МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10} & (1) \\ bc \vdots 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} & (2) \\ ac \vdots 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} & (3) \end{cases}$$

Сначала найдем min. степень 2, которая может входить в $a \cdot b \cdot c$. Докажем, что это 21. Пусть возможно получить меньшую степень 2. Тогда max. степень вхождения двойки в „b" равна 1 (т.к. $ac \vdots 2^{19}$). Тогда min. степень вхождения 2-ки в „c" равна 13 (из (2)), а min. степень вхождения 2-ки в „a" равна 8. Но $13+8 \geq 21 \Rightarrow$ степень 2-ки, меньшую 21, в произведении abc получить нельзя.

Теперь найдём min. степень 3, которая может входить в $a \cdot b \cdot c$. Док., что это тоже 21. Пусть возможно получить меньшую степень 3. Тогда max. степень вхождение 3-ки в „b" равна 2 (т.к. $ac \vdots 3^{18}$). Тогда min. степень вхождения 3-ки в „c" равна 11 (из (2)), а min. степень вхождения 3-ки в „a" равна 8. $11+8+2$ уже равно 21, а если степень вхождения 3-ки в „b" уменьшать, то на столько же будет увелич. как степень вхождения 3-ки в „a", так и в „c", т.е. степень вхождения 3-ки в произведение $a \cdot b \cdot c$ будет расти. Значит степень 3-ки, меньшую 21, в произведении abc получить нельзя.

Теперь найдём min. степень 5, которая может входить в $a \cdot b \cdot c$. Док., что это 30. $ac \vdots 5^{30} \Rightarrow$ min. степень вхождения 5-ти в $a \cdot b \cdot c$ равна 30.

Пример, когда степень вхождения 2-ки и 3-ки = 21, а степень вхождения 5-ки = 30: $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$; $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}$. Тогда $ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15} \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$.

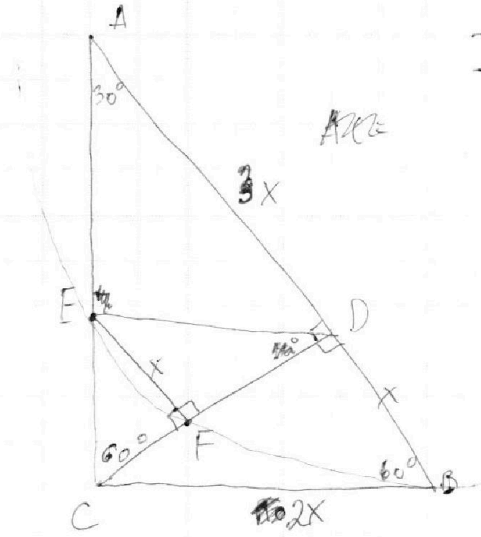
Ответ: ~~abc~~ min. зн-е $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{3}X$

Пусть $BD = x$. Тогда $AD = 3x \Rightarrow$ ~~...~~

~~$AD = \frac{CD^2}{BD}$~~ $BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$.

~~$AC = \sqrt{10x^2 - 1x^2} = \sqrt{30}x$~~

~~Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{10}x \sqrt{96}x = \sqrt{15}x^2$~~

Тогда $AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$.

$\cos\angle CBD = \frac{DB}{CB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CBD = 60°$. CB - касательная окр-ти $\Rightarrow \angle EDF = 90° - \angle CBD = 30°$ (~~степень точки C = const~~).

Тогда $\angle AED = 90°$ по сумме углов Δ.

$ED = 3x \sin 30° = \frac{3}{2}x$. В $\operatorname{tg} 30° = \frac{EC}{ED} \Rightarrow EC = \frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$CF = EC \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$. $EF = EC \sin 60° = \frac{3}{4}x$.

$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$. Тогда:

$$\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{32}{3}.$$

$\Rightarrow EDBF$ - парал. $\Rightarrow EF = DB = x$. Тогда $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{9}$ (они подобны с $k = 3$) $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$. Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow \arcsin(\cos x)$ определен при $\forall$ зн-ии $\cos x$. ~~Возьмём синус от обеих частей. (В конце нужно будет проверить, что получившиеся корни удовлетворяют исходному ур-нию, отделив пост. корни)~~:

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$ (по св-ву arcsin и arccos $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$).

