МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1. $a^2b^2c^2 = ab \cdot bc \cdot ac \vdots 2^7 3^{11} 5^{14} \cdot 2^{13} 3^{15} 5^{18} \cdot 2^{14} 3^{17} 5^{43} = 2^{34} 3^{43} 5^{75}$.

Тогда $abc \vdots 2^{\lceil \frac{34}{2} \rceil} 3^{\lceil \frac{43}{2} \rceil} 5^{\lceil \frac{75}{2} \rceil} = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$. С другой стороны, $abc \vdots ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$.

Поскольку 2, 3 и 5 попарно взаимно просты, $abc \vdots 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Поскольку a, b и c натуральные, abc - натуральное, >0.

Тогда если $abc \vdots 2^{17} 3^{22} 5^{43}$, то $abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Заметим, что для

$$\left.\begin{array}{ll} a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}; & ab = 2^7 3^{11} 5^{14} \vdots 2^7 3^{11} 5^{14} \\ b = 2^3 \cdot 3^4; & bc = 2^{13} 3^{15} 5^{29} \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}; & ac = 2^{14} 3^{18} 5^{43} \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{array}\right\}$$ условие выполнено

$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$. - пример на минимальное значение оценки.

Тогда **ответ:** $2^{17} 3^{22} 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3.

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. Пусть $t = \frac{\pi}{4} - x$, тогда $\sin x = \cos t$.
$x = \frac{\pi}{4} - t$

$5\arccos(\cos t) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - t = \frac{7\pi}{4} - t$

Пусть теперь $t = k\pi + d$, где $k \in \mathbb{Z}$, $d \in [0; \pi)$

Тогда из определения $\arccos(\cos t) = \arccos(\cos d) = d$ при чётных k
$\arccos(\cos t) = \arccos(\cos(d+\pi)) = \arccos(-\cos d) =$
$= \pi - d$ при нечётных k.

Найдём ограничения k: из исходного ур-ия $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$;

тогда $-4\pi < -\frac{13}{4}\pi \le t \le \frac{7\pi}{4} < 2\pi$. Тогда $k \in [-4; 1]$.

$k = -4$: $5d = \frac{7\pi}{4} + 4\pi - d$; $6d = \frac{23\pi}{4}$; $d = \frac{23\pi}{24}$; $t = -3\frac{1}{24}\pi$; $x = 3\frac{7}{24}\pi$

$k = -2$: $5d = \frac{7\pi}{4} + 2\pi - d$; $6d = \frac{15\pi}{4}$; $d = \frac{15\pi}{24}$; $t = -1\frac{9}{24}\pi$; $x = 1\frac{13}{24}\pi$

$k = 0$: $5d = \frac{7\pi}{4} - d$; $6d = \frac{7\pi}{4}$; $d = \frac{7\pi}{24}$; $t = \frac{7\pi}{24}$; $x = -\frac{1}{24}\pi$

$k = -3$: $5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} + 3\pi - d$; $-4d = -\frac{\pi}{4}$; $d = \frac{\pi}{16}$; $t = -2\frac{15}{16}\pi$; $x = 3\frac{3}{16}\pi$

$k = -1$: $5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} + \pi - d$; $-4d = -\frac{9\pi}{4}$; $d = \frac{9\pi}{16}$; $t = -\frac{7}{16}\pi$; $x = \frac{11}{16}\pi$

$k = 1$: $5\pi - 5d = \frac{7\pi}{4} - \pi - d$; $-4d = -\frac{17\pi}{4}$; $d = \frac{17\pi}{16}$; $d > \pi$ — не подходит.

все остальные x, d, k, t удовл. условиям на них

Ответ: $x_1 = 3\frac{7}{24}\pi$
$x_2 = 1\frac{13}{24}\pi$
$x_3 = -\frac{1}{24}\pi$
$x_4 = 3\frac{3}{16}\pi$
$x_5 = \frac{11}{16}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [X] 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4. $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0. \end{cases}$

Посмотрим на графическое представление системы: второе уравнение задаёт две непересек. окр-ти: ω_1: центр $O_1(-7;0)$, радиус $r_1=2$

ω_2: центр $O_2(0;0)$, радиус $r_2=3$.

