



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} & (1) \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} & (2) \\ ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} & (3) \end{cases}$$

Сначала найдем мин. степень 2, которая может входить в $a \cdot b \cdot c$. Докажем, что это 21. Пусть возможна получит меньшая степень 2. Тогда max. степень вхождение 2-ки в b^* равна 7 (т.к. $ac : 2^{19}$). Тогда min. степень вхождение 2-ки в c^* равна 13 (из (2)), а min. степень вхождение 2-ки в a^* равна 8. Но $13+8 \geq 21 \Rightarrow$ степень 2-ки, меньшая 21, в произведении abc получит нелогич.

Теперь найдем мин. степень 3, которая может входить в $a \cdot b \cdot c$. Док. что это тоже 21. Пусть возможна получит меньшая степень 3. Тогда max. степень вхождение 3-ки в b^* равна 2 (т.к. $ac : 3^{18}$). Тогда min. степень вхождение 3-ки в c^* равна 11 (из (2)), а min. степень вхождение 3-ки в a^* равна 8. $11+8+2$ уже равно 21, а если степень вхождение 3-ки в b^* уменьшить, то на столько же будет уменьшена степень вхождение 3-ки в a^* , так и в $b^* \cdot c^*$, т.е. степень вхождение 3-ки в произведении $a \cdot b \cdot c$ будет расти. Значит степень 3-ки, меньшая 21, в произведении abc получит нелогич.

Теперь найдем мин. степень 5, которая может входить в $a \cdot b \cdot c$. Док. что это 30. $ac : 5^{30} \Rightarrow$ min. степень вхождение 5-ки в $a \cdot b \cdot c$ равна 30.

Пример, когда степень вхождения 2-ки и 3-ки = 21, а степень вхождения 5-ки = 30: $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$; $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$;

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}. Тогда ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10};$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad (\text{предельное})$$
$$, ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}.$$

Ответ: abc мин. зн. e abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}.



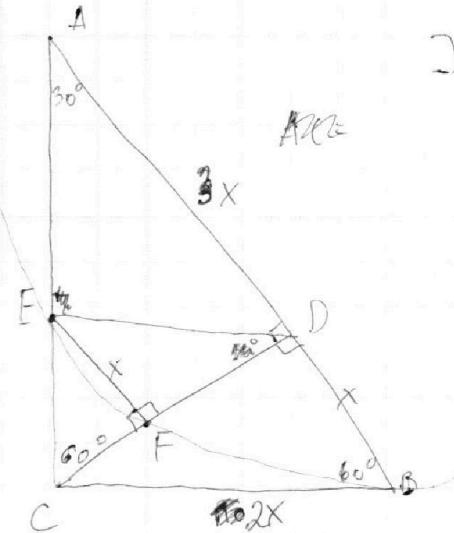
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BD = x. \text{ Тогда } AD = 3x \Rightarrow \cancel{\text{Берёзка}}$$

$$\cancel{\text{Берёзка}} \quad BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x.$$

~~Алгоритм~~

Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC =$

~~$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$~~

$$\text{Тогда } AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x.$$

$$\cos \angle CBD = \frac{DB}{CB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CBD = 60^\circ. (B - \text{касательное}$$

угр-ни) $\Rightarrow \angle EDF = \angle CBD = 30^\circ$ (плечи в симметрическости).

Тогда $\angle AED = 90^\circ$ по сумме углов 1.

$$ED = 3x \sin 30^\circ = \frac{3}{2}x. \quad B \cdot \tg 30^\circ = \frac{EC}{ED} \Rightarrow EC = \frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$CF = EC \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x. \quad EF = EC \sin 60^\circ = \frac{3}{4}x.$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2. \quad \text{Тогда:}$$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{32}{3}.$$

$$\Rightarrow EDBF - \text{трап.} \Rightarrow EF = DB = x. \quad \text{Тогда} \quad \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{9} (\text{окн})$$

$$\text{подобие } (k=3). \quad \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{9\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12. \quad \text{Ответ: 12.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ~~ $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow \operatorname{arcsinh}(\cos x)$ определен при
и $\exists n \text{-ии } \cos x$. Возможны случаи от деления на ноль. В таких
случаях будем пропускать, пока не получится корень удовлетворяющий
исходному уравнению (или отбросить):

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos}(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad (\text{но } \text{обозначим } \operatorname{arcsinh} u \text{ и } \operatorname{arccos} u \\ \operatorname{arcsinh} u + \operatorname{arccos} u = \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \operatorname{arccos}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = x + 5 \operatorname{arccos}(\cos x)$$

$$x \in [2\pi n; 3\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi = x + 5x = 6x \Leftrightarrow$$

$$2\pi = x - 5x = -4x$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$. Данный корень
принадлежит рассматриваемому
промежутку и удовлетворяет
исходному уравнению.

