



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \cdot k_1, \quad k_1 \notin 2, 3, 5, \quad k_1 \in \mathbb{N}, (k_1 \geq 1)$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \cdot k_2, \quad k_2 \notin 2, 3, 5, \quad k_2 \in \mathbb{N}$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3} \cdot k_3, \quad k_3 \notin 2, 3, 5, \quad k_3 \in \mathbb{N}$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}, (x_1, y_1, z_1 \geq 0)$$

$$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}, (x_2, y_2, z_2 \geq 0)$$

$$x_3, y_3, z_3 \in \mathbb{Z}, (x_3, y_3, z_3 \geq 0)$$

$$ab = 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ y_1 + y_2 \geq 14 \\ z_1 + z_2 \geq 12 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \notin 2, 3, 5)$$

$$bc = 2^{x_2+x_3} \cdot 3^{y_2+y_3} \cdot 5^{z_2+z_3} \cdot k_2 k_3 \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 12 \\ y_2 + y_3 \geq 20 \\ z_2 + z_3 \geq 17 \end{cases}$$

$$\text{Аналогично} \quad ca = 2^{x_1+x_3} \cdot 3^{y_1+y_3} \cdot 5^{z_1+z_3} \cdot k_3 k_1 \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \geq 14 \\ y_1 + y_3 \geq 21 \\ z_1 + z_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\text{Суммируем} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 \geq 14 + 12 + 8 \\ y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_1 \geq 21 + 20 + 14 \\ z_1 + z_2 + z_2 + z_3 + z_3 + z_1 \geq 39 + 17 + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{55}{2} \\ z_1 + z_2 + z_3 \geq 34 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{Z} \\ (y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z} \rightarrow (y_1 + y_2 + y_3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{56}{2} = 28 \end{matrix}$$

Сравнивается  $\min(abc)$ .

$$abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3} \cdot k_1 k_2 k_3 \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{56}{2}} \cdot 5^{34} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

Минимум достигается при  $x_1 = 5; x_2 = 3; x_3 = 5$ ,  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1$   
но  $2^{17}$  и  $3^{28}$   
 $y_1 = 8; y_2 = 6; y_3 = 14$   
 $z_1 = 0$

Но т.к.  $z_1, z_2, z_3 \geq 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 \geq 39 \Rightarrow$  станем  $\text{вычислять}$   
на  $5$  в  $abc$  хотя бы  $39$ . ~~Доказано~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Минимум  $z_1 + z_2 + z_3 \geq 30$  достигается при  $z_1 = 12, z_2 = 0, z_3 = 27$

Тогда  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

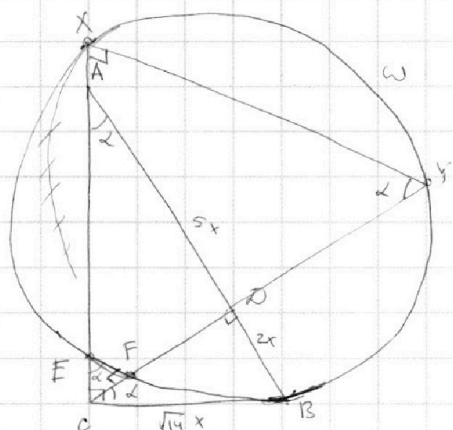
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\frac{AO}{OB} = \frac{5}{2}$ ,  $EF \parallel AB$

Найти:  $\frac{[ABC]}{[CEF]}$  - ?

Решение: обозначим окр-ть -  $\omega$ .  
 $\angle CAB = \alpha$

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAD = \alpha$ ;  $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

$\angle ECF = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle DCB = 90^\circ - \angle ECF = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

1).  $\triangle CDB \sim \triangle ADC$  ( $\triangle ADC$  и  $\triangle CDB$  - правоуг.  $\triangle$ ,  $\angle DAC = \angle DCB = \alpha$ )

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Обозначим  $AD = 5x \Rightarrow DB = \frac{2}{5} AD = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$

2). по Тл. Пифагора:  $CB^2 = CD^2 + DB^2 = 10x^2 + 4x^2 = 14x^2$   
 для  $\triangle CDB$   $CB = \sqrt{14}x$

по Тл. Пифагора для  $\triangle ACB$ :  $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 25x^2 + 10x^2 = 35x^2 \Rightarrow AC = \sqrt{35}x$

