



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad \text{Пусть } a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}; \quad b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}; \quad c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

$$X = a_2 + b_2 + c_2 + k, \quad Y = a_3 + b_3 + c_3 + l; \quad Z = a_5 + b_5 + c_5 + m; \quad abc = 2^X \cdot 3^Y \cdot 5^Z \Rightarrow$$

$\Rightarrow X, Y, Z \rightarrow \min$, В идеальном случае $k, l, m = 0$. Рассмотрим этот случай:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 14 \\ a_5 + b_5 = n \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \{a_2; a_3; a_5; b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5\} \in \mathbb{N} \\ \{X; Y; Z\} \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) = 2(a_2 + b_2 + c_2) = 8 + 12 + 14 = 34 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min X = 17. \quad \text{При } a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9 \quad X = 17 \text{ достигается}$$

$$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 20 + 21 = 34 + 21 = 55$$

$$a_3 + b_3 + c_3 = 24,5 \Rightarrow \min Y = 24$$

$$\text{При } a_5 = 8 \quad b_5 = 6 \quad c_5 = 14 \quad Y = 24$$

$$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 12 + 17 + 39 = 12 + 56 = 68; \quad a_5 + b_5 + c_5 = 34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_{\min} = 34. \quad \text{Решая систему } \begin{cases} a_5 = 12 \\ b_5 = 6 \\ c_5 = 14 \end{cases}, \text{ получаем: } c_5 = 22, \quad a_5 = 17, \quad b_5 = -5$$

$$\text{Несовпадение } b_5 + c_5 = 17 + m \quad \text{и} \quad b_5 + c_5 = 22 \quad \text{вывод: } a_5 = 17, \quad b_5 = -5, \quad c_5 = 22$$

Идеальное допустимое $b_5 = 0$.

$$\text{Тогда } a_5 = 12, \quad c_5 = 24 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow Z = 34$$

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^k \quad b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0 \quad c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{24} \quad Z = 34$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{24} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{24} \cdot 5^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

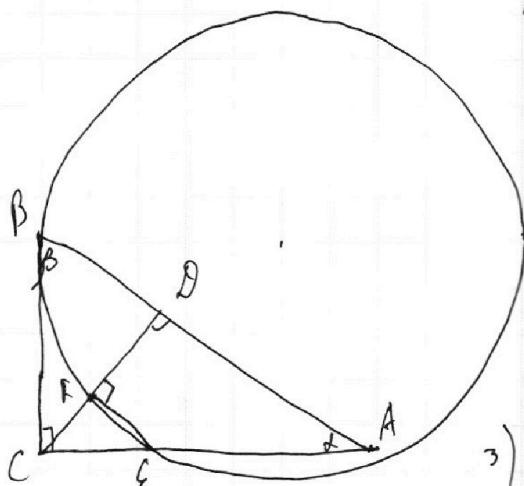
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$$AB \parallel EF, \frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

1) Рассмотрим $\triangle ABD$: $AD=5x, BD=2x$.

$$CD^2 = BD \cdot AD, CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$$

2) Так как $AB \parallel EF$, то $\widehat{EFD} + \widehat{FAD} = 180^\circ$.
 $\widehat{EFD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$$3) \text{Из } \triangle BCD: BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{9x^2 + 10x} = \sqrt{19}x$$

$$4) \text{Из } \triangle CDA: AC = \sqrt{DC^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$$

5) Рассмотрим $\widehat{CAB} = \alpha, \widehat{CBA} = \beta$. $\beta + \alpha = 90^\circ; \widehat{BCD} = \alpha; \widehat{DCA} = \beta; \widehat{FEC} = \alpha$.
 $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ ($F = D = 90^\circ$ и \widehat{C} -общий); $\triangle CDA \sim \triangle BCA$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N3. \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\textcircled{1} \quad -1 \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq 1$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$-10\pi \leq -2x \leq 10\pi$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k & \text{①} \\ \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h & \text{②} \end{cases} \quad \{k, h\} \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h$$