$\frac{5\pi}{2} - 5\arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$2\pi = x + 5\arccos(\cos x)$

$x \in [2\pi n; 3\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

$2\pi = x + 5x = 6x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$. Данный корень принадлежит рассматриваемому промежутку и удовлетворяет исходному ур-ю.

$x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

$2\pi = x - 5x = -4x$

$x = -\frac{\pi}{2}$. Данный корень принадлежит рассматриваемому промежутку и удовлетворяет исходному ур-ю.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}$.

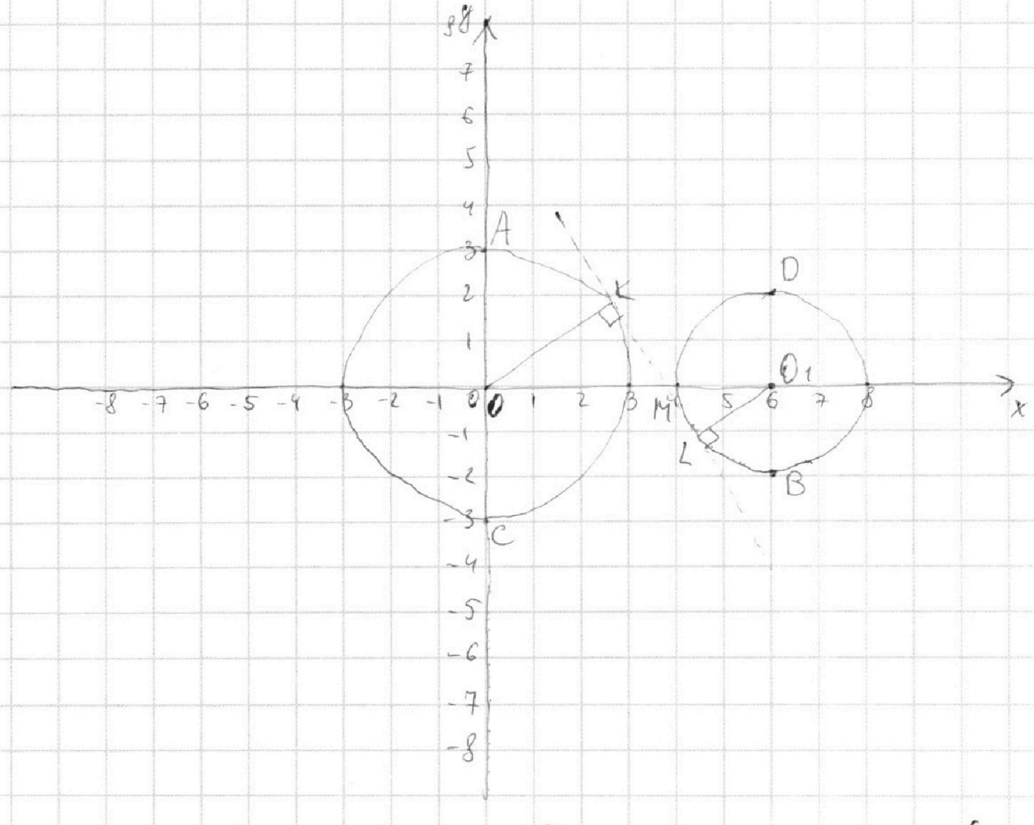
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (2). \end{cases}$$

(2) ур-е представлено в виде объединения 2-х окр-тей:
$x^2+y^2=9$ и $(x-6)^2+y^2=4$.



$2y=-ax+3b$, $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b$ — это прямая. Система имеет 4 реш-я ⇒ она должна пересекать каждую из окр-тей в 2-х точках. Коэффициент „b" м.б. $\forall$ ⇒ нужно все возможные коэффициенты перед x, при которых прямая сможет хотя бы при 1 „b" пересекать каждую окр-ть в 2-х точках.