3). по Тл. о секущей и кас-й:  $CB^2 = CE \cdot CA$

3). по Тл. о секущей и кас-й:  $CB^2 = CF \cdot CX$ , где  $r.X = AC \cap \omega$   
 $CB^2 = CF \cdot CY$ , где  $r.Y = CD \cap \omega$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} \cdot \frac{CX}{CY} = 1 \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CF}{CX} \Rightarrow \angle XCF = \text{одугло} \Rightarrow \triangle XCY \sim \triangle FCE$$

$$\Rightarrow \angle EFC = \angle YXC = 90^\circ; \angle XYC = \angle FEC = \alpha$$

4).  $\triangle ABC \sim \triangle ECF \Rightarrow$  (т.к.  $\triangle ABC$  и  $\triangle ECF$  - правоуг.  $\triangle$  и  $\angle CFF = \angle CAB = \alpha$ )

$$\Rightarrow \frac{[ABC]}{[CEF]} = \frac{CB \cdot AC}{CF \cdot EF} = k^2 \quad \left( \begin{array}{l} 1/3 [ABC] - \text{площадь } \triangle ABC \\ [CEF] - \text{площадь } \triangle CEF \end{array} \right)$$

$$\text{где } k = \frac{CB}{CF} = \frac{EF}{AB} = \frac{AB}{EC} = \frac{CA}{EF}$$

5).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 2x \geq -5\pi \\ \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{cases} \begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi h \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} h \end{cases}$$

1).  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}; x \in [-2\pi; 3\pi]$  2).  $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} h, h \in \mathbb{Z}; x \in [-2\pi; 3\pi]$

$$\begin{aligned} -2\pi &\leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} k \leq 3\pi \\ -5\pi &\leq 5\pi k \leq 5\pi \\ -1 &\leq k \leq 1; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3} = -2\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} = 3\pi$$

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} h \leq 3\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi h \leq 10\pi$$

$$-1 \leq h \leq 2, h \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow h \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = -2\pi$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = 3\pi$$

$$\text{Объем } x \in \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a) \begin{cases} y = \frac{ax+4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$\triangle OAF \sim \triangle CAO$$

$$\frac{OF}{CO} = \frac{OA}{CA}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{OA}{10-OA}$$

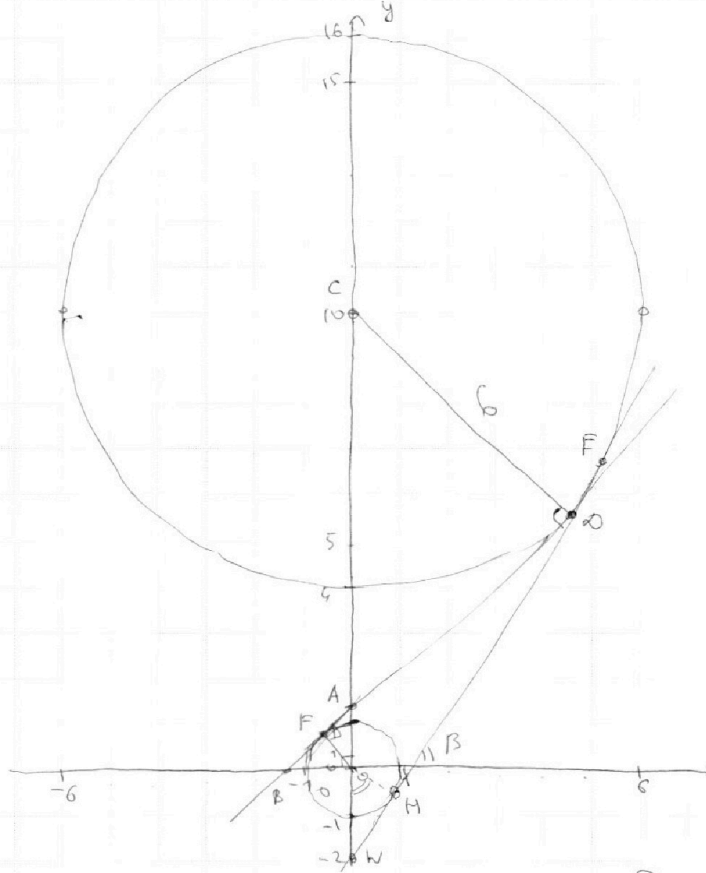
$$OA = \frac{10}{7}$$

$$\triangle BAO \sim \triangle OAF$$

$$\frac{OB}{OF} = \frac{OA}{AF}$$

$$\frac{OB}{1} = \frac{\frac{10}{7}}{AF}$$

$$OB = \frac{10}{7AF}$$



по Th. Пифагора для  $\triangle OAF$ :  $AF^2 = AO^2 - OF^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\Rightarrow OB = \frac{10}{7 \cdot \frac{\sqrt{51}}{7}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$$

$$\operatorname{tg} \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

1).  $\left| \frac{a}{3} \right| \leq \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow$  прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$  пересекает окр-ты max 2 раза