~~$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$$~~

$$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi h$$

$$8x = 4\pi - 20\pi h$$

$$8x = -4\pi - 20\pi h$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi h$$

$$x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi h$$

$$\textcircled{1} \quad -5 + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi h \leq 5 + \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad -5 + \frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi h \leq 5 + \frac{\pi}{2}$$

$$-10 \leq -5\pi h \leq 10$$

$$\frac{5\pi}{6} - 5 \leq -\frac{5\pi h}{3} \leq 5 + \frac{5\pi}{6}$$

$$-2 \leq \pi h \leq 2$$

$$\frac{\pi}{2} - 3 \leq -\pi h \leq 3 + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{2}{\pi} \leq h \leq \frac{2}{\pi}$$

$$-3 - \frac{\pi}{2} \leq \pi h \leq 3 - \frac{\pi}{2}$$

Так как $h \in \mathbb{Z}$, то только $h=0$

$$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$\text{yg.} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} > 1$$

$$\begin{cases} h = 0 \text{ yg.} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -2$$

$$\frac{3}{\pi} < \frac{3}{2} \Rightarrow h \geq 1 \text{ не yg.}$$

$$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -1$$

$$h \leq -2 \text{ не yg.} \Rightarrow -\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow h = -1 \text{ yg.}$$

~~$$x = -\frac{\pi}{3}$$~~

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$.

~~$$x = -\frac{\pi}{3}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№4. } \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы равносильно совокупности:

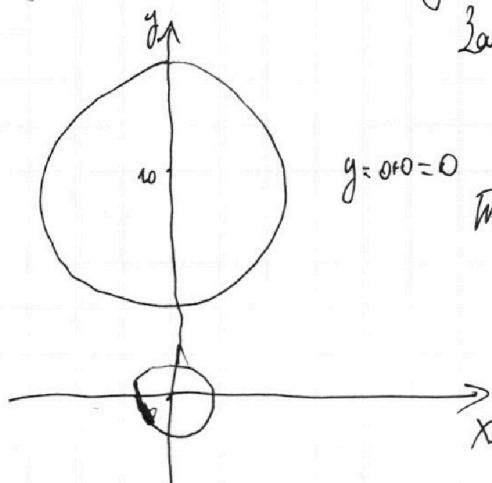
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \textcircled{1} \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

График \textcircled{1} - окружность с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом 1;
график \textcircled{2} - окр. с центром в точке $(0, 10)$ и радиусом 6.

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$3y = ax + 4b \quad y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

$$\text{Заменим } \frac{a}{3} = t; \frac{4}{3}b = v; \Rightarrow y = tx + v$$

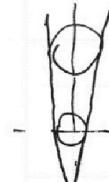


При $a=0$: ~~если~~, ненулевым $b=0$.
Тогда система имеет 4 реш. \Rightarrow
 $\Rightarrow a=0$ - угл.

При больших $|a|$ могут быть 2, 1, 0 решений.

Рассмотрим случай, когда прямая касается одной окружности и с другой имеет 2 точки пересечения. Тогда ~~прямая~~ при сдвиге прямой (при изменении v) характеризовано будет случаями, когда система имеет 3 реш.

Рассмотрим случаи, когда прямая является касательной к одному окр.
Случай 1. Касание вблизи



- очевидно, что при сдвиге прямой вверх будет 3 реш. \Rightarrow
 \Rightarrow не интересует

Случай 2. Касание вда



. В таком случае как бы мы ни меняем v , будем иметь максимум 2 реш.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдем точки касания вида 2:
 $x^2 + (fx+v)^2 = 1$ - кас. к окружности ω

$$(f^2+1)x^2 + 2fxv + v^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 0: 4f^2v^2 - 4(f^2+1)(v^2-1) = 0$$

$$f^2 - v^2 = 1$$

$$\begin{cases} f^2 - v^2 = 1 \rightarrow f^2 = v^2 + 1 \\ 3bf^2 - v^2 + 2fv - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 36(v^2+1) - v^2 + 20v - 64 &= 0 \\ 7v^2 + 4v - 20 &= 0 \\ \frac{\Delta}{4} = 4 + 140 &= 144 \end{aligned}$$

