



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Рассмотрим j -степень числа z в разложении на простые множители числа z . Докажите следующее утверждение:
 $a_2 + b_2 \geq 8$ Три этого все поподъеми степеней должны быть
 $b_2 + c_2 \geq 12$ больше минимального, чтобы было ~~чтобы~~ минимальное
 $a_2 + c_2 \geq 14$ их сумма в ~~на~~ разумном расположении поподъеме.
 $a_3 + b_3 \geq 14$ Если x - искомое число, то $x = z^{a_2+b_2+c_2} \cdot 3^{a_3+b_3+c_3} \cdot 5^{a_5+b_5+c_5}$
 $a_3 + c_3 \geq 20$ очевидно, что z минимального числа ~~должен~~ простих множителей в разложении не имел. Для степеней ≥ 9
 $a_3 + c_3 \geq 21$ вспоминаемось равенство, т.е. знаясье мини-
 $b_3 + c_3 \geq 12$ мальных: $a_2 = 5$, $b_2 = 3$, $c_2 = 9$, $a_3 = 7$, $b_3 = 6$, $c_3 = 14$. Для 5
 $a_5 + c_5 \geq 39$ минимальное значение $a_5 + b_5 + c_5 = 39$ (~~при $b_5 = 0$~~) (~~при $b_5 = 0$~~),
тогда числовые a_5 и c_5 такие, что $a_5 \geq 12$, $b_5 \geq 13$ (пример:
 $a_5 = 19$, $b_5 = 20$, $c_5 = 20$). ~~Проверив~~ ~~все~~ ~~варианты~~ знаясье
минимальные суммы $a_i + b_j + c_k$ ($i \in \{2; 3, 5\}$) в выражение для x :
$$x = z^{5+5+9} \cdot 3^{4+6+14} \cdot 5^{39} = 2^{72} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $2^{72} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$



Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \text{ Given } AD:DB = AC^2:BC^2 \Rightarrow AC:BC = \sqrt{5}:\sqrt{2} \text{ therefore } DC \perp AB$$

A(0, \sqrt{5})

C(0, 0)

B(\sqrt{2}, 0)

E(0, y_0)

F(x_F, y_F)

$$AB: \frac{x_F}{\sqrt{2}} + \frac{y_F}{\sqrt{5}} = 1 \quad \sqrt{5}x_F + \sqrt{2}y_F - \sqrt{10} = 0$$

$$\text{and } y_F = -\frac{\sqrt{5}}{2}x_F + \sqrt{10} \quad k_{AB} = -\sqrt{\frac{5}{2}} \quad AB \perp CD \Rightarrow k_{AB} k_{CD} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{CD} = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad y_F = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x_F \quad (\text{m.k. } C \in CD) \quad \text{D!} \quad \sqrt{2}x_F - \sqrt{5}y_F = 0$$

$$\begin{cases} EF \parallel AB \\ B, E, F \in W \\ E \in AC \\ F \in CD \end{cases} \quad \begin{cases} \{x_F; y_F - y_E\} = f(k \{x_0; y_0\}) \quad (1) \\ y_0 = \sqrt{(x_F - \sqrt{2})^2 + (y_F - y_E)^2} \quad (2) \\ y_0 = \sqrt{2 + (y_E - y_0)^2} \quad (3) \\ \sqrt{2}x_F + \sqrt{5}y_F = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$(AC: x=0 \quad BC: y=0) \quad (2) \quad (x_F - \sqrt{2})^2 + (y_F - y_E)^2 = 2 + (y_E - y_0)^2$$

~~(2): (y_F - y_E)^2 = (\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y_E - \sqrt{2})^2 + (y_F - y_E)^2~~

~~y_0^2 = \frac{5}{2}y_E^2 - 2\sqrt{5}y_E + 2 + y_F^2 - 2\sqrt{2}y_Ey_F + y_0^2 \quad 2y_Ey_0 = \frac{3}{2}y_E^2 - 2\sqrt{5}y_E + 2~~