2).  $\left| \frac{a}{3} \right| > \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \exists b$ : прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$  пересекает окр-ты 4 раза (существует  $\parallel$  перпенос прямой так, что она пересекает 4 раза)

Расс-м вторую кас-ю HE:  $\triangle OWH \sim \triangle CWF \Rightarrow \frac{OW}{CW} = \frac{OH}{CO} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{OW}{10+OW} = \frac{1}{6} \Rightarrow OW = 2$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{HW}{OH} = \frac{HW}{1}$ . По Th. Пиф-ра для  $\triangle OWH$ :  $HW^2 = OW^2 - OH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow HW = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сравним  $\sqrt{\frac{51}{7}}$  и  $\sqrt{3}$

$$51 < 49 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{51}{7}} < \sqrt{3}$$

Значит, уже для  $|\frac{a}{3}| \geq \sqrt{\frac{51}{7}}$  будет возможен 11 пересек

прямой  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$  на  $\frac{4b}{3}$  так, что она пересекет эллипс 4 раза

1).  $|\frac{a}{3}| < \sqrt{\frac{51}{7}}$  - max 2 решения (одну из эллипс-ей прямая не пересекет)

2).  $|\frac{a}{3}| > \sqrt{\frac{51}{7}}$  :  $\exists b$ : что  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$  пересекает эллипс 4 раза

тогда

$$|\frac{a}{3}| > \sqrt{\frac{51}{7}}$$
$$\begin{cases} \frac{a}{3} > \sqrt{\frac{51}{7}} \\ \frac{a}{3} < -\sqrt{\frac{51}{7}} \end{cases} \quad a \in (-\infty; -3\sqrt{\frac{51}{7}}) \cup (3\sqrt{\frac{51}{7}}; +\infty)$$

Ответ:  $a \in (-\infty; -3\sqrt{\frac{51}{7}}) \cup (3\sqrt{\frac{51}{7}}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5(2x)} - 3$$

Замена:  $a = \log_5 2x$ ,  $a \neq 0$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$a^4 - \left(\frac{3}{a} + \frac{4}{3a}\right) + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

Расс-м  $f(a) = 3a^5 + 9a - 13$ ,  $f'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(a)$  - монотонно

возрастающая ф-ция  $\Rightarrow$  решение  $f(a) = 0$  единственно и существует

Возв-е к замене:  $\log_5 2x = a_1$

$$x = \frac{5^{a_1}}{2} > 0, \quad \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} = \frac{5^{a_1}}{2} \Rightarrow a_1 \neq 0 \\ \text{при } a_1 = 0: f(a) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 13 = -13 < 0 \\ \text{не решение} \Rightarrow a_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$2) \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{-1}{3 \log_5 y} - 3$$

Замена:  $b = \log_5 y$ ,  $b \neq 0$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3b} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Расс-м  $g(b) = 3b^5 + 9b + 13$ ,  $g'(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow$

$g(b)$  - монотонно возраст. ф-ция  $\Rightarrow$  решаеме  $g(b_1) = 0$  единственно  
и существует.

Поманно, что  $b_1 \neq 0$ , т.к.  $g(0) = 13 \neq 0$

Тогда возвращение к замене:  $b_1 = \log_5 y$

$$y = 5^{b_1}$$

Поманно, что если  $\begin{cases} 3a_1^5 + 9a_1 - 13 = 0 \\ 3b_1^5 + 9b_1 + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -b_1$

(т.к.  $f_1(a) = 3a^5 + 9a$ ,  $f_1'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \Rightarrow f_1(a)$  монотонно возрастает)  
и  $\exists! a_1$ :  $f_1(a_1) = 13$ ;  $f_1(b_1) = -13$  и это при  $a_1 = -b_1$