Контузуро заметить, что нас интересует прямая с меньшим по модулю f :
 Дадим значение v наклона, то есть меньший по модулю f :

$$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$7\sqrt{3} > \sqrt{51}$$

$$v = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{7} = \left[\frac{-2}{7}; \frac{\sqrt{3}}{7} \right] \cup \left[-\frac{2}{7}, \frac{-\sqrt{3}}{7} \right]$$

$$\begin{aligned} f &= \pm \sqrt{3} - \text{касание вида 1} \\ f &= \pm \frac{\sqrt{51}}{7} - \text{касание вида 2}. \end{aligned}$$

$$\frac{a}{3} = f \Rightarrow a = 3f = \pm \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Итак, } a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right) \in \text{Orbit.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N}^5 \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \log_{2x} 5^4 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad x > 0, \quad x \neq \frac{1}{2}; \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ x \end{array}$$

На \textcircled{1}: $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \frac{4}{3 \cdot \log_5(2x)} = 0; \quad \log_5(2x) = f$

$$\textcircled{1} \quad f^5 + 3f - \frac{13}{3} = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5 0.2 - 3$$

$$\textcircled{2} \quad y > 0, \quad y \neq 1 \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ y \end{array}$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3 \log_5 y} + 3 = 0$$

$$\log_5 y = b$$

$$\textcircled{2} \quad b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: \quad f^5 + b^5 + 3f + 3b + \frac{13}{3} - \frac{13}{3} = 0$$

$$f^5 + b^5 + 3(f+b) = 0$$

$$f^5 + b^5 = (b+f)(b^4 - b^3f + b^2f^2 - bf^3 + f^4)$$

$$(b+f)(b^4 - b^3f + b^2f^2 - bf^3 + f^4 + 3) = 0$$

~~без~~ $\Rightarrow b+f=0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5(y) = 0; \quad \log_5(2xy) = 0$

$$2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$b^4 - b^3f + b^2f^2 - bf^3 + f^4 + 3 = 0$$

$$(b^4 + f^4)^2 - bf(b^3 + f^3 + bf) + 3 = 0$$

~~посмотрим на~~ на b : очевидно, что при отрицательных b нет решений (и при $b=0 \Rightarrow f=0$) $\Rightarrow f > 0$.

Посмотрим на b : очевидно, что ~~есть~~ нет неприменимых корней $\Rightarrow b < 0$

$$(b^4 + f^4)^2 - bf((b+\frac{f}{2})^2 + \frac{3f^2}{4}) + 3 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad (T.k. \quad bf < 0)$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + 3 = 0$ - невозможно \Rightarrow единственное решение $xy = \frac{1}{2}$

Одн. $\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

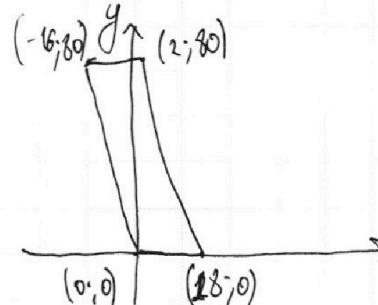
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

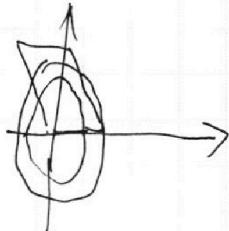
✓ 6



$$y_2 + 5x_2 - (y_1 + 5x_1) = 45$$

$$y_2 - y_1 + 5(x_2 - x_1) = 45$$

Дадим каждой точке номер,
который численно равен сумме
абсциссы, умноженной на 5, и ординате. Точки, у которых
номер отличается на 45, будут удовлетворять.
Точки с одинаковыми номерами будут образовывать эллипс на
данной координатной плоскости



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

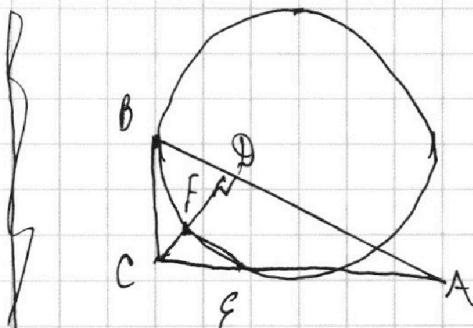
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle AEF$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{5x}{2x}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle CEF} - ?$$

