



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$w1 \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

Пусть  $k, m, n$  - натуральные числа такие, что:

$$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, \quad bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}, \quad ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = Kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}, \quad \text{значит:}$$

$$abc = \sqrt{Kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3}, \quad \text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } abc \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{3Kmn} \in \mathbb{N} \Rightarrow$  какое-то из чисел  $k, m, n$  содержит 3 в разложении на простые множители трайку в нечётной степени, т.к. нас интересует минимальный, то берём  $3^1=3$ .

Из приведения  $abc$  можем заметить что есть  $a, b, c$  с одинаковой степенью 3, но знаем нечетные приведения, но  $ab$  и  $bc$   $abc$  делются на все храня, но при делении на  $ac$ :

$$\frac{abc}{ac} = \frac{\sqrt{3Kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3}}{n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}} = \sqrt{\frac{3Km}{n}} \cdot 2 \cdot 3^6 \cdot 5^{-5} \Rightarrow \frac{abc}{ac} \notin \mathbb{N}, \quad \text{значит}$$

$$\sqrt{Kmn} \geq 5^5 \Rightarrow Kmn \geq 5^{10}. \quad \text{Однако в интересах минимизации будем } Kmn = 3 \cdot 5^{10} \quad (\text{т.к. } Kmn \text{ содержит } 3 \text{ из ранее написанного})$$

$$\text{Тогда, пусть } k=3, m=5^{10}, n=1: \quad abc = 3 \cdot 5^5 \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39} = 2 \cdot 3 \cdot 5^{17+28+39}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Тогда } c &= \frac{abc}{ab} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{3 \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}} = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27} \\ b &= \frac{abc}{ac} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{1 \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}} = 2^3 \cdot 3^9 \\ a &= \frac{abc}{bc} = \frac{2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}}{5^{10} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{12}} = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12} \end{aligned} \right\} \text{Все числа натуральны.}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

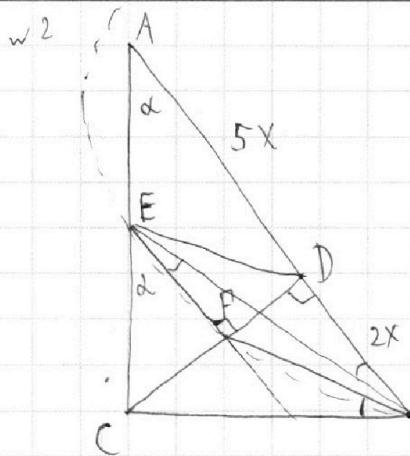
5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = 5x, BD = 2x$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

BC - касательная  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle FBC = \frac{\overarc{BF}}{2} = \angle FEB, \Rightarrow \angle EBA =$$

$= \angle FEB$  (накрест лежащие  $DB \parallel EF$ , UK.  $EB$ )  $\Rightarrow$  дуга,  
на которую опирается  $\angle EBA = \angle FBC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{w3} \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos(-x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$1) \quad 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x \quad 2) \quad 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \pi - 2x$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