$x = -\frac{\pi}{2}$. Данный корень
принадлежит рассматриваемому
промежутку и удовлетворяет
исходному уравнению.

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

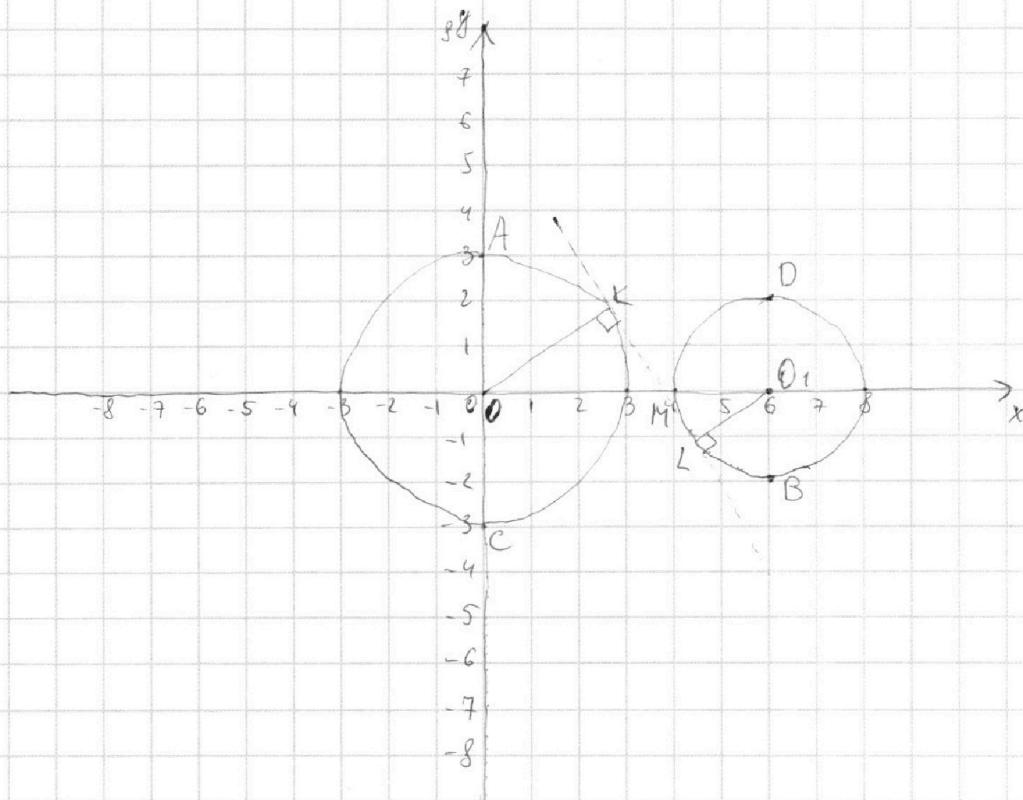
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array} \right. \quad (2)$$

(2) ур - с представлена в виде объединение 2-х окр-гей:

$$x^2+y^2=9 \text{ и } (x-6)^2+y^2=4.$$



$2y = -ax + 3b$, $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$ - это прямая. Система имеет
4 решения \Rightarrow она должна пересекать каждую из окр-гей в 2-х
точках. Коэффициент b и.д. \Rightarrow нужно все возможные
коэффициенты перед x , при которых прямая сечет обе
окр при 1 "б" пересекать каждую окр-ть в 2-х точках.

т.е. нужно найти коэффициент нахождения касательных

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Этих двух окр-тей ($y \in \text{II}$ "внешней") касательной из-за симметрического расположения окр-тей относят. Ок. касательной к линии x будет таким же по модулю, но противоположным по знаку).