$$AD = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{10}x$$

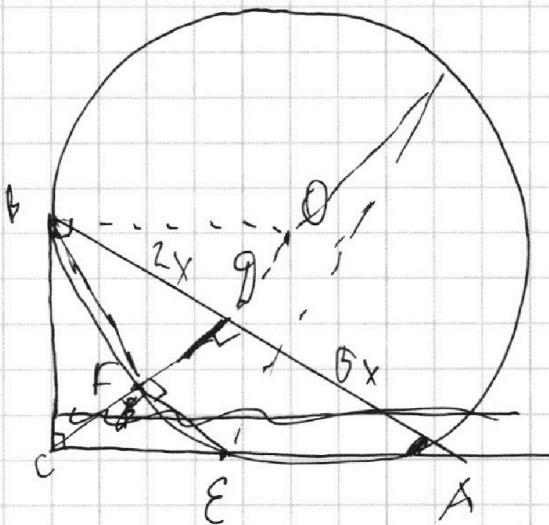
$\triangle CFE$ - ищем

$\triangle CFE \sim \triangle BCA$

$$BC = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$$

$$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$$

~~без угла~~

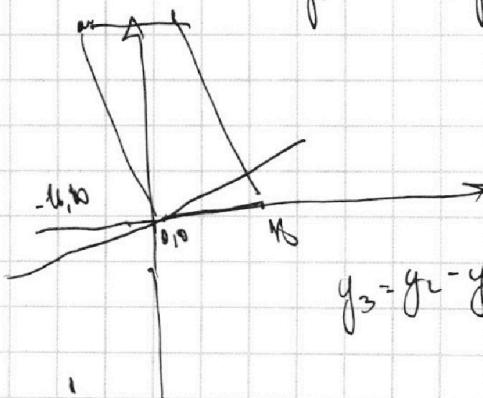


$$(b+f)(b^2 - b^3 + b^2 f^2 - bf^3 + f^4) = b^5 + f^5$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{f^5 - f^4}{-f^5 - bf^4} \quad | \quad f^4 - bf^3 + b^2 f^2 - b^3 f \\
 & -bf^4 - f^4 \\
 & -bf^3 + b^2 f^3 \\
 \\
 & \frac{-bf^2 f^3 - f^4}{-b^2 f^3 + b^3 f^2} \\
 & -b^3 f^2 + b^4 f \\
 & -b^4 f + f^4
 \end{aligned}$$

$$CF = y, FD = \sqrt{10}x - y$$

$$y_2^2 b x_2 - (y_1 + 5x_1) = 45$$



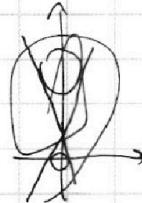


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

случай 2: касание вдоль



Лучше прямая касается одной окр., а с другой имеет 2 т. кас.

Погодя очевидно, что, изменяя b , ~~изменяли~~ так, чтобы с первой окр.
было 2 т., со 2^м окр. оставалось 2 м.

случай 2: касание вдоль

В такой случае, как для них не изменяя b , ~~если~~ если сначала то

будет 2 м. н., то с друг-
кой будем 0 м. н.. Найдем эти крит. точки

касание \Leftrightarrow с ~~верхней~~ верхней ω :

$$x^2 + \left(\frac{a}{3}x + \frac{b}{3}\right)^2 = r^2 \quad (f^2 + 1)x^2 + 2fx + V^2 - 1 = 0$$

$$D=0: \quad 4f^2V^2 - 4(f^2+1)(V^2-1) = 0$$

$$4f^2V^2 - 4f^2V^2 + 4V^2 - 4 = 0$$

$$\text{значит } \frac{a}{3} = f, \frac{b}{3} = V$$

$$fV^2 - f^2 + V^2 - 1 = 0$$

$$f^2V^2 - f^2V^2 + f^2 - V^2 + 1 = 0$$

$$f^2 - V^2 + 1 = 0$$

касание \Leftrightarrow с ~~нижней~~ верхней ω : $x^2 + (fx + V - 1)^2 = r^2$

$$x^2 + fx^2 + V^2 - 2fxV + 2fx - 2V + 1 = 36 = 0$$

$$(f^2 + 1)x^2 + (20f - 2fV)x + V^2 - 20V + 64 = 0$$

$$D=0: \quad (20f - 2fV)^2 - 4(f^2+1)(V^2 - 20V + 64) = 0$$

$$400f^2 + f^2V^2 - 20f^2V - f^2V^2 + 20f^2V - 64f^2 - V^2 + 20V - 64 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2k\pi \quad \{k \in \mathbb{Z}\}$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20k\pi$$