Т.е. нужно найти коэффициент наклона одной из внутренних касательных

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Этих двух окр-тей (у II (продолжение 1) внутренней касательной из-за симметричного расположения окр-тей относит. Ox коэффициент перед x будет таким же по модулю, но противоположным по знаку).

Обозначим некоторые точки, как на рис. (K и L – т. касания), т. M – пересеч. Ox и KL. $\Delta OKM \sim \Delta O_1LM$ ($O_1L \parallel OK$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{OK}{O_1L} = \dfrac{OM}{MO_1}$. $\dfrac{3}{2} = \dfrac{OM}{MO_1}$. $MO_1 = 6 - OM \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{OM}{6-OM}$. Тогда $18 - 3OM = 2OM \Leftrightarrow OM = \dfrac{18}{5}$.

~~Тогда коэффициент k перед x равен~~ Подставим координаты т. M в (1): $ax + 2y - 3b = 0$

$\dfrac{18}{5}a - 3b = 0 \Rightarrow b = \dfrac{6a}{5}$.

Теперь подставим „y" в каждую из 2 окр-тей:

$$\begin{cases} x^2 + \left(-\dfrac{ax}{2} + \dfrac{3b}{2}\right)^2 = 9 \quad (3) \\ (x-6)^2 + \left(-\dfrac{ax}{2} + \dfrac{3b}{2}\right)^2 = 4 \quad (4) \end{cases}$$

У каждого из них должно быть 1 решение относит. x (касательная).

(3): $x^2 + \dfrac{a^2x^2}{4} + \dfrac{9b^2}{4} - \dfrac{3ab}{2}x - 9 = 0$

$D = \dfrac{9a^2b^2}{4} - 4\left(1 + \dfrac{a^2}{4}\right)\left(\dfrac{9b^2}{4} - 9\right) = 0$

$\cancel{\dfrac{9a^2b^2}{4}} - 9b^2 + 36 - \cancel{\dfrac{9a^2b^2}{4}} + 9a^2 = 0$

$a^2 + 4 = b^2$. $\cancel{(35)\, b = \dfrac{6a}{5}} \Rightarrow (*)$

$\cancel{\Rightarrow a^2 + 4 = \dfrac{36a^2}{25}}$. Тогда

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(продолжение № 2)

$(4): x^2-12x+36+\frac{a^2x^2}{4}+\frac{9b}{4}-\frac{3ab}{2}x-4=0$

$D=144+\frac{9a^2b^2}{4}+36ab-4\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{9b^2}{4}+32\right)=0$

$144+\frac{9a^2b^2}{4}+36ab-9b^2-128-\frac{9a^2b^2}{4}-32a^2=0$

$32a^2+9b^2-36ab-16=0$

$32a^2+9a^2-36ab+20=0$

$41a^2-36ab+20=0$

Обозначим некоторые точки, как на рис. (K и L – т. касания, т. M – т. пересеч. O_K и KL, $\triangle OKM \sim \triangle O_1LM$ ($O_1L \parallel OK$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OK}{O_1L}=\frac{3}{2}=\frac{OM}{MO_1}$. Но $MO_1=6-OM \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{OM}{6-OM}$.

Тогда $18-3OM=2OM \Leftrightarrow OM=\frac{18}{5}$. Подставим координаты т. M в (1): $ax+2y-3b=0$

$\frac{18}{5}a-3b=0 \Rightarrow b=\frac{6a}{5}$.

Тогда подставим это в в ⊛:

$a^2+4=\frac{36a^2}{25} \Leftrightarrow 4=\frac{11}{25}a^2$. Тогда $a^2=\frac{100}{11}$, значит $a=\pm\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Тогда нам подходят все $a\in\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$. (при $a=\pm\frac{10}{\sqrt{11}}$ прямая будет касаться этих двух окр-тей, при $a\in\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ у прямой будет 4 т. пересеч. с этими окр-тями, а при $a\in\left(-\infty;-\frac{10}{\sqrt{11}}\right)\cup\left(\frac{10}{\sqrt{11}};+\infty\right)$ у прямой будет max. 2 пересеч. с этими окр-тями.