~~y_0^2 = \frac{3}{2}y_E^2 - 2\sqrt{5}y_E + 2 \quad (3): (\frac{2}{\sqrt{5}}y_E^2 - \frac{5}{2}y_E + 2)^2 = 2 + y_E^2 - 2y_E \cdot \frac{(\frac{2}{\sqrt{5}}y_E^2 - 2\sqrt{5}y_E + 2)}{y_E} + y_E^2~~

~~+ (\frac{2}{\sqrt{5}}y_E^2 - 2\sqrt{5}y_E + 2)^2 - y_E^2 = 2 + y_E^2 - 2y_Ey_F + y_0^2 \quad y_E^2 - 2y_Ey_F + 2 = 0~~

~~(4): x_F = -\sqrt{\frac{5}{2}}y_F \quad (2): y_0^2 = \frac{5}{2}y_E^2 + 2\sqrt{5}y_E + 2 + y_F^2 - 2y_Ey_F + y_0^2~~

~~\frac{5}{2}y_E^2 + 2(\sqrt{5} - y_E)y_F + 2 = 0 \quad y_F = \frac{5}{2}y_E^2 + 2(\sqrt{5} - y_E) + \frac{2}{y_E} = 0 \quad \text{Dots}~~

~~y_F^2 + 4(\sqrt{5} - y_E)y_F + 4 = 0 \quad \frac{y_F}{y_E} = (2\sqrt{5} - 2y_E)^2 - 28 = 50 - 8\sqrt{5}y_E + 4y_E^2 - 28 = 4y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E + 22~~

~~y_F = \frac{-2\sqrt{2}(y_E - \sqrt{5}) + \sqrt{9y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E + 22}}{2} \quad (1): -\sqrt{2}x_F + \sqrt{2}(y_F - y_E) = 0~~

$$\frac{5}{\sqrt{2}}y_F + \sqrt{2}y_F - \sqrt{2}y_E = 0 \quad 7\sqrt{5}y_F + 2y_E - 2y_E = 0 \quad 7y_F = 2y_E$$

$$2(y_E - \sqrt{5}) + \sqrt{4y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E + 22} = 2y_E + 2\sqrt{y_E^2 - 2} \quad -2\sqrt{5} + \sqrt{4y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E + 22} = 2\sqrt{y_E^2 - 2} \quad \text{Dots}$$

~~50 - 2\sqrt{4y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E + 22} = 2\sqrt{y_E^2 - 2} + 2\sqrt{5} \quad 4y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E + 22 = 4(y_E^2 - 2) + 50 + 8\sqrt{5y_E^2 - 20}~~

~~y_E^2 - 8\sqrt{5}y_E = y_E^2 + 20 + 8\sqrt{5y_E^2 - 20} \quad 8\sqrt{5y_E^2 - 20} = -8\sqrt{5}y_E - 20 \quad \text{Dots}~~

~~64(5y_E^2 - 20) =~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $\pi \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{\pi} - \frac{x}{5}$ $\begin{cases} \cos x \in [-1; 1] - \text{всегда верн} \\ \frac{\pi}{\pi} - \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad (\forall x) \end{cases} \Rightarrow$
 $\cos x = \sin(\frac{\pi}{\pi} - \frac{x}{5})$ $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\pi} + \frac{x}{5})$ $\cos x = \cos(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5})$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$ $x \in [-2\pi; 3\pi]$ $x \in [-2\pi; 3\pi]$ $x \in [-2\pi; 3\pi]$
 $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ 6x = 2\pi + 10\pi k \end{cases}$ $\begin{cases} 6x = -2\pi + 10\pi l \\ 3x = -\pi + 5\pi l \end{cases}$

Однор царств: серий 1: $-4\pi \leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi \quad -4 \leq 1 + 5k \leq 6$

$-5 \leq 5k \leq 5 \quad k \in \{-1; 0; 1\} \quad x \in \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; 3\pi\}$

серий 2: $-6\pi \leq -\pi + 5\pi l \leq 9\pi \quad -6 \leq -1 + 5l \leq 9 \quad -5 \leq 5l \leq 10 \quad l \in \{-1; 0; 1; 2\}$

$x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$ 6 совокупности: $x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}, 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9. $ax - 3y + 4b = 0$ (1) — ур-е прямой (2): $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 200 - 36) = 0$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 164) = 0$ (2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \text{ — окруж.} \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \text{ — окруж.} \end{cases}$

Чтобы прямая (1) прошла

пересекла обе окружности.