Тогда  $xy = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{b_1} = \frac{5^{a_1}}{2} \cdot 5^{-a_1} = \frac{1}{2}$

Ответ:  $xy = \frac{1}{2}$

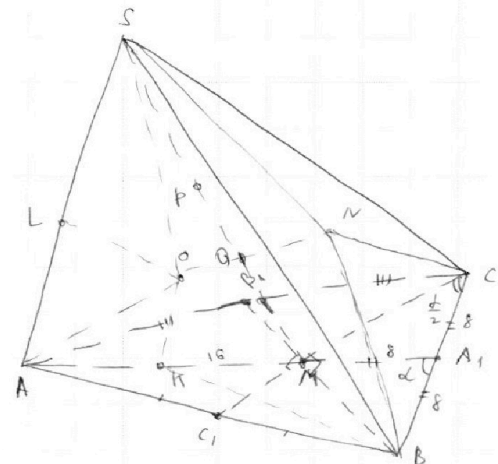
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

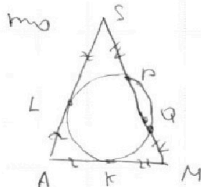
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $SP = MQ$ ,  $S(ABC) = 100$ ,  
 $SA = BC = 16$

а). м.к.  $L$  и  $K$  - т. касания сферы  
 $\Rightarrow AL = AK$

м.к.,  $L, K, P, Q \in$  сфере,  $MO \perp (SAM)$ ,



по Th. о сечущей и кас.:

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP =$$

$$= SP \cdot MP = SP(MQ + QP) =$$

$$= SP(PQ + SP) = SP \cdot SQ = SL^2$$

$$\Rightarrow KM = SL \Rightarrow SA = SL + LA = AK + KM = AM = 16$$

1). м.к.  $AA_1$  - медиана,  $\Rightarrow \frac{AM}{AA_1} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$$

$$MA_1 = AA_1 - AM = 24 - 16 = 8$$

2).  $S(ABC) = \frac{CB}{2} \cdot AA_1 \sin \alpha$  где  $\alpha = \angle AA_1B$

$$100 = \frac{16}{2} \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{25}{98}$$

3). в  $\triangle CMB$ :  $\angle A_1BM = \angle A_1MB$  ( $\triangle MA_1B$  - р/д  $\Delta$ )  $\Rightarrow \angle A_1BM = \frac{\pi - \alpha}{2}$

$$\angle CA_1M = \angle CMA_1 \Rightarrow \angle CMA_1 = \angle MA_1B = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \angle CMA_1 + \angle A_1BM = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CMB = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CM \perp MB$$

$$4). CM = CB \cos \frac{\alpha}{2} = 16 \cos \frac{\alpha}{2} = 16 \sqrt{\frac{48 + \sqrt{1679}}{98}}$$

$$\left( \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{625}{98^2}} = \frac{\sqrt{1679}}{98} \right); \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ м.к. } \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{48 + \sqrt{1679}}{98}}$$

$$BM = CB \sin \frac{\alpha}{2} = 16 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$5). AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot \frac{3}{2} CM \cdot \frac{3}{2} BM = 6 \cdot 9 \cdot 16^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 27 \cdot 16^2 \sin \alpha =$$

$$= 27 \cdot 16^2 \cdot \frac{25}{98} = 27 \cdot \frac{16 \cdot 25}{3} = 9 \cdot 16 \cdot 25 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 60^2 = 3600$$

Ответ: 3600

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5)  $SM$  и  $SL$  - кас-е к сфере  $\Rightarrow SL = SM = 4$

$\Rightarrow AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AN$

по сло  $AO$  - ч. сфера  $\Rightarrow AO^2 = AN^2 + LO^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AO = 13$

$SO^2 = LO^2 + SL^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow SO = \sqrt{41}$

$OA_1^2 = OK^2 + KA_1^2 = 5^2 + (AA_1 - AK)^2 = 5^2 + (24 - 12)^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

$\Rightarrow OA_1 = 13$

$AA_1^2 = OA_1^2 - ON^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AA_1 = 12$

$ON^2 = OC^2 - CN^2 = OC^2 - 5^2 = KC^2 \Rightarrow CN = KC$

$KB^2 = OB^2 - OK^2 = OB^2 - ON^2 = NB^2 \Rightarrow KB = NB$

$CN = KC$

$KB = NB \Rightarrow ABC = A_1BC$

$BC$  - общая

$SA, AA_1$  - кас-е к сфере,  $SM$  и  $MA_1$  - кас-е к сфере.  $\Rightarrow ON \perp (BSC)$