Обозначим некоторые точки, как на рис. (K и L — Т. касания),

т. М — пересеч. Ox и KL . $\Delta OKM \sim \Delta O_1LM$ ($O_1L \parallel OK$) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{OK}{O_1L} = \frac{OM}{MO_1} \quad \frac{3}{2} = \frac{OM}{MO_1} \quad MO_1 = 6 - OM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{OM}{6 - OM}. \text{ Тогда } 18 - 3OM = 2OM \Leftrightarrow OM = \frac{18}{5}.$$

Тогда касательная к линии x имеет Поставим коэффициенты

т. М в (1): $ax + 2y - 3b = 0$

$$\frac{18}{5}a - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{6a}{5}.$$

Теперь подставим " y " в каждую из 2 окр-тей:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 = 9 \quad (3) \\ (x-6)^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 = 4 \quad (4) \end{array} \right. \text{ решение относит. } x \text{ (касательная).}$$

$$(3): x^2 + \frac{a^2 x^2}{4} + \frac{9b^2}{4} - \frac{3ab}{2}x - 9 = 0$$

$$D = \frac{9a^2 b^2}{4} - 4\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = 0$$

$$\cancel{\frac{9a^2 b^2}{4}} - \cancel{9b^2} + 36 - \cancel{\frac{9a^2 b^2}{4}} + 9a^2 = 0$$

$$a^2 + 4 = b^2 \quad (35) \cancel{b = \frac{6a}{5}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2 + 4 = \frac{36a^2}{25} \quad \text{Тогда}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(4) : \cancel{x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2 x^2}{4} + \frac{9b^2}{4} - \frac{3ab}{2} x - 4 = 0}^{\text{(предыдущие №2)}}$$

$$D = 144 + \cancel{\frac{9a^2 b^2}{4}} + 36ab - 4 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = 0$$

$$144 + \cancel{\frac{9a^2 b^2}{4}} + 36ab - 9b^2 - 128 - \cancel{\frac{9a^2 b^2}{4}} - 32a^2 = 0$$

$$32a^2 + 9b^2 - 36ab - 16 = 0$$

$$32a^2 + 9b^2 - 36ab + 20 = 0$$

$$4(a^2 - 9ab + 5) = 0$$

Обозначим некоторые точки, как на рис. (KuL - т.касание,
 $T.M$ - т.пересеч. Ox и KL , $\Delta OKM \sim \Delta O_1M_1M$ (O_1, M и O, K) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{OK}{KL} = \frac{3}{2} = \frac{OM}{MO_1}. \text{ Но } MO_1 = 6 - OM \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{OM}{6 - OM}.$$

Тогда $18 - 3OM = 2OM \Rightarrow OM = \frac{18}{5}$. Делая вспомогательные
ч.н.в (1): $aK + 2y - 3b = 0$.

$$\frac{18}{5}a - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{6a}{5}.$$

Тогда подставим это в (1):

$$a^2 + 4 = \frac{36a^2}{25} \Rightarrow 4 = \frac{11}{25}a^2. \text{ Тогда } a^2 = \frac{100}{11}, \text{ значит}$$

$$a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

Тогда нам подходит все $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$. (при $a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$

прямая будет касаться этих двух окр-тий, при $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$ у прямой
будет 4 т.пересеч с этими окр-тиями, а при $a \in (-\infty, -\frac{10}{\sqrt{11}}) \cup$
 $(\frac{10}{\sqrt{11}}, +\infty)$ у прямой будет макс. 2 пересеч. с этими окр-тиями.

Ответ: $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1): \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

OD3:

$x > 0, y > 0$

$x \neq 1$

$y \neq \frac{1}{5}$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\cancel{\log_3^4 x} + \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0 \quad (\log_3 x \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1). \quad (3)$$

$$(2): \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) - 7 = 0 \quad (\log_3 (5y) \neq 0). \quad (4)$$

(3)+(4):

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) = 0$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 (5y) + 8 \log_3 (5xy) = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

$$\log_{5xy} \log_3^5 x + \log_3^5 (5y) + 8 \log_3 x + 8 \log_3 (5y) = 0$$

$$t = \log_3^5 x, q = \log_3 (5y)$$

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$

(x. Доржира. относит.)

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$

$$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) t = -q$$

(*предположение*)

Сх. Точки на t относят t .

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & q^5 + 8q \\ -q & 1 & -q & q^2 & -q^3 & q^4 + 8 & 0 \end{array}$$

Возьмем производную по t и $y'_{t=0} = t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$.

$$5t^4 + 8 + q^5 + 8q = 0. \quad t^4 = \frac{-q^5 - 8q - 8}{5} < 0, \text{ т.к. } q > 0.$$

$t^4 < 0 \Rightarrow 0$. Если взять производную по q , мы приедем к максимуму же производной, т.к. ун-е симметрично относ. t и q .