Если при нахождении коэффициентов

прямой она касалась одной

и пересекла другую окр., то (1)

ее можно сдвинуть вправо

чтобы за сдвиг прямой, и уче-

быв дубликатом не стала. Чтобы

поменять случаи, когда пересек-

лась с окружностями $a \leq 2$.

У окр. есть 4 общие касательные

с козр. каскоста $k_1, -k_1, k_2, -k_2$ (а от-

вечают за козр. каскоста, потому что

имеем его допущение засечен.

Очевидно $|k_1| > |k_2|$. Но ур-е $ax - 3y + 4b = 0$

$$3y = ax + 4b \quad y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b. \text{ При } |\frac{a}{3}| \in [k_1, k_2]$$

Прикас. в (рис. (а)), при $|\frac{a}{3}| \in [k_1, k_2]$

Прикас. в (рис. (б)), при $|\frac{a}{3}| \in [k_2, -k_1]$ так как

b не удовл. условий, т.к. при увеличении

коэф. пересекший с едой окружностью

коэф. пересекший с другой касательной,

т.к. $k_1, -k_1$ — козр. каскоста общих касательных, у каскоста окру-

жности лежит по разное стороны от них. (рис (б)). Чтобы

ур-е ~~имело~~ общ. касательных: $kx + ly + m = 0$ — прямая S

$$\left\{ \begin{array}{l} p(O_1; S) = 1 \\ p(O_2; S) = 6 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 1 \\ \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 6 \end{array} \right. \text{ решени: } \begin{cases} \sqrt{3}x + y + 7 = 0 \\ -\sqrt{3}x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3}x + y + 7 = 0 \\ -\sqrt{3}x + y + 7 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{cases} \sqrt{3}x + 7y - 20 = 0 \\ -\sqrt{3}x + 7y - 20 = 0 \end{cases}$$

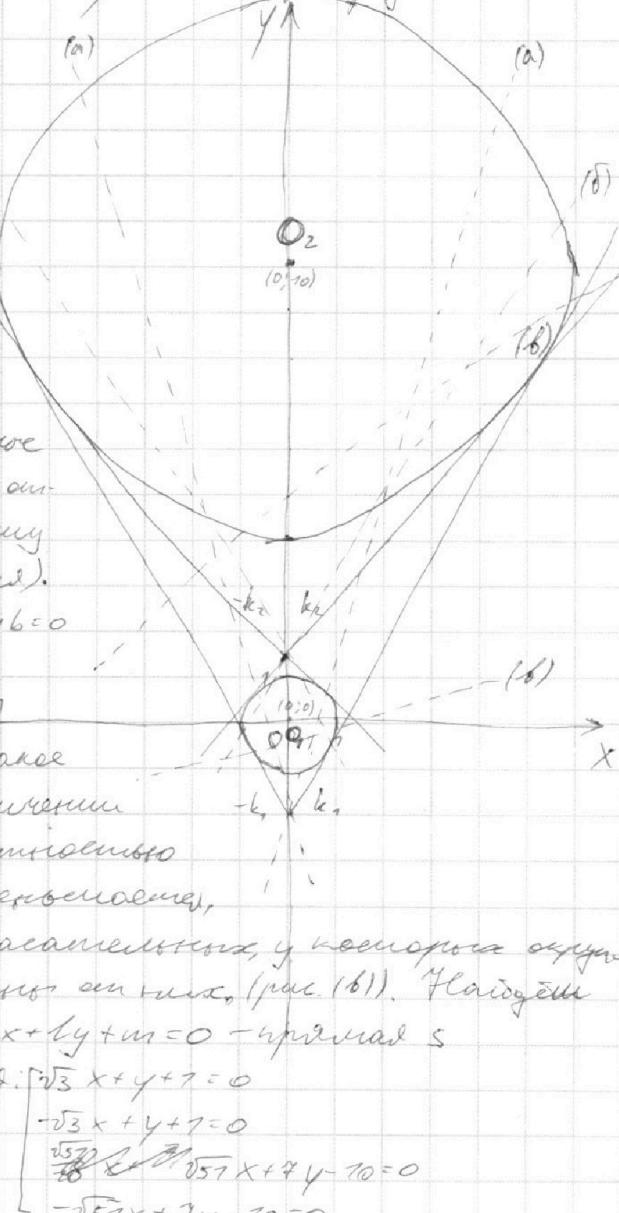
Из получ.: $\begin{cases} m = 1 \\ 10l = 5 \\ k^2 + l^2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} m = -1 \\ 10l = 7 \\ k^2 + l^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 1 \\ 10l = 7 \\ k^2 + l^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -1 \\ 10l = 7 \\ k^2 + l^2 = 1 \end{cases}$$