$$8x = 4\pi - 20k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}k\pi$$

$$-1 \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq 1$$

$$-10 \leq \pi - 2x \leq 10$$

$$\pi - 10 \leq 2x \leq \pi + 10$$

$$\frac{\pi}{2} - 5 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 5$$

$$2) \quad \frac{\pi}{2} - 5 \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi h \leq \frac{\pi}{2} + 5$$

$$\frac{5\pi}{6} - 5 \leq -\frac{5}{3}\pi h \leq \frac{5\pi}{6} + 5$$

$$\frac{\pi}{2} - 3 \leq -\pi h \leq \frac{\pi}{2} + 3$$

$$-\frac{\pi}{2} + 3 \leq \pi h \leq 3 - \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} \leq h \leq \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$h=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$10 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3}$$

$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ - верно

столбик

$$\frac{\pi - 2x}{10} \in [-1, 1]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$

$$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi k$$

$$12x = -\pi - 4\pi - 20\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k$$

$$1) \quad \frac{\pi}{2} - 5 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{\pi}{2} + 5$$

$$-9 \leq -\frac{5}{2}\pi k \leq 5$$

$$-2 \leq \pi k \leq 2 \quad -\frac{2}{\pi} \leq k \leq \frac{2}{\pi}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} -$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 4 \text{ не yg.}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} > -1$$

$$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2} \Rightarrow -1 \text{ не yg}$$

$$10 \arcsin(0) = \pi - \frac{2\pi}{2}$$

$$0 = 0 \quad \text{верно}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

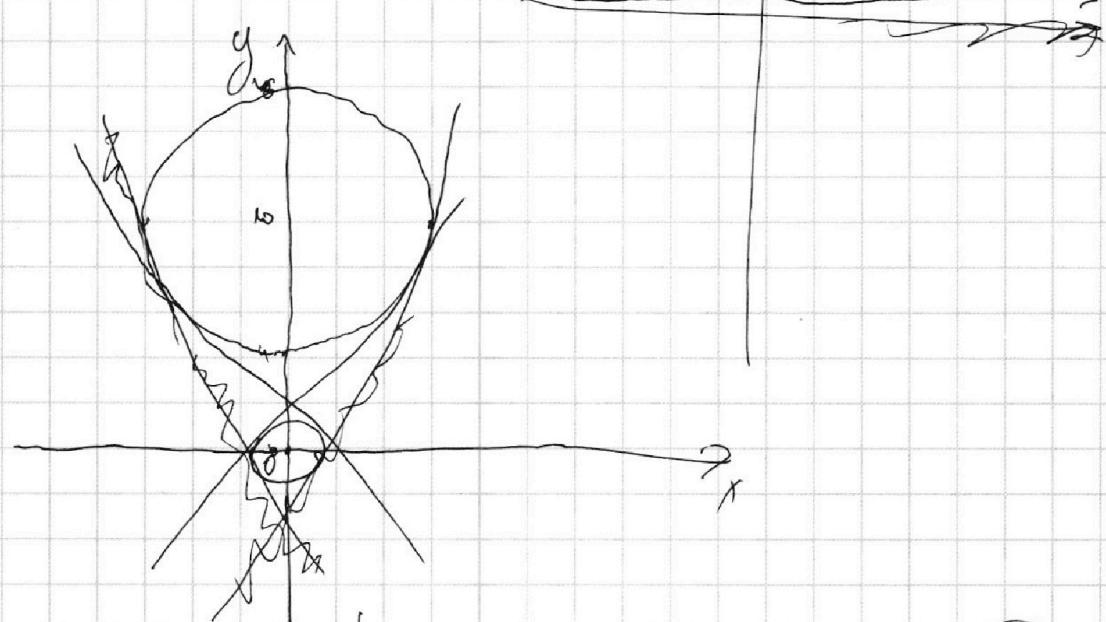
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3ay + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2xy + 64) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 16)^2 = 6^2 \end{cases}$$



$a=0$: при, например, $b=0$, система имеет 4 решения \Rightarrow $a=0$ $y = g$.