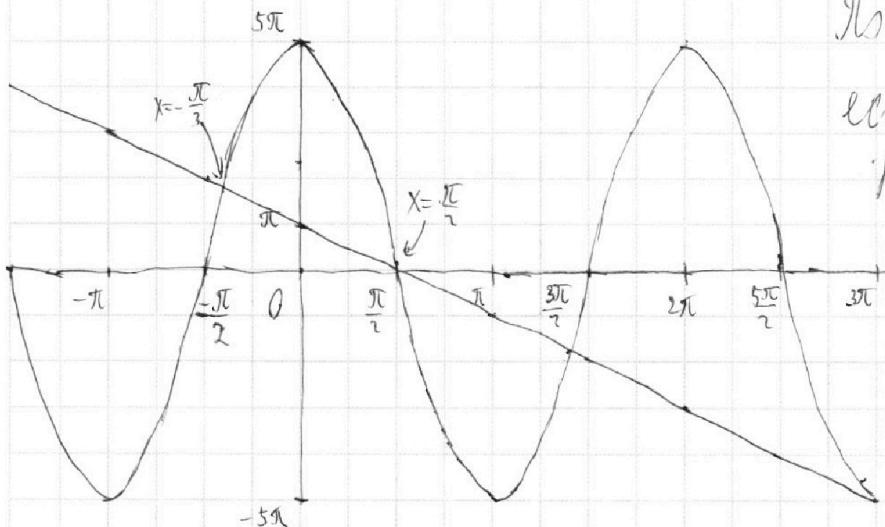
$$12x = -4\pi$$

$$8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Мы нашли корни при  $x \in [-\pi; \pi]$ .



По графику видно, что есть еще корни, рассмотрим один участок:

$$x \in [-3\pi; -\pi]:$$

$$1) \quad 10 \arcsin(\sin(-x - \frac{9\pi}{2})) = \pi - 2x$$

$$-10x - 15\pi = \pi - 2x$$

$$-8x = 16\pi \Rightarrow x = -2\pi$$

$$2) \quad 10x - 15\pi = \pi - 2x \Rightarrow 12x = 16\pi \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi \quad \text{не принадл. } [\pi; 3\pi]$$

проверка:  $10 \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{4}{3}\pi \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  корень

$$x \in [\pi; 3\pi]:$$

$$1) \quad -10x + 25\pi = \pi - 2x \Rightarrow -8x = -24\pi, \quad x = \underline{3\pi}$$

$$2) \quad 10x + 25\pi = \pi - 2x \Rightarrow 12x = -24\pi, \quad x = \underline{-2\pi}$$

Ответ:  $-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi, 3\pi$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |   |                          |   |                          |   |                                     |   |                          |   |                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input checked="" type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

w<sup>4</sup>

$$\textcircled{1} \quad ax - 3y + 4b = 0$$

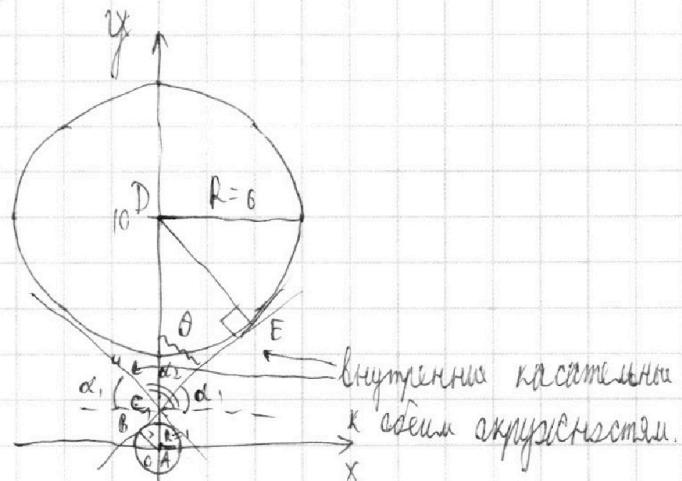
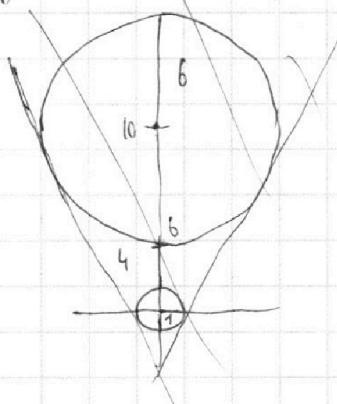
$$\textcircled{2} \quad (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2xy + 64) = 0$$

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow$  окружность с центром  $(0, 0)$ ,  $R=1$

$x^2 + y^2 - 2xy + 64 = x^2 + (y-10)^2 - 36 = 0 \Rightarrow$  окр. с центром  $(0, 10)$ ,  $R=6$ .

$$ax - 3y + 4b = 0 \text{ - прямая } y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