, допущение на мелкое козр.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 1 \\ y = -\sqrt{3}x - 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{57}}{7} \quad 3 > \frac{\sqrt{57}}{99} \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = \frac{\sqrt{57}}{7}$$

$$y = \frac{\sqrt{57}}{7}x + \frac{10}{7} \quad \left| \frac{a}{3} \right| > \frac{\sqrt{57}}{7} \quad \left| a \right| > \frac{3\sqrt{57}}{7} \quad a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{7}; +\infty)$$

$$y = -\frac{\sqrt{57}}{7}x + \frac{10}{7}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{7}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. ур-е сингосимметрично x : $\log_5(2x) - 3 \log_5 x = \log_{5x^3} 625 - 3$

$\log_5(2x)$ обратимое для $x > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\log_5(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3 \quad (\log_{5x^3} 625 = \frac{1}{3} \cdot 4 \log_5 5)$$

$$\log_5(2x) = a \quad a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad || \cdot a \neq 0 \quad (a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq \frac{1}{2})$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a \quad a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \quad a=0 \text{ не является решением,}$$

ищем корни не присущие

ур-е сингосимметрично y : $\log_5 y + 4 \log_5 5 = \log_{5y^4} 5 - 3 \quad (y > 0)$

$$\log_5 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3 \quad \log_5 y = b \quad b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad || \cdot b \neq 0$$

$(b \neq 0 \text{ и.к. } y \neq 1) \quad b^5 + 4 = -\frac{1}{3} \cdot 3b \quad b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \quad b=0 \text{ не является решением, ищем корни не присущие}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \quad (1) \\ b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \quad (2) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0 \Rightarrow (a+b)(a^4 - ab^3 + a^3b - ab^2 + b^4) = 0 \\ a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0 \Rightarrow (a+b)(a^4 - ab^3 + a^3b - ab^2 + b^4) = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \quad (2)$$

~~а и б не нули~~

~~(3). Задача показывает, что если $a^5 + 3a = \frac{13}{3}$,~~

$$a^5 - ab^3 + a^3b - ab^2 + b^4 + 3 = 0 \quad \text{но}$$

~~100~~ $f_1(a) = a^5 + 3a - \frac{13}{3} \quad f_1'(a) = a^4 + 3 > 0 \Rightarrow$ монотонно возр. $\Rightarrow y$ ур-е (1) один корень, ит-ко $f_1'(b) = b^5 + 3b + \frac{13}{3} \quad f_1'(b) = b^4 + 3 > 0 \Rightarrow$ монотонно возр. $\Rightarrow y$ ур-е (2) один корень. Задача показывает, что если c - корень (1), то $c^5 + 3c - \frac{13}{3} = 0 \Rightarrow c^5 + 3c = \frac{13}{3} \Rightarrow (-c)^5 + 3(-c) = -(c^5 + 3c) = -\frac{13}{3} \Rightarrow (-c)^5 + 3(-c) + \frac{13}{3} = 0 \Rightarrow -c$ - корень (2) \Rightarrow единственное возможное значение а и б таково, что $a+b=0$.