(сфера касается между плоскостями  $(SBC)$  и  $(ABC)$ )

$OK$  - кас-е  $\Rightarrow OK \perp (ABC)$  т.к. т.к. - т. касания сферы и плоскости

$\Rightarrow$  т.к.  $L, N \in \perp$  сеченью  $\Rightarrow S, N, A_1 \in \perp$  прямой

$\Rightarrow \triangle AS A_1$  - р/б  $\triangle$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{\sin \alpha} = \frac{CX}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{14}}{10}$$

$$CF \cdot CX = 14x^2$$

$$CF \cdot \frac{10}{\sqrt{14}} = CX = 14x^2$$

$$CF \cdot CX = \frac{14\sqrt{14}}{10} x^2$$

$$K_1 \cdot CX^2 = \frac{14\sqrt{14}}{10} x^2$$

$$K_1 = \frac{14\sqrt{10}}{10} \frac{x^2}{CX^2}$$

$$\frac{CF}{CX} = K_1$$

$$ax^2 + by^2 = d^2$$

$$5ax + ay = 45$$

$$0 \quad 45 \rightarrow \frac{45}{5} = 9$$

$$1 \quad 40 \rightarrow$$

$$2 \quad 35 \rightarrow$$

$$3 \quad 30 \rightarrow$$

$$4 \quad 25 \rightarrow$$

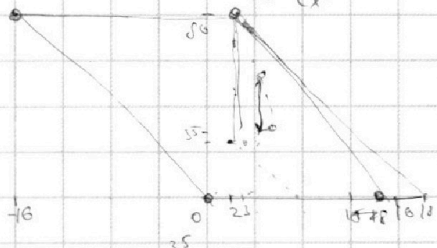
$$5 \quad 20 \rightarrow$$

$$6 \quad 15 \rightarrow$$

$$7 \quad 10 \rightarrow$$

$$8 \quad 5 \rightarrow$$

$$9 \quad 0 \rightarrow$$



$$ax^2 + (45 - 5ax)^2 = d^2$$

$$45^2 + 26ax^2 - 450ax = d^2$$

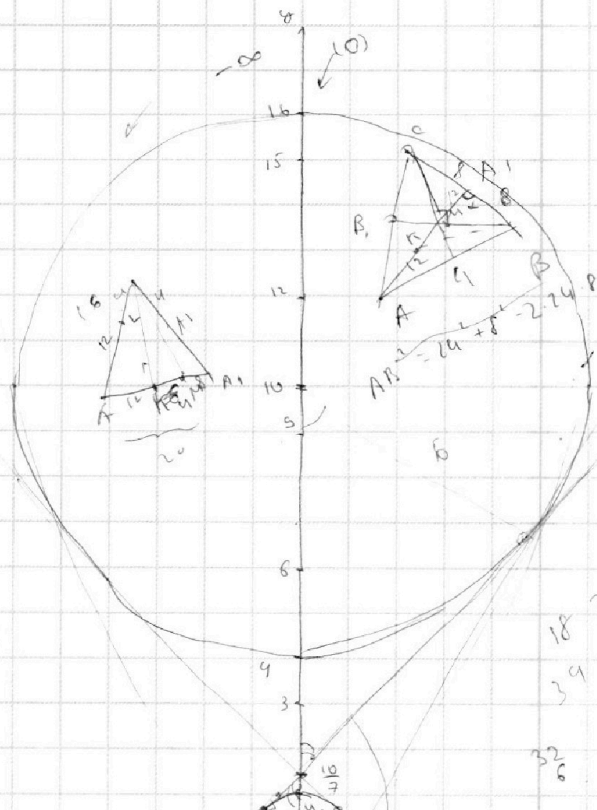
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ax+4b}{3} = y$$

$$a=0 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \text{ р.м.}$$

$$\frac{a^2}{3} \cdot a > 0$$

6-вариантивен

$$CF = \frac{10CY}{\sqrt{35}} = 14x^2$$

$$CF \cdot CE = \frac{14\sqrt{35}}{10} x^2$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}}$$

$$CE^2 = \frac{10}{\sqrt{14}} \cdot \frac{14x^2}{\sqrt{35}}$$

$$\frac{10-y}{21} = \frac{4b}{6}$$

$$60 = 7y_1$$

$$\frac{100}{42} - 1 = \frac{51}{42} \quad \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{5}$$