Четыре решения будет если прямая  $\textcircled{1}$  будет секущей для обеих окружностей, то есть:



$$\frac{a}{3} > \tan \alpha_1, \quad \frac{a}{3} < \tan \alpha_2, \quad \tan \alpha_2 = -\tan \alpha_1$$

Пусть  $A, D$ - центры окружностей,  $B, E$ - их точки касания,  $C$ - точка пересечения  $AD$  и  $BE$ , т.к.  $\angle BCA = \angle DCE$  (внешний),  $\angle DEC = \angle ABC = 90^\circ$  (радиус, перпендикуляр к точке касания), то  $\triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{1}{6} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow DC = 6C$ ,  $AC + DC = 10 \Rightarrow AC = 10$  (т.к. расстояние между центрами = 10)  $\Rightarrow AC = \frac{10}{7}, DC = \frac{60}{7}$

$$CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = 6\sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{6}{7}\sqrt{51} \Rightarrow BC = \frac{CE}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow BE = \sqrt{51}$$

$$DB = \sqrt{36 + 51} = \sqrt{87}$$

$$\sin \theta = \frac{DE}{DC} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{51}}{10} \\ \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{7}{10} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow a > \frac{3\sqrt{51}}{7}, \quad a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3 \quad \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0, y \neq 1 \\ xy = ? \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y 5^{-1} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{2x} 5} = \frac{4}{\log_y 5} - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_y 5} = -\frac{1}{3\log_y 5} - 3$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{\text{a}} \quad \left\{ \begin{array}{l} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$a^4 - b^4 - \frac{13}{3a} - \frac{13}{3b} = 0 \quad \text{если } a = -b, \text{ то } \textcircled{b} \Rightarrow xy = \frac{1}{2}.$$

Пусть  $a = \log_5 2x$ ,  $b = \log_5 y$ ,  
тогда  $xy = 5^{a+b}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

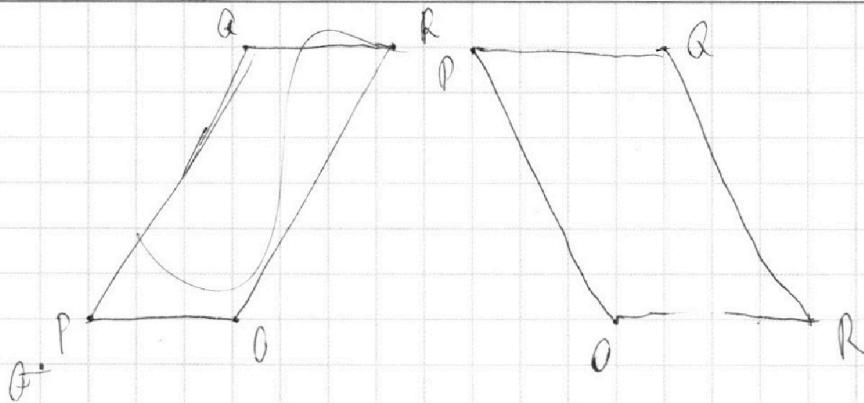
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - b^4 + -\frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$a^4 = -\frac{13}{3a}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b = x^2 + y^2 \\ \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \end{cases}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{13}{3}\right)^4} - \sqrt[5]{\left(\frac{13}{3}\right)^4} - \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0.$$

$$3a^5 = -13 \Rightarrow a = \sqrt[5]{-\frac{13}{3}}$$

$$b^4 = \sqrt[5]{-\frac{13}{3}}$$

$$2y + a + b =$$

$$a = \frac{\pi}{3} 2\beta - \delta \quad \frac{1}{5} = (y^3)^{\alpha} = y^{3\alpha}$$

