



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*измен
показатели*

~~Последний~~ Гусь a_2 - макс. степень двойки, на кот. делится a .

Аналогично определяем $a_3, a_5, b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$.

По основной теореме арифметики:

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &\geq 8 & b_2 + c_2 &\geq 12 & a_2 + c_2 &\geq 14 \\ a_2 + b_3 &\geq 14 & b_3 + c_3 &\geq 20 & a_3 + c_3 &\geq 21 \\ a_5 + b_5 &\geq 12 & b_5 + c_5 &\geq 17 & a_5 + c_5 &\geq 39 \end{aligned}$$

Отсюда ~~а~~ $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{14+20+21}{2} = 27,5, \text{ откуда } a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq \cancel{a_5 + c_5} = 39$$

По основной теореме арифметики, тогда $abc : 2^{17} 3^{28} 5^{39}$,

то есть $abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Пример:

$$a = 2^5 3^8 5^{12}$$

$$b = 2^3 3^6$$

$$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$$

$$abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} : 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{27} : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} 3^{22} 5^{39} : 2^{14} 3^{21} 2^{39}$$

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

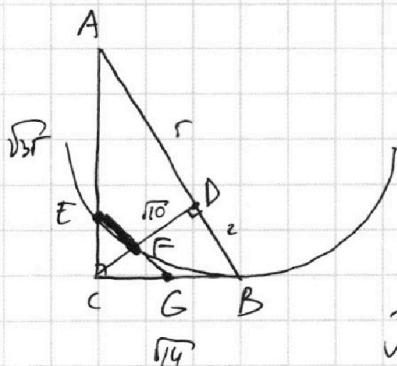
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Установлено~~

Обозначим $\frac{AB}{7}$ за 1.

Тогда по усл. $AD=5$, $BD=2$.

$$CD = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$$

По т. Тибериада $AC = \sqrt{35}$, $BC = \sqrt{14}$.

~~П~~ $\triangle G$ -т. пр. $\angle EFC$ с $\angle B$. $\triangle ACD$ и $\triangle EFC$ подобны, т.к. $AB \parallel EF$. $DGFB$ шах. вр. $\cos\alpha$.

тогда α , т.к. они обе лежат на ус. $\cos\alpha$. $\angle ECF = \angle ACD$ (они противолеж.). $\triangle G$ подобен $\triangle ACD$. Тогда

$BG = \cancel{BC}(1-\alpha) = \sqrt{14}(1-\alpha)$, $GF = BD \cdot \alpha = 2\alpha$, $EG =$
 $= AB \cdot \alpha = 7\alpha$. Известно $GF \cdot GE = GB^2$, т.к. GB -кат.. \triangle это есть

$7\alpha(1-\alpha)^2 = 2\alpha$ $(\sqrt{14}(1-\alpha))^2 = 2\alpha \cdot 7\alpha \Rightarrow (1-\alpha)^2 = \alpha^2$, откуда
 $\alpha = 1 - \alpha$ и $\alpha = \frac{1}{2}$.

Известно как треугр. ACD и ~~EGF~~ подобны

с углами $\angle ACD = \angle EGF$ и $\angle ACD \cong \angle EGF$, то

равны $\frac{5}{7}$ ил. $\triangle ABC$ (т.к. $AD:AB = 5:7$). Значит, ил. $\triangle CEF$
равна $\frac{5}{28}$ ил. $\triangle ABC$.