Первое уравнение задаёт прямую; если $a\neq 0$, то она не параллельна осям координат. Если $a=0$, то $x=7b$ – верт. прямая. Но у окружностей y-координаты центров совпадают, но пересечения нет, причём ни одна не лежит внутри другой. Тогда прямая $x=7b$, перпендикулярная их линии центров, не может пересекать обе окружности одновременно. Но с одной она имеет не более двух т.п., так что этот случай нам не подходит.

Теперь перепишем уравнение данной прямой как

$y = \frac{7b-x}{3a} = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}\cdot x$. Для каждого a параметр b задаёт семейство прямых с ~~заданным~~ фиксированным угловым коэффициентом $k=-\frac{1}{3a}$.

(они друг другу параллельны). Если какая-то из этих прямых может одновременно пересекать обе окружности, причём каждую в двух точках, то данное a нам подходит.

(продолжение на обороте)

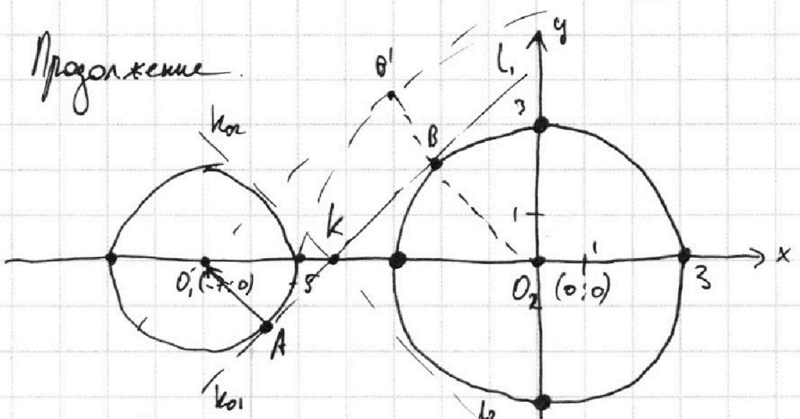
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4. Продолжение.



Заметим, что если существует прямая, перес. одну из окр-тей в двух точках и касающ. второй, то всегда можно сдвинуть её на $\varepsilon > 0$ в сторону той, которой касается, так, чтобы точек пересечения с первой осталось две, т.е. их станет четыре. (по соображениям непрерывности)

Тогда наше „граничное" K_0 соответствует общей касательной (внутренней, (иначе, проводя ~~прямую~~ прямую через т. K, получим 4 пересечения) их таких две). Найдём это K_0: ((см. рис.))

Отметим точки A, B (см. рис.)

Заметим, что ~~[illegible]~~

$$\overrightarrow{AO_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O_2B}, \text{ т.к. } \angle AO_1K = 90^\circ - \angle O_1KA = 90^\circ - \angle O_2KB = \angle KO_2B.$$

Тогда сдвиг на $\overrightarrow{AO_1}$ и гомотетия в O_2 с коэфф. $\frac{AO_1 + O_2B}{O_2B} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}$ переводят прямую l_1 в одну и ту же — касательную l_3 из $(-7;0)$ к окр-ти $\omega_3: O_3(0;0)$
$r_1 + r_2 = r_3 = 5.$

Найдём её угловой коэффициент: $l_3: y = (x+7)p;$

$\begin{cases} y = (x+7)p \\ y^2 + x^2 = 25 \end{cases}$ имеет одно решение: $x^2 - 25 + x^2p^2 + 14xp^2 + 49p^2 = 0$

и $D = 0 = 196p^4 - 4\cdot(49p^2 - 25)(p^2+1) =$
$= 4(25 + 25p^2 - 49p^2)$, т.е.
$24p^2 = 25,\ p = \pm\frac{5}{2\sqrt6}$