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

при $(a \rightarrow +\infty \text{ или } a \rightarrow -\infty)$ очевидно, получается 6, гипотезы для
единичных не могут быть, т.к. система имеет 4 решения.

Необходимо вычислить критический момент - точку касания.

Случай 1: касание в верх



- очевидно что субчину
критическую нужно выделить
 \Rightarrow сверху будем 4 решения \Rightarrow

\Rightarrow все интересует

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36t^2 - V^2 + 20V - 64 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 36t^2 - V^2 + 20V - 64 = 0 \\ t^2 - V^2 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$V^2 = t^2 + 1$$

$$t^2 + 1 \geq 1 \quad V^2 \geq 1 \quad (\text{по рисунку } V > 0 \Rightarrow V = \sqrt{t^2 + 1})$$

138

~~3007~~

некоторые ошибки укажу перед а.) (всегда отрицательный случай $t > 0$. При $t < 0$ из-

$$36(t^2 - 1) - V^2 + 20V - 64 = 0$$

$$36V^2 + 20V - 700 = 0$$

$$7V^2 + 4V - 200 = 0$$

$$\Delta = 4 + 1400 = 1404 ; \quad V = \frac{-2 \pm \sqrt{1404}}{14} = \left[\begin{array}{l} -10 \\ \frac{10}{7} \end{array} \right]$$

$$t^2 = V^2 - 1$$

$$V = -2 ; \quad t^2 = 4 - 1 = 3$$

$$t = \pm \sqrt{3}$$

из нав.

Нас интересует такое t , при котором тангенс угла наклона пра-
мой линии $\Rightarrow \mathbb{R}$. $\frac{a}{3} = t \Leftrightarrow ; \quad \sqrt{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \quad -\sqrt{3} > -\frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a = 3t = \pm \frac{3\sqrt{51}}{7} ; \quad a \in \left(-\infty ; -\frac{3\sqrt{51}}{7} \right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7} ; +\infty \right) \cup \{0\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m \quad a = 2^{\frac{a_2}{3}} 3^{\frac{a_3}{5}} 5^{\frac{a_5}{9}}$$

$$b = 2^{\frac{b_2}{3}} 3^{\frac{b_3}{5}} 5^{\frac{b_5}{9}}$$

$$c = 2^{\frac{c_2}{3}} 3^{\frac{c_3}{5}} 5^{\frac{c_5}{9}}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 19 \\ a_5 + b_5 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$$

$$\sum a_5 + b_5 + c_5 = (a_2 + b_2 + c_2) + (b_3 + c_3) + (a_5 + c_5) = 8 + 12 + 14 = 34$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 17$$

$$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 10 + 21$$

$$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 12 + 17 + 39 = 68$$

$$a_5 + b_5 + c_5 = 68 = 34 \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{68}{2} = 34$$

$$\text{П.н. } X = a_2 + b_2 + c_2 = 17 \text{ и } Z = a_5 + b_5 + c_5 = 34 \in \mathbb{N} \text{ two min}$$

$$X = 17, \min Z = 34. \text{ Заметим, что } a_3 + b_3 + c_3 = \frac{1}{7,5} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

\Rightarrow , так как $X \in \mathbb{N}$, то $\min X = 18$. Осталось только привести

Пример. $a_2 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \quad a_3 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9 \quad (X = 17)$

$$a_5 = 14$$

$$c_5 = 22 \quad a = 17 \quad b = 5 \text{ wrong.}$$

Проверка: $a_2 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \quad a_3 = 3^3 \quad a_5 = 2^2 \quad a_2 + b_2 + c_2 = 17$

$$(X = 28)$$

$$b_3 = 6 \quad c_3 = 16$$

$$Z: \quad a_5 - a_3 = 5$$

$$a_5 + c_5 = 39$$

Вспомогательное выражение $b_5 = 0 \Rightarrow b_5 = 0$; тогда $Z = 39$

$$a_5 = 17, \quad c_5 = 22$$

$$a = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \quad b = 2^3 \cdot 3^8 \cdot 5^0 \quad c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{24}$$

$$abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(b+f) \left(1 \left(b^4 - b^2 f + b^4 f^2 - b^3 f^3 + f^4 \right) + 3 \right) = 0$$