$$\log_y a = \frac{1}{3} \log_y a = \log_y a^{\frac{1}{3}}$$

$$5^{-1} = y^{\alpha} \Rightarrow y = \sqrt[5]{5} \quad 3\alpha \log_5 y = -1$$

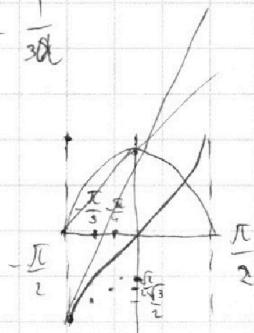
$$\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{6} \cdot 10 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\log_5 (2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5 \mid y = -\frac{1}{3\alpha}$$

$$0 \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

$$-3 \Rightarrow \log_5 (2x) - 4 \log_{2x} 5 = -3.$$

$$a^4 - b^4 + \frac{1}{a} = -3$$



$$a^4 - b^4 + \frac{1}{a} + 3 = 0,$$

$$\arcsin(x) \approx \cos(x) = \frac{\pi}{16} - \frac{x}{5}.$$

$$\log_5 (\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}} = -3$$

$$-2\pi$$

→ Решение

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

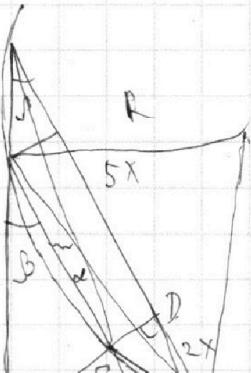
96

97

98

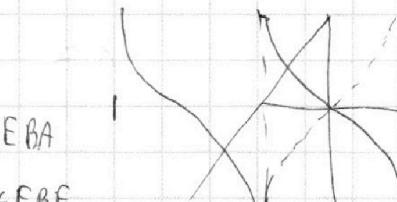
99

100

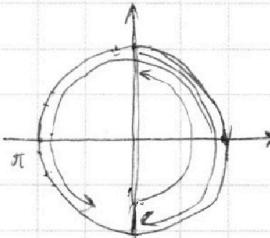


$$\angle FEB = \angle FBC = \angle EBA$$

$$\angle \frac{R}{2} - \beta - 2\alpha = \angle EBF$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$



$$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} \cdot 10 = \frac{5\pi}{3}$$