(знак минус соотв. второй касательной ((в неё при аналогичных действиях перешла бы l_2)))

Тогда видно, что $p \in \left(0; \frac{5}{2\sqrt6}\right) \cup \left(-\frac{5}{2\sqrt6}; 0\right)$; $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt6}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$ (обратная замена)

<u>Ответ:</u> $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt6}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
				X		

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_{y} 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4. \end{cases}$$

$] \; t = 6x \qquad x \neq \frac{1}{6}$

$t, x, y > 0, \; t \neq 1, \; y \neq 1.$

$$\begin{cases} \log_7^4 t - \frac{2}{\log_7 t} = \frac{1,5}{\log_7 t} - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{2,5}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

$$\log_7^4 t - \frac{3,5}{\log_7 t} = -4 = \log_7^4 y + \frac{3,5}{\log_7 y}$$

$$\begin{cases} \log_7^5 t - 3,5 = -4\log_7 t \\ \log_7^5 y + 3,5 = -4\log_7 y \end{cases}$$

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4(\log_7 y + \log_7 t).$$

невозм. $-\log_7^4 y - \log_7^3 y \log_7 t + \log_7^2 t \log_7^2 y - \log_7^3 t \log_7 y + \log_7^4 t = -4$

или $\log_7 yt = 0 \;\to\; yt = 1, \; \boxed{xy = \frac{1}{6}.}$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$O(0;0)$ $P(-17;68)$ $Q(2;68)$ $R(19;0)$.

$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40=(4x_2+y_2)-(4x_1+y_1)$.

Введём $f(x;y)=4x+y$ — функцию от координат точки.

Заметим, что для каждой точки A прямой, заданной ур-ием

$4x+y+c=0$ $f(A)=-c$ — const, и для всех прямых такого вида эта константа различается, т.е. $4x+y+c=0$ — ГМТ A: $f(A)=-c$.

Также заметим, что $f(O)=0=f(P)$, $f(Q)=f(R)=76$.

$OP: 4x+y=0$ $QR: 4x+y-76=0$.

Рассмотрим прямые вида $4x+y-k=0$, где $k\in 0,1,2,\dots,76$.

Каждая из них пересекает параллелограмм; более того, нетрудно видеть,

что любая целая точка пар-ма лежит ровно на одной из 77 прямых.

Назовём группу прямых семьёй, если у всех их k одинаковые остатки

при делении на 4. Получим 4 семьи: I $k=0,4,\dots,76$ — 20 прямых

II $k=1,5,\dots 73$

К первой семье относятся все целые III $k=2,6,\dots,74$ — по 19 прямых.

точки границы, поэтому на каждой IV $k=3,7,\dots 75$.

прямой семьи I $\frac{68}{4}+1=18$ точек.

На прямых всех остальных семей по 17 точек на каждой.

(под точками здесь, и далее подразумеваются целые точки пар-ма.)

(продолжение на обороте)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6. Продолжение.

Теперь заметим, что если ввести отдельную нумерацию для каждой семьи, то для каждой новой прямой k увеличивается на 4, а сним и f каждой точки прямой.

Тогда под условие подходят точки прямых одной семьи, с номерами (внутри семьи) отлич. на 10.

В I семье таких пар прямых $10: 1-11, 2-12, \dots 10-20$.

В остальных по 9. И для каждой прямой можно взять любую из её точек (подставить в условие).

Тогда всего таких пар точек $10 \cdot 18 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 17 =$

$= 3240 + 3 \cdot 289 \cdot 9 = 3240 + 3 \cdot (2601) = 3240 + 7803 = 11043$.

Ответ: 11043.

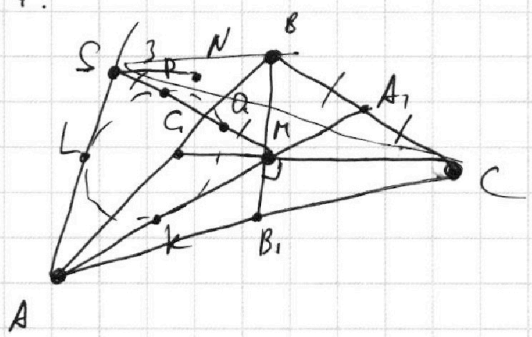
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7.