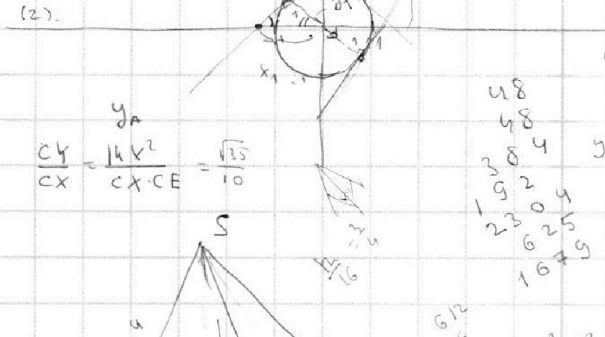
$$x_1 = \frac{10}{\sqrt{51}}$$

$$x_2 = \frac{10\sqrt{51}}{7 \cdot 10} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\left[ a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \right]$$

$$\left[ a < \frac{3\sqrt{51}}{7} \right]$$



$$\frac{CY}{CX} = \frac{14x^2}{CX \cdot CE} = \frac{\sqrt{35}}{10}$$

$$SA = RC = 16$$

$$EA = BC$$

$$SL = SP = SQ$$

$$KM = MQ = MP = SL$$

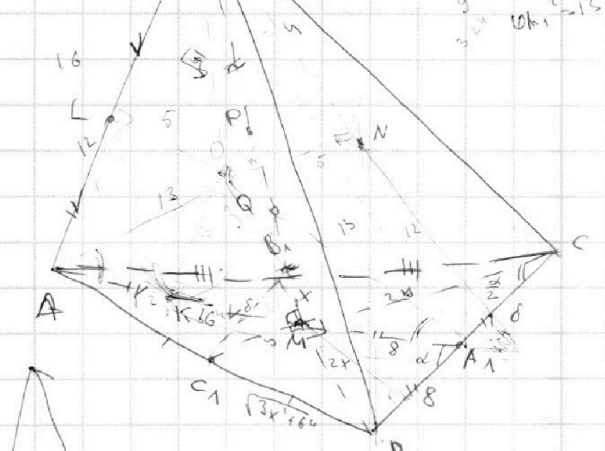
$$\rightarrow KM = SL + 62m$$

$$\Delta SAM \sim PQA$$

$$95^2 + 4x^2 = 16^2$$

$$5^2 + x^2 = 1664$$

$$25 = \frac{4}{2} \cdot 24$$



$$AOO = \frac{1}{2} \delta \cdot \sin \angle AA_1 +$$

$$AA_1 \sin \delta = \frac{25}{2}$$

$$3x = 3\sqrt{64-x^2} - 80$$

$$x_1 B = \frac{EM}{16}$$

$$C_1 B^2 = 4x^2 + 64 - x^2$$

$$= 3x^2 + 64$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$   
 $\arcsin a = b$   
 $a = \sin b$      $a \in [-1; 1]$   
 $b \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \end{cases}$

$\begin{cases} -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10}) \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10} + 2\pi k \end{cases}$

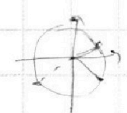
$\begin{cases} x = \frac{x - \pi}{5} + \frac{2x - \pi}{10} + 2\pi k \\ x = -\frac{x - \pi}{5} - \frac{2x - \pi}{10} + 2\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} -2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2x - \pi}{10} \leq 3\pi \\ -2\pi \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{2x - \pi}{10} \leq 3\pi \end{cases}$

$-1 \leq k \leq 1$      $k \in \{-1; 0; 1\}$   
 $k = -1$

1). Check 1:  $\arcsin(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2})) = \frac{\pi - (\pi + 5\pi k)}{10} = -\frac{\pi}{2} k$

- 1).  $k = -1$ :  $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(-1) \checkmark$
- 2).  $k = 0$ :  $0 = 0$
- 3).  $k = 1$ :  $\frac{3\pi}{2} = \checkmark$



2).  $\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi k}{3})) = \frac{\pi - (-\pi - 5\pi k)}{10} = \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