Ответ: 28:5.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$2\pi - 5 \arccos(\cos x) = -x$$

$$x = 5 \arccos(\cos x) - 2\pi$$

В то же время из усн. равенства получаем

~~Остается~~ В первом случае

$$x = 10\pi k + 5x - 2\pi$$

$$-4x = 2\pi(5k-1)$$

~~2x2=2x2~~

$$x = -\frac{\pi(5k-1)}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x = 1 & (2) \\ \cos x = -1 & (3) \end{cases}^2$$

Во втором случае

$$x = 10\pi k - 5x - 2\pi$$

$$x = \frac{\pi(5k-1)}{3}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & (4) \\ \cos x = -\frac{1}{2} & (5) \\ \cos x = 1 & \text{— уже получили} \end{cases}$$

$$1) x = 5 \arccos 0 - 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x = 5 \arccos 1 - 2\pi$$

$$x = -2\pi$$

$$3) x = 5 \arccos(-1) - 2\pi$$

$$x = 3\pi$$

$$4) x = 5 \arccos \frac{1}{2} - 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$5) x = 5 \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi$$

$$x = \frac{4\pi}{3}$$

Проверка.

$$10 \arcsin \left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = 10 \arcsin 0 = 0 = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$10 \arcsin \left(\cos(-2\pi)\right) = 10 \arcsin 1 = 5\pi = \pi - 2 \cdot (-2\pi)$$

$$10 \arcsin \left(\cos(3\pi)\right) = 10 \arcsin(-1) = -5\pi = \pi - 2 \cdot 3\pi$$

$$10 \arcsin \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 10 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3} = \pi - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$10 \arcsin \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 10 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{3} = \pi - 2 \cdot \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}, -2\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

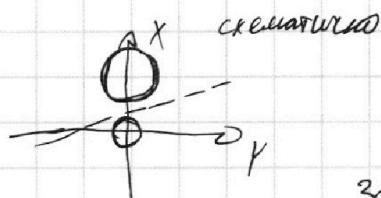
$$\begin{cases} 9x - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Посмотрим, каким кривым на коорд. пл. соотв. наше ур-е..
Первое ур-е, окв., соотв. прямой $y = \frac{9}{3}x + \frac{4b}{3}$.

Второе ур-е соотв. объединению двух окружностей.

$x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + (y - 10)^2 = 36$. Первый окр. имеет центр $(0, 0)$

и радиус 1, второй - центр ~~(0, 10)~~ $(0, 10)$ и радиус 6.

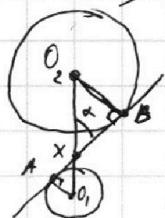


Требуется найти зон. а, при кат. сущ. зон. б, при кат. памят прямые будут пересекаться или касаться. Так как ул.-коэф. прямой равен $\frac{9}{3}$,

а, "вторая" прямая равна $\frac{4b}{3}$ и что, таким образом, можно сделать её свободно нужно искл. зон. а, при кат. из всего существоующих паралл. прямой $y = \frac{9}{3}x$, мы будем искл. касание окр. б с окр. а

Однако, это зон. а, лежащие между угломинимумы ул.

коэффициентами обеих вспр. касательных к окружности для $(7, e \approx \frac{9}{3})$ ~~зона~~ лежит не между ул.-коэф. обеих вспр. кас.



с обозн. приведите
здесь

т.е. $O_2B \perp O_1A$ (погодка по условию), $O_2B = 6$, $O_1A = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1X : XO_2 = 1 : 6$, $O_1O_2 = 10 \Rightarrow O_1X = \frac{10}{7}$, $AO_1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{AO_1}{O_1X} = 0,7$. Доб. ул.-коэф. равен $\cos(90^\circ - \alpha) =$
 $= \sin \alpha = 0,7$. Тогда ул.-коэф. второй вспр. кас. равен $-0,7$. Значит,
угл. касн. $\Leftrightarrow \alpha \in [0; \pi] \setminus E[2, 1; 2, 1]$.

Ответ: $a > 2,1$ и $a < -2,1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

Замена: $a = \log_5 2x$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$$

Замена: $b = \log_5 y$

$$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

В каждом ур-и (на a и на b) левая часть возрастает (т.к.

лев. уравн. возр. функция $3a^5$, где и коэффициент, и показатель, а также число 3 в основании ур-я), то есть $a = -2$, $b = -2$ отр., при $a = -4$, $b = -2$.