$$0 = a+b = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) \quad 0 = \log_5 1 \Rightarrow \log_5(2xy) = \log_5 1$$

$$2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

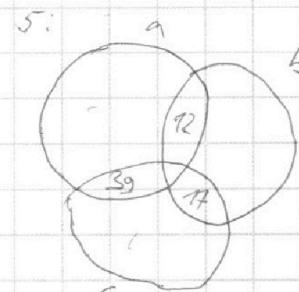
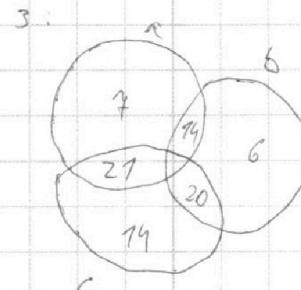
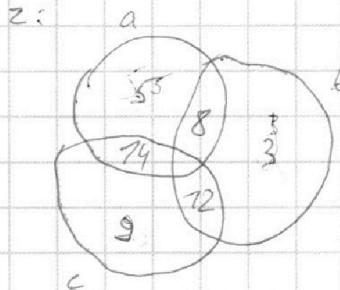


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. ~~Числа 39, 63, 27, 15, 21, 12, 3, 5~~



~~27 · 3 · 5 · 39~~

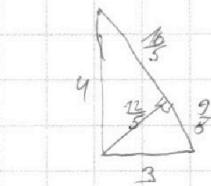
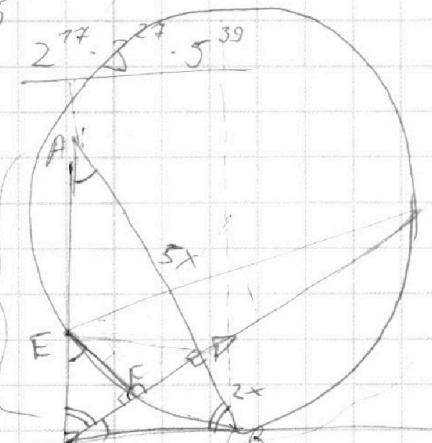
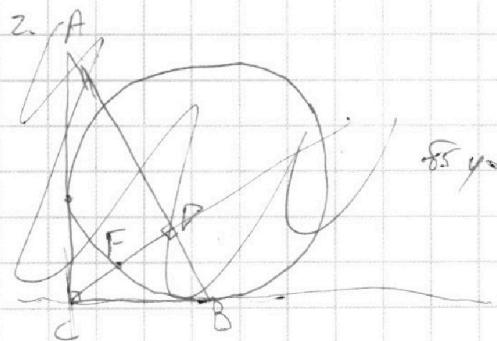
$$a = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5$$

В общем наименьшее

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 39$$



$$\begin{aligned} 18 &= \frac{74}{25} \\ 9 &= \frac{74}{25} \cdot 25 \\ &= \frac{225 - 144}{25} = \frac{81}{25} \\ 5x + 25 &= 81 \end{aligned}$$

$$S_{APC} = \frac{5}{2} S_{ABC}$$

надо $\frac{EF}{AD} : \frac{CF}{FD} : \frac{CE}{EA}$

$$3. \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\frac{\pi - 2x}{10} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (1)$$

$$-\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$a = \sin x$$

$$a \in [-1, 1]$$

$$x \in [-\pi, \pi]$$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}) \quad (2)$$

$$2x \in [-4\pi, 6\pi]$$

$$x \in [-2\pi, 3\pi]$$

$$\frac{5\pi}{10}$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5})$$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5})$$

$$\cos x = \cos(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5})$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k$$

$$4x = 2\pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{2\pi}{5} + \frac{5\pi}{2}k$$