$$b = -f: \log_5 y = -\log_5 (2x) \Rightarrow y = \frac{1}{2x} \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$(b^3 + f^2)^2 - bf(b^2 + f^2) + 3 = 0$$

$$\cancel{b^2} - bf \cancel{2} - 3 = 0 \quad \delta = b^4 + 11$$

$$bf = \frac{b^2 f^2 \pm \sqrt{b^2 f^2 + 12}}{2}$$

$$\textcircled{4}: b^2 + f^2 = \frac{bf + \sqrt{bf^2 + 12}}{2}$$

$$2b^2 + 2f^2 - bf = \sqrt{b^2 f^2 + 12}$$

$$b^4 + 4f^4 + b^2 f^2 + 8b^2 f^2 - 4b^3 f - 4bf^3 = \cancel{b^2 f^2} + 12$$

$$b^4 + f^4 + \cancel{2b^2 f^2} - bf(b^2 + f^2)$$

$$(b^2 + f^2)^2 - (b^2 + f^2) \left((b^2 + f^2)^2 - (b^2 + f^2) \right) - 6 = 0$$

$$b^2 + f^2 = n$$

$$2n^2 - n^3 + n^2 - 6 = 0 \quad n^3 - 3n^2 + 6 = 0$$

$$(b^2 + f^2)^2 - bf(b^2 + f^2) - 3 = 0$$

$$b^2 f^2 = b^2 + f^2 - b^2$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - x}{2}}$$

$$(b^2 + f^2)^2 - (b^2 + f^2) \left((b^2 + f^2)^2 - (b^2 + f^2) \right) - 6 = 0$$

$$x^2 - y^2 - xy - 3 = 0 \\ \delta = y^2 + 4y^2 + n^2 - 5y^2 \\ x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{5y^2 + n^2}}{2}$$

$$(b^2 + f^2)^2 - bf(b^2 + f^2 + bf) + 3 = 0$$

$$b^4 + f^4 = 0 \quad bf = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{2x} 5} + 3 \cdot \log_{(2x)^3} 5^4 = 0$$

на *: $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{2x} 5} + 3 - \frac{4}{3} \log_{(2x)^3} 5 = 0$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{2x} 5} + 3 - \frac{4}{3} \log_{(2x)^3} 5 = 0 \quad \log_5(2x) = t$$

$$f^5 - 3 + 3t - \frac{4}{3} = 0 \quad 3f^5 + 9t - 13 = 0$$

$$\underline{\log_{2x} 5 + \log_{8x^3} 625 = \frac{3}{\log_{2x} 5} + \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{13}{3 \log_{2x} 5}}$$

$$\log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 + 3 \log_{2x} 5 - 3 \quad \frac{1}{\log_{2x} 5} = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 - 3$$
$$13v^5 - 3v^4 - 1 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 y - 3 \quad \log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{13}{3}b^3 + 3 = 0$$

$$3b^5 + 13b^4 + 9b^3 + 13 = 0$$

$$3(b^5 + f^5) + 9(b^4 + f^4) = 0$$

$$\frac{f^5 + b^5}{b}$$

$$-\frac{5}{b} \cancel{3f^4} - f^5$$

$$-\frac{5}{b} \cancel{3f^4} + b^2 f^3$$

$$-\frac{-b^2 f^2 + f^5}{b}$$

$$-\frac{-b^2 f^2 + f^5}{b} - f^4$$

$$-\frac{-b^2 f^2 + f^5}{b} - f^4$$

$$-\frac{b^5 + f^5}{b} \cancel{b^4 + f^4}$$

$$-\frac{b^5 + b^4 f}{b} \cancel{b^4 - b^3 f} - b^3 f + b^4 f + b^5 f$$

$$-\frac{b^4 f}{b} - b^3 f$$

$$-\frac{b^3 f}{b} - b^2 f$$

$$-\frac{b^2 f}{b} - b f$$

$$-\frac{b f}{b} - f$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N^4. \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \\ \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k & ① \\ \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h & ② \end{cases} \quad \{k, h\} \in \mathbb{Z} \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$① \quad \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$$

$$8x = 4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$$

$$-\frac{5\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{6}$$