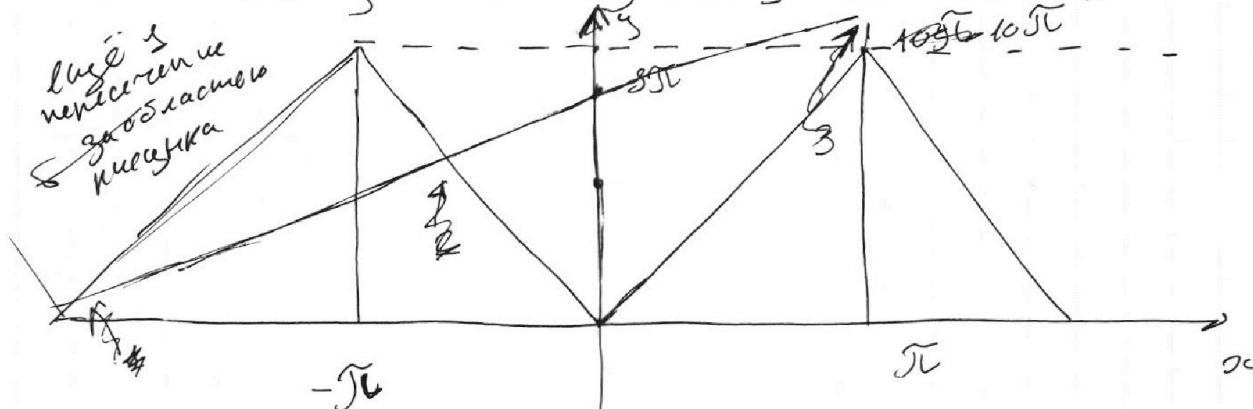
$$10 \arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$\text{пусть } x = \frac{\pi}{2} - y, \text{ тогда}$$

$$10 \arccos(\cos y) = 8\pi - \pi + 2y = 8\pi + 2y \Rightarrow y = \pi$$

$$10 \arccos \cos y = 8\pi - y \Rightarrow 10y = 8\pi \Rightarrow y = \frac{8\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$$

линии
пересечения
графиков
функций



рассмотрим ~~на~~ ~~некоторые~~ некоторые случаи

$$10(y + 2\pi) = 8\pi + 2y$$

$$12y = 8\pi - 20\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{10\pi}{3} = -\frac{19\pi}{6}$$

$$y = -\frac{19\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} + \frac{19\pi}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$$

$$10(y) = 8\pi + 2y \Rightarrow y = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

$$10(y + 4\pi) = 8\pi + 2y$$

$$8y = 8\pi - 40\pi \Rightarrow y = \pi - 5\pi = -4\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - (-4\pi) = \frac{9\pi}{2}$$

$$10(y + 6\pi) = 8\pi + 2y \Rightarrow 8y = 8\pi - 60\pi \Rightarrow y = \pi - 7\pi = -6\pi$$

таким образом пересечение происходит ~~и~~ при $y < 0 \Rightarrow$ не рассматриваем

$$10(y - 2\pi) = 8\pi + 2y \Rightarrow 8y = 18\pi \Rightarrow y = \frac{9\pi}{4}$$

$8\pi + 2y > 10\pi \Rightarrow$ этот случай не реализуется

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{10\pi}{3}, \frac{9\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 7