Значит данная ф-я всегда возрастает и она может иметь макс. 1 (и ровно 1) пересеч. с Ox . И это достигается при $t = -q$:

$$\log_3 x = -\log_3 (5y)$$

$$\log_3 (5xy) = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Одн. реш}: \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

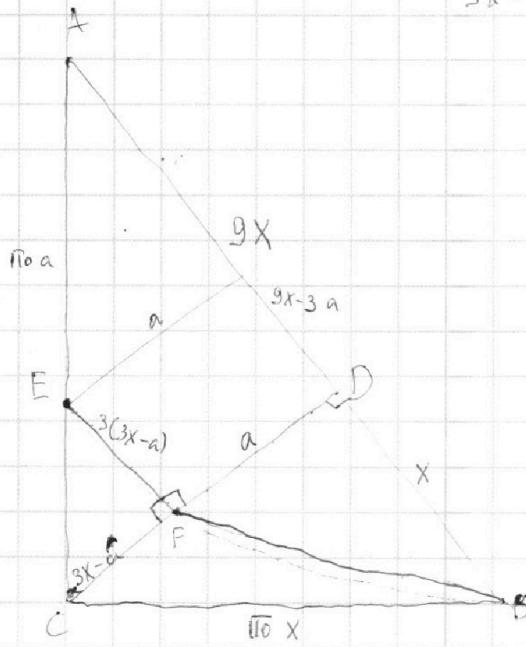
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

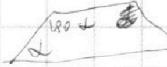
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x = \sqrt{x \cdot 9x}$$

$$10x^2 +$$

$$CB^2 = CF^2 + FD^2$$



$$\begin{aligned} \tan F &= 3 \\ \frac{x}{3x-a} &=? \\ \cos F &= \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin F &= \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$AE = \sqrt{a^2 + 9a^2} = \sqrt{10} a$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3x-a}{CE}$$

$$CE = 3\sqrt{10}x - \sqrt{10}a$$

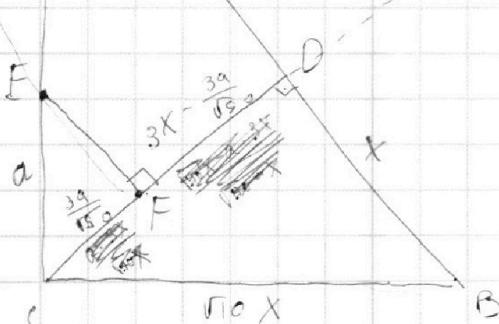
$$5t^4 + 8t^5 + 8t^8 + q^5 + 8q^8 = 0$$

$$t^4 = \frac{-q^5 - 8q^8 - 8}{5} < 0$$

$$10x^2 =$$



$$4(a^2) + \frac{216a^2}{5} + 20 = 0$$



$$\frac{q}{\sqrt{10}x-a} = \frac{CF}{FD} =$$

$$= \frac{3x}{FD} - 1$$

$$\frac{3x}{FD} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{10}x-a}$$

$$\begin{aligned} FD &= \frac{3(\sqrt{10}x-a)}{\sqrt{10}} \\ &= 3x - \frac{3a}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

этих двух окр-тей. (Вдоль II винтажной касательной из-за симметричного расположения окр-тей относит. Ок коэффициент при x будет таким же по модулю, но противоположным по знаку).

Поставим y^2 в квадре из 2 ур-й окр-тей:

$$\begin{cases} x^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b\right)^2 = 9 \quad (3) \\ (x-6)^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b\right)^2 = 4 \quad (4) \end{cases}$$

Квадре из них должны иметь 1 реш.

(3):

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0 \quad D = 1296 - 4 \cdot 32 \cdot (9b^2 - 16)$$
$$D_1 = \frac{9a^2 b^2}{4} - 4 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{9b^2}{4} = 0 \Rightarrow = 1296 - 64 \cdot 32 \cdot 9b^2$$

$$\frac{9a^2 b^2}{4} + 32 - a^2 - 36^2 = 0 \quad \begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ 216 \\ 108 \\ 1296 \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ 32 \\ 128 \\ 192 \\ 2098 \end{array} \quad 1296 - 3280$$

$$9a^2 b^2 + 128 + 9a^2 b^2 + 128 = 0$$

$$(4): \quad x^2 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) - x \left(12 + \frac{3ab}{2}\right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$
$$x^2 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) - x \left(12 + \frac{3ab}{2}\right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D_2 = 144 + 36ab + \frac{9a^2 b^2}{4} - 4 \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = 0$$