$$\frac{6x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k$$

$$6x = -2\pi + 20\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}k$$

$$x = \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) -2 \leq \frac{7}{2} + \frac{5}{2}k \leq 3 \quad -4 \leq 7+5k \leq 6 \quad -5 \leq 5k \leq 5 \quad -1 \leq k \leq 1$$

$$k = -1, 0, 1$$

$$x = -2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{2}, 3\sqrt{3}$$

$$2) -2 \leq -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}k \leq 3 \quad -6 \leq -x+5k \leq 9 \quad -5 \leq 5k \leq 10 \quad -1 \leq k \leq 2$$

$$k = -1, 0, 1, 2$$

$$x = -2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3} \vee -\frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} \vee 2\sqrt{3} \vee 3\sqrt{3}$$

$$(9x-3y+46=0) \quad (1)$$

$$(x^2+y^2-7)(x^2+y^2-20y+64)=0 \quad (2)$$

$$(2): \begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2+y^2-20y+100-36=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$$

$$x^2+(y-20)^2=36$$

$$lx+ly+m=0$$

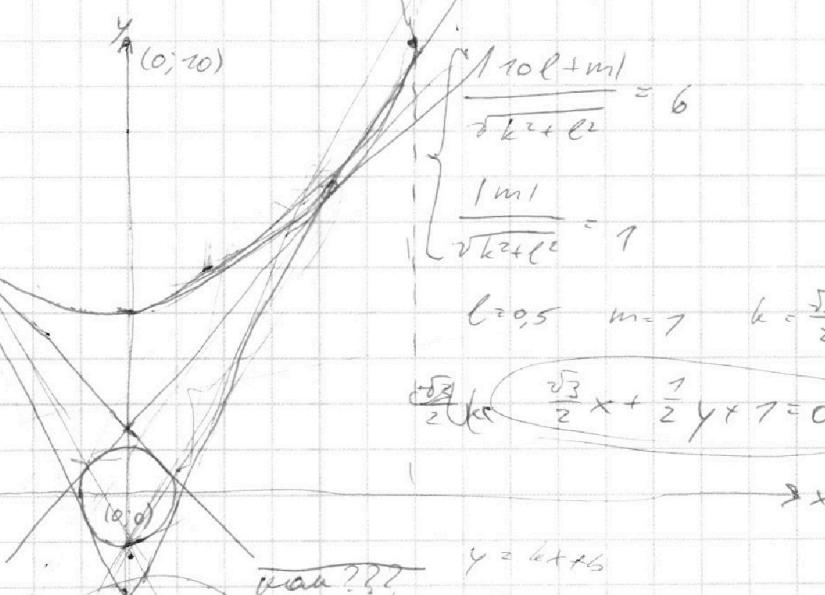
- общ. уас.

$$\begin{cases} |10l+m| \\ \sqrt{k^2+l^2} \end{cases} = 6$$

$$\begin{cases} |m| \\ \sqrt{k^2+l^2} \end{cases} = 7$$

$$l=0,5 \quad m=7 \quad k=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}kx + \frac{1}{2}y + 7 = 0$$



$$y = lx + m$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 7 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 7 = 0 \quad m=-7 \quad l=\frac{7}{10}$$

$$k = \frac{-\sqrt{3}}{10}$$

$$\sqrt{3}x + y + 7 = 0$$

$$-\sqrt{3}x + y + 7 = 0$$

$$\sqrt{3}x - y - 7 = 0$$

$$-\sqrt{3}x - y - 7 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{10}x + \frac{7}{10}y - 7 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{10}x + \frac{7}{10}y - 7 = 0$$

$$m=-7 \quad l=\frac{7}{10} \quad k = \frac{-\sqrt{3}}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\sqrt{57}x + 7y - 20 = 0 \quad y = -\frac{\sqrt{57}}{7}x + \frac{20}{7}$$