$S_{ABC} = 60$

$SA = BC = 10$

1) Рассмотрим плоскость (SAM): она пересекает сферу Ω по окружности ω. $AL = AK$; $SP = QM$, тогда $SP^2 + PQ \cdot SP = QM^2 + PQ \cdot QM$

$SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = \deg(S;\omega) = \deg(M;\omega)$ Тогда $SL^2 = MK^2$ (отрезки касат.) $SL = MK$.

$AL = AK$ (отрезки касат.); тогда $AS = AM = BC = 10$.

$AM = \frac{2}{3} AA_1$ по св-ву медианы; $AA_1 = 15$ и $MA_1 = 5 = \frac{BC}{2}$.

Тогда в $\triangle BMC$ медиана равна половине стороны, к которой проведена.

Тогда он п/уг, $\angle MC = 90°$. Тогда $BM \cdot MC = 2\frac{S_{BMC}}{1} = 2\frac{S_{ABC}}{1 \cdot 3} =$ (по св-ву медиан)

$= 40$. $BB_1 \cdot CC_1 = \frac{9}{4} \cdot 40 = 90$. $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350$.

(поскольку $BM^2 + MC^2 = 10^2 = 100$, BM и MC – $\sqrt{20}$ и $\sqrt{80}$, б.о.о. $BM = \sqrt{20}$, $MC = \sqrt{80}$).

а) Ответ: 1350.

2) $SN = 3$ = длина касат. из S к Ω = $SL = MK = 3$.

$AL = LK = 10 - 3 = 7$. Пусть O – центр Ω. $SO = \sqrt{SL^2 + r^2} = 5$.

$MO = \sqrt{KM^2 + r^2} = 5$.

$B_1C = \sqrt{MC^2 + B_1M^2} =$ $= \sqrt{80 + 5} = \sqrt{85}$

$AC = 2\sqrt{85}$

$BC_1 = \sqrt{BM^2 + MC_1^2} = \sqrt{40}$.

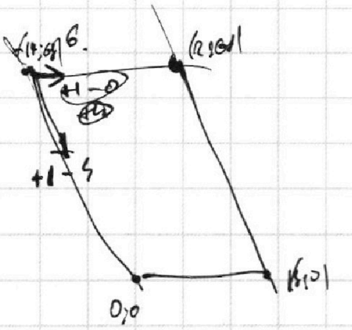
$MC_1 = \sqrt{20} = BM$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$4x_2+y_2 = 4x_1+y_1+40.$

Введём координаты || сторонам

18 точек на каждой

всего их 20.

разность 40 — через 5 прямых

и ещё при сдвиге на $\frac{k}{4}$ они будут пересекаться, так по точек на 19.

1 -> 6

2 -> 7 ... 13 -> 18

14 -> 19

15 -> 20.