- 1).  $k = -1$ :  $-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \checkmark$
- 2).  $k = 0$ :  $\frac{\pi}{6} = \checkmark$
- 3).  $k = 1$ :  $\frac{\pi}{2} = \checkmark$
- 4).  $k = 2$ :  $-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \checkmark$

0.5)  $k = 2$ :

1.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
2	3	5	2	3					

$x_1 + x_2 = 8$      $x_2 + x_3 \geq 12$      $x_3 + x_4 \geq 14$      $\min(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 14$      $x_2 + x_3 \geq 20$      $x_3 + x_4 \geq 21$

$x_1 + x_2 \geq 12$      $x_2 + x_3 \geq 17$      $x_3 + x_4 \geq 39$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 34$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{34}{2} = 17$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{55}{2} > 27$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 34$

$13 \ 4 \ 26$

$15$

$6 \ 6 \ 11 \ 14 \ 1 \ 16$

$10 \ 2 \ 15$

$8 \ 6 \ 14$

$28 \checkmark$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x > 0$$

$$2x \neq 1$$

$$8x^3 > 0$$

$$(2x)^3 > 0$$

$$3 \cdot \frac{3^5}{2^5} + \frac{5 \cdot 3}{2} - 13 = 0$$

$$3^6 + 2^4 \cdot \frac{3}{2} - 13 \cdot 2^5$$

$$2^4(22 - 26)$$

→ если корень есть → осцил

$$\log_2 81 = \log_8 81 = \log_8 64 = 2$$

$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 4 = \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3}$$

$$8^4 + \frac{4}{6} = \frac{1}{36} - 3$$

$$8^4 + \frac{4}{6} + \frac{1}{36} + 3 = 0$$

$$8^4 + \frac{13}{36} + 3 = 0$$

$$3 \cdot 8^5 + 9 \cdot 8 + 13 = 0$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3 \cdot 9} - 3$$

$$\left(\frac{4}{3} + 3\right) \frac{1}{a} - \frac{13}{3 \cdot 9}$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$$

$$a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$F(a) = 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$F'(a) = 15a^4 + 9 > 0 \rightarrow$$

$$0 = a^4 = \frac{-9}{15} \quad \frac{0}{15} \rightarrow \text{max (min)}$$

$$1 \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3} \quad \frac{4^5}{3^4} + 12 - 13$$

$$a = \log_5 y$$

$$-a = \log_5 2x$$

$$y = 5^a$$

$$2x = 5^{-a}$$

$$x = \frac{5^{-a}}{2}$$

$$\frac{5^{-a}}{2} = \frac{1}{2} \quad [a \neq 0] \quad \checkmark \checkmark$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \log_5^4 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$a^4 = \frac{4}{3a} + \frac{3}{a} - 3$$

$$a^4 = \frac{13}{3a} - 3$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{[ABC]}{[CEF]}$$

$$CE = CA = CB^2 = CF \cdot CO = 14x^2$$

$$\frac{CF}{CO} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{5x}$$

$$CO = \sqrt{10}x$$

$$CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$$

$$\frac{[ABC]}{[CEF]} = \left(\frac{EF}{AC}\right)^2 = \frac{35}{75} \left(\frac{CF}{CB}\right)^2 = \left(\frac{CF}{AB}\right)^2 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$CB^2 = CE \cdot AC = CF$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{14x}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{14}{10}}$$

EC

$$\frac{CF}{AB} = \frac{CF}{7x}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{CF}{7x} \quad CF = \frac{14x^2}{7}$$

$$B. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CF}{CO} = \frac{EF}{10}$$

$$100 = \frac{16}{2} \cdot h_p \quad h_p = \frac{100}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{25}{2 \cdot 24} = \frac{25}{48} \rightarrow \cos \alpha$$

$$\frac{CF}{\sqrt{35}} = \frac{CF}{\sqrt{10}} = \frac{EF}{5}$$

$$CF = CX = 14x^2$$

$$CF \cdot CY = 14x^2$$

$$\frac{CF}{CY} = \frac{CF}{CX}$$

$$14x^2 = C$$

$$\frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{CF} = CF$$

$$14x^2 = CF \cdot CX$$

$$CX^2 + 14x^2 = CX^2$$

$$\frac{CF}{7} = \frac{CX}{\sqrt{14}x}$$

$$CX = \frac{\sqrt{35}}{10} \cdot CX$$

$$CX = \sqrt{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!