Ответ: $a\in\left(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq \frac{1}{5}$

(1): $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 + 8 = 0$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2\log_3 x} + 8 = 0$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0$ ($\log_3 x \neq 0$, т.к. $x \neq 1$). (3)

(2): $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^4) - 8$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0$

$\log_3^4(5y) - \frac{7}{2\log_3(5y)} + 8 = 0$

$2\log_3^5(5y) + 16\log_3(5y) - 7 = 0$ ($\log_3(5y) \neq 0$). (4)

(3)+(4):

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 2\log_3^5(5y) + 16\log_3(5y) = 0$

$\cancel{\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8\log_3(5xy) = 0}$ ($x>0, y>0$)

$\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8\log_3 x + 8\log_3(5y) = 0$

$t = \log_3 x$, $q = \log_3(5y)$

$t^5 + q^5 + 8t + 8q = 0$

(сх. Горнера: (относ. t)

$\cancel{1)\ t=-q \quad (t+q)(8}$

$\cancel{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad q^5+8q}$

$\cancel{-q \quad 1 \quad -q \quad q^2 \quad -q^3 \quad q^4+8 \quad 0}$

$\cancel{t^4 - qt^3 + q^2t^2 - q^3t + q^4 + 8 = 0}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

1) $t = -q$

Сх. Горнера (относит. t)

	1	0	0	0	8	q^5+8q
$-q$	1	$-q$	q^2	$-q^3$	q^4+8	0

Возьмём производную по t у ур-я $t^5+q^5+8t+8q=0$:

$5t^4+8+q^5+8q=0$. $t^4=\frac{-q^5-8q-8}{5}<0$, т.к. $q>0$.

$t^4<0 \Rightarrow$ ⨯. Если взять производную по q, мы придём к такому же противоречию, т.к. ур-е симметрично относит. t и q.

Значит данная ф-я всегда возрастает $\Rightarrow$ она может иметь max. 1 (и ровно 1) пересеч. с Ox. А это достигается при $t=-q$:

$\log_3 x = -\log_3(5y)$

$\log_3(5xy)=0$

$5xy=1$

$xy=\frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

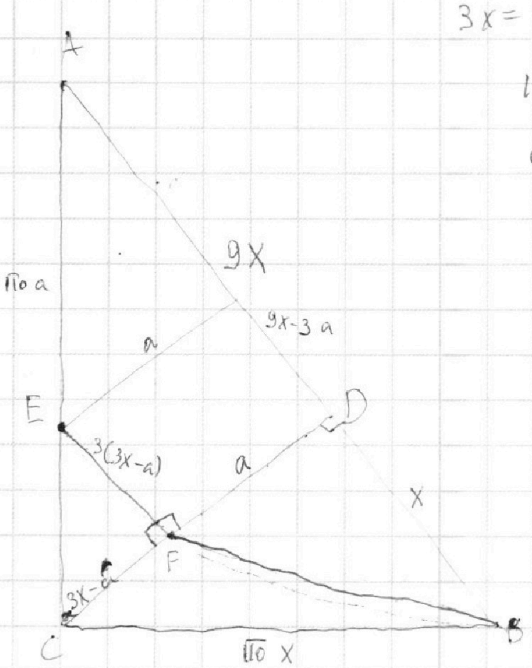
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

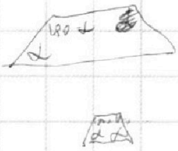
МФТИ

$3x = \sqrt{X \cdot 9X}$

$10x^2 +$

$CB^2 = CF \cdot CD$





$tg\alpha = 3$

$\frac{x}{3x-a} = ?$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$AE = \sqrt{a^2+9a^2} = \sqrt{10}\,a$