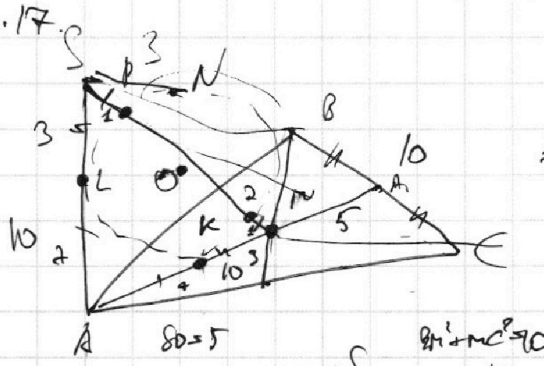
$15\cdot18\cdot18$

$324-289=35.$

$3\cdot17\cdot17\cdot(19-5).$

$15\cdot18\cdot18+42\cdot17\cdot17.$

$15\cdot35+57\cdot289.$



$\triangle BMC$ — пр/уг

$\frac{1}{2}BM\cdot MC = S_{MBC} = \frac{1}{3}S$

$BM\cdot MC = 40$

$\frac{4}{3}$ площ BM_1CC_1

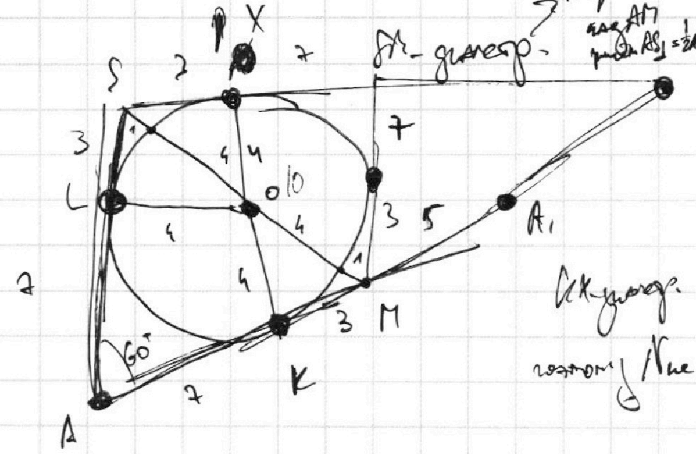
$90\cdot15 = \boxed{1350}$

$BM^2+MC^2=90$

$BM = \frac{10}{MC}$

$\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}$

$80=5$



SM — диаметр

$\frac{1600}{x}+x=100$

$x^2-100x+1600=0$

$D=10^4-64\cdot10^2 = 3600=60^2$

$x=\frac{100+60}{2}$, $x=80$

KK — диаметр

поэтому $N \in$ (SAK).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\log_7^4 t - \frac{2}{\log_7 t} = \frac{1,5}{\log_7 t} - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{2,5}{\log_7 y} - 4.$$

$$\log_7^4 t - \frac{3,5}{\log_7 t} = -4 = \log_7^4 y + \frac{3,5}{\log_7 y}.$$

$$\cancel{\log_7^4 t + \log_7^4 y = 3,5} \qquad \log_7^4 t - \log_7^4 y = \cancel{\frac{3,5}{\log_7 yt}} \frac{3,5}{\log_7 t} + \frac{3,5}{\log_7 y}$$

$$(\log_7 t - \log_7 y)(\log_7 t + \log_7 y)(\log_7^2 t + \log_7^2 y) = 3,5 \cancel{\frac{\log_7 t + \log_7 y}{\log_7^2 t \cdot \log_7^2 y}}$$

$$(\log t + \log y)^2 (\log t - \log y) = \frac{3,5}{\log_7 t \log_7 y} + 2\log y t (\log t - \log y).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^2b^2c^2 : 2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{14+18+43}$, но $a^2b^2c^2 : a^2c^2 : 2^{28}3^{34}5^{86}$.

$abc : 2^{17}3^{22}5^{43}$

$abc : ac : 2^{14}3^{17}5^{43}$, $abc > 0$, $abc \geq 2^{13}3^{17}3^{11}$. $\exists$ ~~$a = 2^7 3^{18} 5^{14}$~~

$a = 2^{x}3^{y}5^{z}$ $\quad x+d \geq 7$ или $x+d+p = 17$ ~~$a = 2 \cdot 3^2$~~

$b = 2^{d}3^{e}5^{f}$ $\quad d+p \geq 13$ $\quad z+f \geq 14$ ~~$b = 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$~~

$c = 2^{p}3^{q}5^{r}$ $\quad x+p \geq 14$ $\quad f+r \geq 18$ $\quad z+f+r \geq 38\frac{75}{2}$ ~~$c = 2$~~