$$D_2 = 144 + 36ab + \frac{9a^2 b^2}{4} - 36^2 - 128 - \cancel{\frac{3a^2 b^2}{4}} - 32a^2 = 0$$

$$\frac{3a^2 b^2}{2} - 32a^2 - 36^2 + 36ab + 16 = 0 \quad (5)$$

$$D_1 = \frac{9a^2 b^2}{4} - 36^2 + 36 - \frac{9a^2 b^2}{4} + 9a^2 = 0$$

$$\frac{3a^2 b^2}{2} + 9a^2 - 36^2 + 36 = 0 \quad (6)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{t^5}{q^3 t^3} + \frac{q^5}{q^3 t^3} = \frac{st}{q^3 t^3} + \frac{8q}{q^3 t^3} = a(t) (q \neq 0, t \neq 0)$$

$$\frac{t^2}{q^3} + \frac{q^2}{t^3} + \frac{8}{q^3 t} + \frac{8}{t^3 q^2}$$

Cx. Торнера (относит. t)

$$1) t = -q$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & q^5 + 8q \\ -q & 1 & -q & q^2 & -q^3 & q^4 + 8 & 0 \end{array}$$

$$t^4 - q t^3 + q^2 t^2 - q^3 t + q^4 + 8 = 0$$

$$(t^2 + q^2)^2 - q^2 t^2 - q t (t^2 + q^2) + 8 = 0$$

$$(t^2 + q^2)^2 - q t (t^2 + q^2 + q t) + 8 = 0$$

Пусть $k = t^2 + q^2$, $\ell = q t$.

$$k^2 - \ell(k + \ell) + 8 = 0 \quad k^2 - \ell k - \ell^2 + 8 = 0$$

$$\text{Относит. } k : D = \ell^2 + 4\ell^2 - 32 = 5\ell^2 - 32 \quad \text{если } D \geq 0 \Rightarrow \ell \geq \sqrt{\frac{32}{5}} (q \neq 0)$$

$$k = \frac{\ell \pm \sqrt{5\ell^2 - 32}}{2}$$

$$\text{Относит. } \ell : D = k^2 + 4k^2 + 32 = 5k^2 + 32 > 32, \quad k > 0$$

$$\ell = \frac{k \pm \sqrt{5k^2 + 32}}{2} = \frac{-k \pm \sqrt{5k^2 + 32}}{2}. \quad \ell > 0 \Rightarrow \ell = \frac{-k + \sqrt{5k^2 + 32}}{2}$$

Из этого получаем, что $k = \ell \cdot m$, где $m \neq 2$ (если $t \neq -q$)

$$\text{Тогда : } t^2 + q^2 = mq t \Leftrightarrow (t - q)^2 + (2 - m)qt = 0. \quad \begin{cases} 2 - m > 0 \\ (t - q)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow данное квадратное уравнение не имеет решений. Тогда :

$$\log_3 x = -\log_3 (sy) \Rightarrow \log_3 (sx y) = 0 \Rightarrow x \cdot sy = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(6) - (5):

$$4(a^2 + 20 + 36ab = 0 \Rightarrow)$$



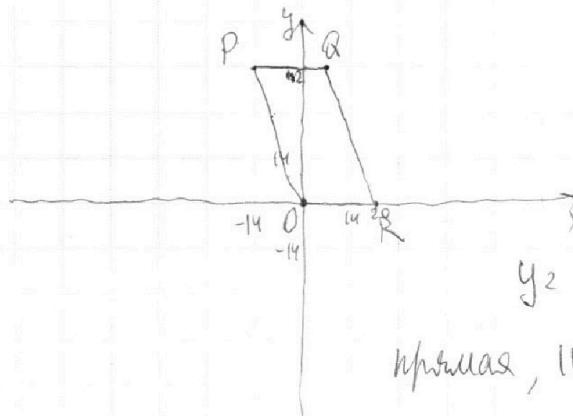
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 : 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y_2 - y_1| : 3. \text{ Пусть } y_2 = y_1 + 3k, k \in \mathbb{N}.$$

Будем рассматривать y_1 , меньшие

y_2 на $3k$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что

прямая, || Ox , пересекает данный отрезок и

пересек. наимн., имеем с ними ровно 21 общ. точку, если ~~координата~~ координата по Oy этой прямой $: 3$, и ровно 20 общ. точек, если координата по Oy этой прямой $/ 3$. Так $y_1 \in \{39, 36, \dots\}$.