$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3x-a}{CE}$

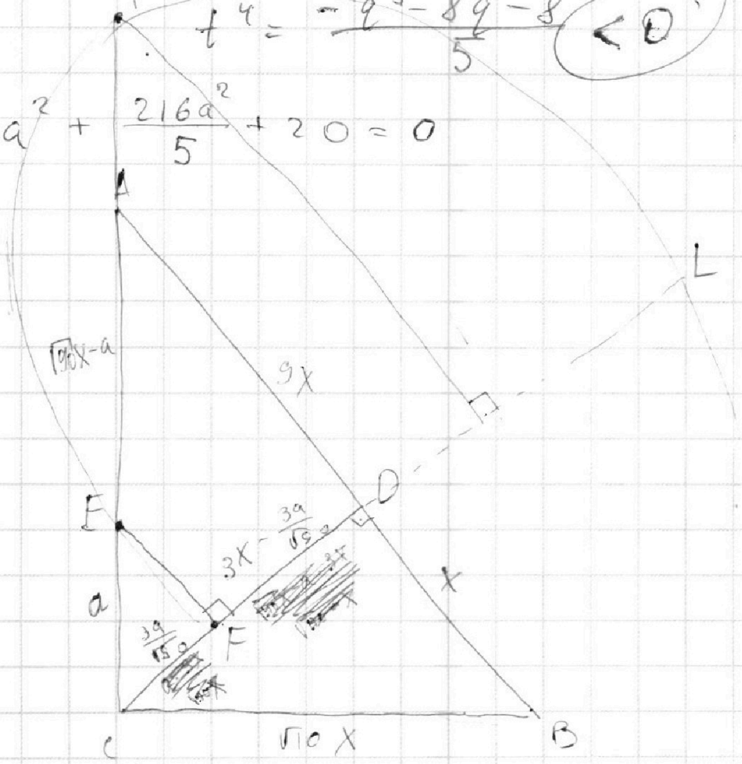
$CE = 3\sqrt{10}X - \sqrt{10}\,a$

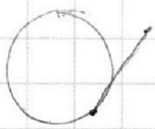
$\cancel{5t^4+5q^4+}\; 5t^4 + 8 + q^5 + 8q = 0$

$t^4 = \frac{-q^5-8q-8}{5} < 0$

$41a^2 + \frac{216a^2}{5} + 20 = 0$

$10x^2 =$





$\frac{a}{\sqrt{90}X-a} = \frac{CF}{FD} = \frac{3X}{FD} - 1$

$\frac{3X}{FD} = \frac{\sqrt{90}X}{\sqrt{90}X-a}$

$FD = \frac{3(\sqrt{90}X-a)}{\sqrt{90}} = 3X - \frac{3a}{\sqrt{90}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

этих двух окр-тей. (В а у II внутренней касательной из-за симметричного расположения окр-тей относит. Ox коэффициент перед x будут таким же по модулю, но противоположным по знаку).

Подставим „y" в каждое из 2 ур-й окр-тей:

$$\begin{cases} x^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b\right)^2 = 9 \quad (3) \\ (x-6)^2 + \left(-\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b\right)^2 = 4 \quad (4) \end{cases}$$

Каждое из них должно иметь 1 реш-е относит. x. (т.к. касательные)

(3):

$x^2 + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0$ $\qquad D = 1296 - 4\cdot 32\cdot(9b^2 - 16) =$

$D_1 = \frac{9a^2b^2}{4} - 4\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = 0 \Rightarrow$ $\qquad = 1296 - 64\cdot 32\cdot 9b^2$

$\cancel{\frac{9a^2b^2}{4} + 32 - a^2 - 3b^2 = 0}$

$\cancel{4a^2 + 12b^2 + 9a^2b^2 + 128 = 0}$

36 · 36 = 216, 108, 1296 $\qquad$ 64 · 32 = 128, 192, 2048 $\qquad$ 1296 − 3280

(4):

$x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 4 = 0$

$x^2\left(1+\frac{a^2}{4}\right) - x\left(12 + \frac{3ab}{2}\right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$

$D_2 = 144 + 36ab + \frac{9a^2b^2}{4} - 4\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) = 0$

$D_2 = 144 + 36ab + \frac{9a^2b^2}{4} - 3b^2 - 128 - \cancel{3b} \frac{3a^2b^2}{4} - 32a^2 = 0$