$y+e \geq 11$ $\quad y+e+q \geq 22$ $\quad r \geq 2343$

$e+q \geq 15$

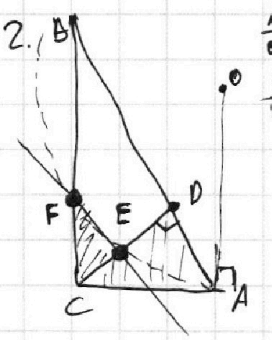
$y+q \geq 17$

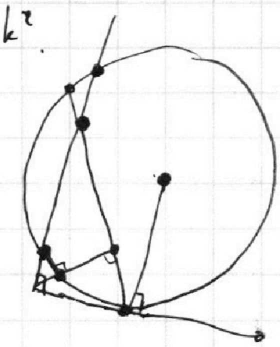
$$\begin{array}{ll} a & 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14} \\ b & 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \\ c & 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29} \end{array}$$

достигается.

2. $\frac{AP}{BD} = \frac{13}{10}$ $\quad \frac{AD}{BP} = \frac{3}{10}$

$\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = k^2$.





3. $5\arccos|\sin x| = \frac{3\pi}{2} + x$. $\quad -\frac{3\pi}{2}$ $\qquad \arccos|d| \in [0; \pi]$.

пролает угол от 0 до π. $\quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7}{2}\pi\right]$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. $\qquad x = \frac{6\pi}{24} - t$.

~~$\arccos|\sin x| + \arcsin|\sin x| = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.~~ $\quad$ ~~$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2}+x)$~~ $\quad 5\arccos\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right| = 5t$ $\quad -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - t$

~~$\frac{5\pi}{2} - 5\arcsin|\sin x| = \frac{3\pi}{2} + x$.~~ $\qquad 6t = \frac{7\pi}{4}$, $t = \frac{7\pi}{24}$

~~$\pi = 5\arcsin|\sin x| + x$. $\quad x = 2\pi n + d, d \leq 2\pi$ $\quad \pi = 5\arcsin|\sin d| + 2\pi n + d$.~~

$t \in \left[-\frac{13\pi}{4}; +\frac{7\pi}{4}\right]$. $\quad$ ~~$t \in \left[-\frac{13\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}\right]$; $5\arccos|\cos t| = t + 4\pi$~~ $\qquad x = \frac{6\pi}{24} - \frac{7\pi}{24} = -\frac{\pi}{24}$

$-4\pi \quad 2\pi$

$t = k\pi + d$ $\quad \arccos|\cos t| = d$ $\quad 5d + d - k\pi = \frac{7\pi}{4}$.

$k \in (-4; 1]$ $\quad 7 - 4k$ $\quad d = \frac{(7-4k)\pi}{24}$ $\quad d \in (0; \pi]$.

брать $\quad 7-4k < 24$

$7+16 = 23 < 24$.

$7-4 \geq 0$

$t_1 = -4\pi + \frac{23}{24}\pi$ $\qquad x_1 = 4\pi - \frac{17\pi}{24}$

$t_2 = -3\pi + \frac{19\pi}{24}$ $\qquad x_2 = 3\pi - \frac{13}{24}\pi$

$t_3 = -2\pi + \frac{15\pi}{24}$ $\qquad x_3 = 2\pi - \frac{9}{24}\pi$

$t_4 = -\pi + \frac{11\pi}{24}$ $\qquad x_4 = \pi - \frac{5\pi}{24}$

$t_5 = 0 + \frac{7\pi}{24}$. $\qquad x_5 = -\frac{\pi}{24}$

$t_6 = \pi + \frac{3\pi}{24}$. $\qquad x_6 = -\pi + \frac{3\pi}{24}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$

$((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0.$

окружность $(-7;0)$ $R=2$; окр-ть $(0;0)$ $R=3$ — не пересек.