$$40 \cdot 5\pi + 10x = 5\pi - 2x$$

$$12x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{w5. } \begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \\ (\log_5^4(y) + 4 \log_5 5 = \log_y 8 \frac{1}{5}) - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{5} \\ 1 \\ m \end{matrix} \\
 & \cancel{\log_5^4 2x} - 3 \cancel{\log_5 5} \quad \begin{cases} \log \log_5^4 2x - 3 \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{\log_5 8x^3} - 3 \\ \log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = \log - \frac{1}{\log_5 y^3} - 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{16} \\ 1 \\ m \end{matrix} \\
 & \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} - \log_5^4 y - \frac{4}{\log_5 y} = \frac{4}{3 \log_5 2x} + \frac{1}{3 \log_5 y} \\
 & \log_5 2x = a, \quad \log_5 y = b \Rightarrow a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} - b^4 - \frac{4}{b} - \frac{1}{3b} = 0 \\
 & a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{13}{3b} = 0 \quad \begin{matrix} \frac{9}{3a} \\ \frac{12}{3b} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi \\ 1 \\ 5\pi \end{matrix} \\
 & a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad a \neq 0 \Rightarrow \cancel{a+3=0} \quad \begin{matrix} \cancel{a+3=0} \\ -13=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi \\ 1 \\ 5\pi \end{matrix} \\
 & a^4 - b^4 - \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0 \quad a = -b \quad \text{решение} \\
 & 2x = 5^a \quad \begin{matrix} \cancel{a=-b} \\ \cancel{a+3=0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi \\ 1 \\ 5\pi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{a+3=0} \\ -13=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi \\ 1 \\ 5\pi \end{matrix} \\
 & y = 5^b \quad \Rightarrow xy = \frac{5^{a+b}}{2} = \frac{1}{2} \quad 2x = -y \quad \begin{matrix} \cancel{a=-b} \\ \cancel{a+3=0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi \\ 1 \\ 5\pi \end{matrix} \\
 & a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad x = -\frac{4}{2} \quad a = \frac{\sqrt[4]{13}}{3} - \text{корень.} \\
 & \begin{array}{l} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 \mid a^4 - \frac{13}{3a} + 3 \\ a^4 - a^3 - \frac{13}{3a} + 3 \\ \hline a^3 - a^2 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3a(a^4 + 3) = 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a = \sqrt[4]{13} \\ a = \frac{\sqrt[4]{13}}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} a^4 = \frac{13}{3^4} = \sqrt[4]{13^3} - 3 \\ a+3 = \sqrt[4]{13^3} \end{array} \\
 & \begin{array}{l} a^4 - a^3 - \frac{13}{3a} + 3 \\ a^3 - a^2 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a = \sqrt[4]{13} \\ a = \frac{\sqrt[4]{13}}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} a^4 = \sqrt[4]{13} - 3 - \frac{13}{3\sqrt[4]{13}} + 3 \\ a^4 = \sqrt[4]{13} - 3 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} a^4 - a^3 - \frac{13}{3a} + 3 \\ a^3 - a^2 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a = \sqrt[4]{13} \\ a = \frac{\sqrt[4]{13}}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} a^4 = \sqrt[4]{13} - 3 - \frac{13}{3\sqrt[4]{13}} + 3 \\ a^4 = \sqrt[4]{13} - 3 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} a^4 - a^3 - \frac{13}{3a} + 3 \\ a^3 - a^2 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 - a^1 - \frac{13}{3} + 3 \\ a^1 - a^0 - \frac{13}{3} + 3 \\ \hline 0 - 0 - \frac{13}{3} + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a = \sqrt[4]{13} \\ a = \frac{\sqrt[4]{13}}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} a^4 = \sqrt[4]{13} - 3 - \frac{13}{3\sqrt[4]{13}} + 3 \\ a^4 = \sqrt[4]{13} - 3 \end{array}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

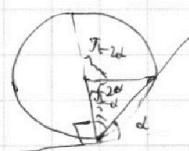
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

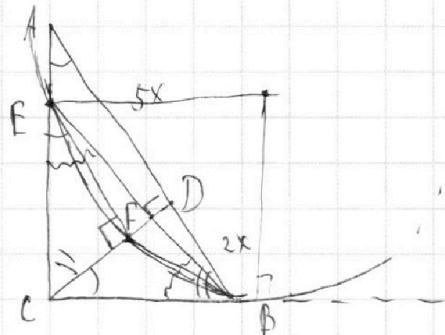
$$\text{w1 } ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, \quad bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{17}, \quad ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}, \quad k, m, n \in \mathbb{N}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}, \quad \text{если } kmn = 3^5 \text{ то } abc = \\ = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{29} \Rightarrow c = \frac{2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}}{mn}, \quad a = \frac{2^5 \cdot 3^9 \cdot 5^{12}}{k}, \quad b = \frac{3^1 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}}{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow ab = \frac{2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}}{mn}, \quad bc = \frac{k}{2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17}}, \quad ac = \frac{2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5}{n}$$

$$abc = \sqrt{kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$



w2.



$$AB \parallel EF$$

$$CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

$$\frac{CD}{5x} = \frac{2x}{CD}$$

$$\angle FEB = \angle FBC$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{EF}{AD}$$

$$CD = \sqrt{10}x, \quad [ABC] = \frac{9\sqrt{10}}{2}x^2$$

$$BC = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x, \quad AC = \sqrt{35x^2} = \sqrt{35}x$$

$\triangle ECB$

$$\arcsin \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 10x$$

$$10 \arcsin \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$8x = 4\pi$$

$$x = +\frac{\pi}{2}$$

$$\text{w3. } \begin{cases} ax - 3y + b = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{b}{3}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2xy + 64) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 2xy + 100 - 36} = 0 \Rightarrow x^2 + (y-16)^2 = 36$$

I-