$\frac{3a^2b^2}{2} - 32a^2 - 3b^2 + 36ab + 16 = 0$ (5)

$D_1 = \frac{9a^2b^2}{4} - 3b^2 + 36 - \frac{3a^2b^2}{4} + 9a^2 = 0$

$\frac{3a^2b^2}{2} + 9a^2 - 3b^2 + 36 = 0$ (6)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{\frac{t^5}{q^3t^3} + \frac{q^5}{q^3t^3} + \frac{8t}{q^3t^3} + \frac{8q}{q^3t^3} = 0}$ $(q \neq 0, t \neq 0)$

$\cancel{\frac{t^2}{q^3} + \frac{q^2}{t^3} + \frac{8}{q^3t^2} + \frac{8}{t^3q^2}}$

Сх. Горнера (относит. t)

	1	0	0	0	8	q^5+8q
$-q$	1	$-q$	q^2	$-q^3$	q^4+8	0

1) $t = -q$

$t^4 - qt^3 + q^2t^2 - q^3t + q^4 + 8 = 0$

$(t^2+q^2)^2 - q^2t^2 - qt(t^2+q^2) + 8 = 0$

$(t^2+q^2)^2 - qt(t^2+q^2+qt) + 8 = 0$

Пусть $k = t^2+q^2$, $l = qt$.

$k^2 - l(k+l) + 8 = 0 \qquad k^2 - lk - l^2 + 8 = 0$

Относит. k: $D = l^2 + 4l^2 - 32 = 5l^2 - 32$ т.к. $D \geq 0 \Rightarrow l \geq \sqrt{\frac{32}{5}}$ $(qt>0)$.

$k = \frac{l \pm \sqrt{5l^2-32}}{2}$.

Относит. l: $D = k^2 + 4k^2 + 32 = 5k^2 + 32 > 32$, $k > 0$

$l = \frac{k \pm \sqrt{5k^2+32}}{-2} = \frac{-k \pm \sqrt{5k^2+32}}{2}$. $l > 0 \Rightarrow l = \frac{-k + \sqrt{5k^2+32}}{2}$.

Из этого следует, что $k = l \cdot m$, где $m \cancel{<2}$ (если $t \neq -q$)

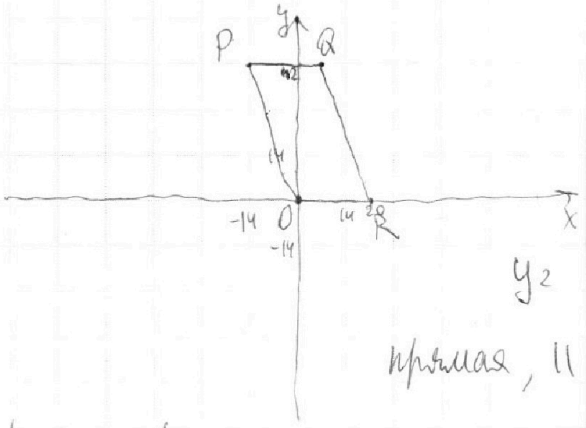
Тогда: $t^2 + q^2 = mqt \Leftrightarrow (t-q)^2 + (2-m)qt = 0$. $\begin{cases} 2-m>0 \\ (t-q)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ данное р-во выполняться не может. Тогда:

$\log_3 x = -\log_3(5y) \Rightarrow \log_3(5xy) = 0$ ~~⇒ x~~. Тогда $xy = \frac{1}{5}$.

$(6)-(5)$:

$41a^2+20+36ab=0 \Rightarrow$



$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 \vdots 33 \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_2 - y_1| \vdots 3$. Пусть $y_2 = 42$.

Будем рассматривать y_1, меньшие y_2 на $3k$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\forall$ прямая, $\parallel Ox$, ~~пересекает данный парал~~ и пересек. парал., имеет с ним ровно 21 общ. точку, если ~~его~~ координата по Oy этой прямой $\vdots 3$, и ровно 20 общ. точек, если координата по Oy этой прямой $\not\vdots 3$. Для $y_1 \in \{39, 36, \dots;$