$a=0$: $x=7b$

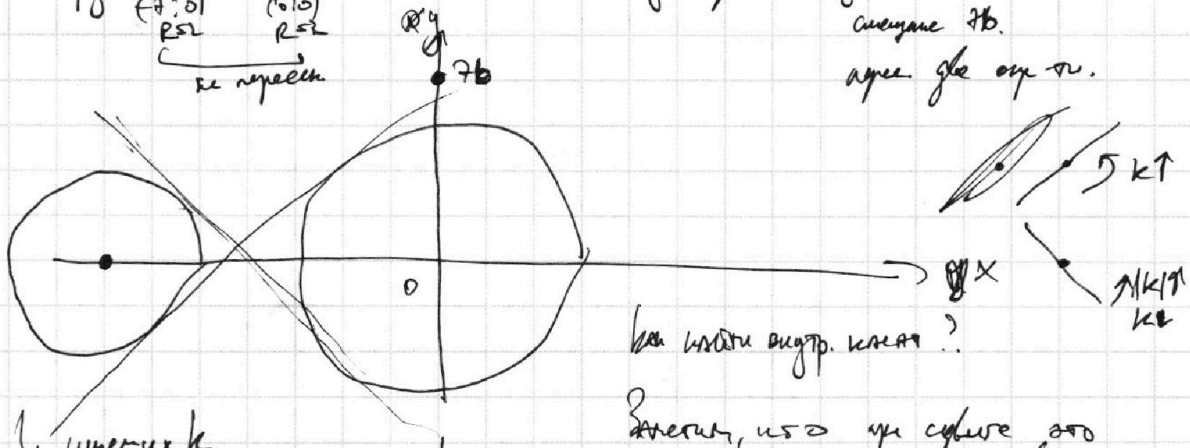
0 – 2 решения.

$x=7b-3ay$

$y=\frac{7b-x}{3a}=\frac{7b}{3a}-\frac{x}{3a}$

$x=7b-3ay$: прямая, угловой $-3a$ смещение $7b$.

через две окр-ти.



l_1 изменение k. l_2.

Как найти внутр. касат?

Заметим, что при сдвиге это касат. к $R=5$ $(0;0)$ из точки $(-7;0)$

$y=(x+7)a$ $x^2+y^2=25$

$y=(x+7)a$, $y^2=25-x^2$.

одно решение

$x^2+(x+7)^2a^2=25$

$D=\cancel{49a^2-8\cdot(49a-25)}=0.$

$49a^2-2\cdot49a+200=0.$

$7^2(a^2-1)^2$

$\cancel{2x^2-14a^2x+49a-25=0}$

$x^2(a^2+1)+14a^2x+49a^2-25=0$

$D=49a^4-(a^2+1)(49a^2-25)=0$

$49a^4-49a^4-49a^2+25a^2+25=0$

$24a^2=25$

$a=\pm\sqrt{\frac{25}{24}}=\pm\frac{5}{2\sqrt6}$

$\frac{1}{3a}\in\left(0;\frac{5}{2\sqrt6}\right)$

$\frac{1}{3a}\in\left(-\frac{5}{2\sqrt6};0\right)$

$a\in\left(\frac{2\sqrt6}{15};+\infty\right)$

$a\in\left(-\infty;-\frac{2\sqrt6}{15}\right)$

$\log_7^4 t-\log_t 7^2=\log_{t^2}7^3-4$

$\log_7^4 y+\log_y 7^6=\log_{y^2}7^5-4.$

$t>0,\ t\neq1$

$y>0,\ y\neq1.$

$\log_7 t,\ \log_7 y\neq0$

$a,b\neq0$

$\log_7^4 t-\frac{1}{2\log_7 t}=\frac{1}{1{,}5\log_7 t}-4$

$\log_7^4 y+\frac{1}{6\log_7 y}=\frac{1}{2{,}5\log_7 y}-4.$

$a^4-\frac{1}{2a}=\frac{1}{1{,}5a}-4$ $\quad a^5+4a-\frac{7}{6}=0$

$b^4+\frac{1}{6b}=\frac{1}{2{,}5b}-4.$ $\quad b^5+4b-\frac{7}{30}=0$

монотонные.

$a^5+4a-5b^5+20b=\frac{?}{6}$