Найдено одно решение у каждого ур-я, то есть одно решение ур-я.

если a — реш. первого ур-я, то $b = -a$ — реш. второго, т.к. $3(-a)^5 + 9(-a) + 13 = - (3b^5 + 9b - 13) = 0$. Значит, $b = -a$, то есть одно решение.

• $\log_5 y = -\log_5 2x$, откуда $y = \frac{1}{2x}$. Значит, $xy = x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

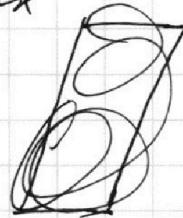
$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$a = \log_5 2x$$



$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y 3 \frac{1}{5} - 3$$

$$\begin{aligned} a^4 + \frac{4}{3a} &= \frac{1}{3a} - 3 \\ a^4 + \frac{4}{3a} - \frac{1}{3a} + 3 &= 0 \\ a^4 + \frac{4}{3a} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$b^4 + \frac{4}{3b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$\begin{aligned} b^4 + \frac{4}{3b} &= -\frac{1}{3b} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{3b} - \frac{1}{3b} - 3 &= 0 \\ b^4 + \frac{4}{3b} - 1 &= 0 \\ b^4 + \frac{4}{3b} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$b = \log_5 y$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ -5x \leq y \leq 20 - 5x \end{cases} \quad 5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$-16 \times 25$$

$$-80 \times 25$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{от } -16 \text{ до } 16$$

$$\text{от } -720 \text{ до } 25$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

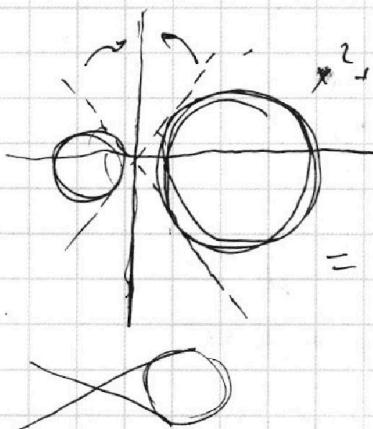
$$y = \frac{ax+4b}{3}$$

$$y^2 = \frac{a^2x^2 + 8abx + 16b^2}{9}$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{(a^2x^2 + 8abx + 16b^2)}{81} = 1$$

$$(a^2 + 9)x^2 + 8abx + 16b^2 - 81 = 0$$



$$\frac{a^2x^2 + 8abx + 16b^2}{9} - \frac{20ax + 80b}{3} + 64 =$$

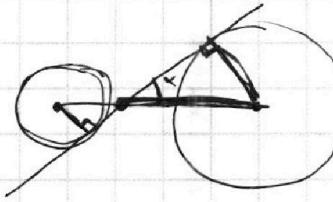
$$(a^2 + 9)x^2 + 4(a^2b - 15)x + (16b^2 - 240)b + 576 = 0$$

$$= a^2b^2 - (a^2 + 9)b^2$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36 \quad \text{center } 0, 10$$

$$y = 10 \quad x = \pm 6$$

$$y = \frac{ax+4b}{3}$$



$$\log_5(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 3a = a - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 4a + 3 = 0$$

$$4a^5 - 3a^4 - 1 = 0$$

$$a = 1$$

$$3 + 13b^5 + b^4 = 0$$

$$13b^5 + 2b^4$$

$$\frac{1}{b^4} + 4b = -b - 3$$

$$13b^5 + 3b^4 - 3 = 0$$

$$b^4 + 4b = -b - 3$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{b} - 3$$

$$\log_r y + 4\log_y 5 = \log_y 0,2 - 3$$

$$\frac{1}{b^4} + 4b = -b - 3$$

$$b^4 + 5b - 3 = 0$$

$$b^4 + 3b + 0 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + 4b = -\frac{b}{3} - 3$$

$$3b^5 + 9b + 3 = 0$$

$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b$$