$$-\sqrt{57}x - 7y - 20 = 0 \quad y = -\frac{\sqrt{57}}{7}x - \frac{20}{7}$$

$$101 > \frac{-3\sqrt{57}}{7} \cdot \frac{4}{7}$$

$$161 \quad 3y = -\frac{3\sqrt{57}}{7}x + \frac{30}{7}$$

$$3y = \frac{3\sqrt{57}}{7}x + \frac{30}{7}$$

$$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{7}, +\infty)$$

$$5. \log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = 3 \log_5 2x - 3$$

$$t = \log_5 2x \quad t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t \quad t^5 + 3t - \frac{73}{3} = 0 \quad t^5 + 9t - 73 = 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_{2x} 625 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4$$

$$= \frac{4}{3} \log_{2x} 5 =$$

~~$$\frac{1}{25} \quad \frac{1}{25} + \frac{9}{15} = \frac{7425}{225} \quad \frac{9}{5} = \frac{625 + 9}{625.5}$$~~

~~$$f' = t^4 + 9 \geq 0 \text{ наим. экст.} \Rightarrow t^2 + \frac{3}{4t^2} = \frac{23}{8t^2} \geq 0$$~~

$\log_5^4 2x -$ \Rightarrow 7 корней между 1 и 2

~~$$\log_5 2x \in [-1, 2] \quad 2x \in [0, 2^5] \quad x \in [0, 3.2]$$~~

~~$$\frac{243}{32} + \frac{27}{2} = \frac{243 + 27 \cdot 16}{32}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 16 \\ \hline 162 \\ + 27 \\ \hline 432 \end{array}$$~~

~~$$\frac{5}{4} \quad \frac{625 \cdot 5}{1024} + \frac{45}{4} = \frac{625 \cdot 5 + 45 \cdot 256}{1024}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 27 \\ \hline 96 \\ + 32 \\ \hline 76 \end{array}$$~~

~~$$\frac{9}{8} \quad \frac{730}{260} \quad \frac{730 \cdot 20}{260} \quad \frac{52}{260}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 256 \\ \hline 195 \\ + 3136 \\ \hline 74645 \end{array}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_5 \frac{5}{3} \quad \log_5^4 y + \cancel{\log_5 5} =$$

($\cancel{8/3}$)
 $\cancel{2/3}$)

$$\log_5^4 y + \cancel{\log_5 5} = \log_5^4 y + 4 \log_5 5 = -\frac{1}{3} \log_5 5 - 3$$

л

$$\log^4 y + \frac{4}{3} = \log_5^4 y + \cancel{\log_5 5} = -\frac{1}{3} \log_5 5 - 3$$

$$t^4 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} t - 3$$

$$t^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t$$

$$t^5 + 3t + \frac{13}{3} = 0$$

$$t^5 + 3t + 73 = 0$$

$$\begin{cases} t_x^5 + 3t_x + 73 = 0 \\ t_y^5 + 3t_y + 73 = 0 \end{cases} \quad t_x \rightarrow a \in [1; 2] \quad \log_5 \cancel{(xy)} \quad \text{безн. 2xy}$$

$$\begin{cases} t_x^5 + 3t_x + 73 = 0 \\ t_y^5 + 3t_y + 73 = 0 \end{cases} \quad t_y \rightarrow b \in [-2; -1]$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + (a+b)g = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + g = 0$$

$$\text{если } a+b=0, \text{ то } \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = ?$$

~~$xy = \frac{1}{3}$~~

$$\text{если } ab \neq 0 \quad a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^4 + b^4) + g =$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2 + ab) + g = (a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 + g$$

$xy = \frac{1}{3}$

$$-a^2b^2$$

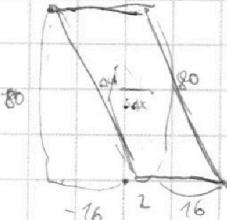
$$+ab$$

$$+g \checkmark ab(a^2 + b^2)^2$$

✓

$$\text{NPA} / \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 \in [-7; 7] \end{cases}$$

6.



$$\angle ABD = 2\alpha$$

$$\angle ACD = 45^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

