



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = n \cdot 2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{13} \quad n, k, l \in \mathbb{N}$$

$$ac = l \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{42}$$

$$(abc)^2 = nkl \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} - \text{искомое квадрат}$$

\Rightarrow число abc должно делить $nkl = 15$

$$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}$$

$$abc_{\text{на}} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

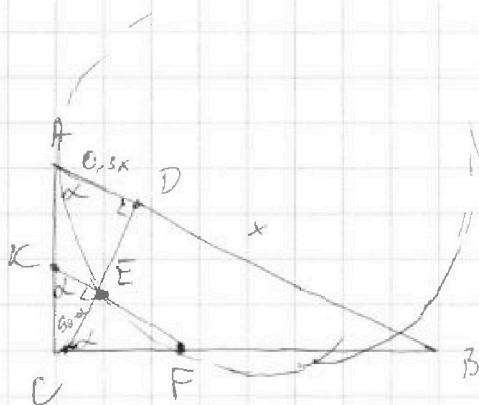
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BAK = \alpha = \angle PKC$$

ta (чт чар)

$$\angle ECF = \alpha \cdot (90 - 90 - \alpha)$$

$\triangle KEC \sim \triangle CEF$.

$$\frac{KE}{CE} = \frac{CE}{EF}$$

предл. отр. ско. равен. $CE^2 = KE \cdot EF$

$$AK^2 = KE \cdot KE \cdot x = KE^2 + KE \cdot EF = KE^2 + CE^2 = KC^2$$

$AK = KC \Rightarrow KF$ - сред. линия $\Rightarrow CF = FB$.

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{BCD} = 0,25 S_{BCD}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot 0,3x \quad S_{BCE} S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot x$$

$$S_{ACD} = 0,3 S_{BCD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{0,3 S_{BCD}}{0,25 S_{BCD}} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \sin x \cos\left(\sin x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \sin x \cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq \pi$$

$$\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Начало

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \quad (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$$

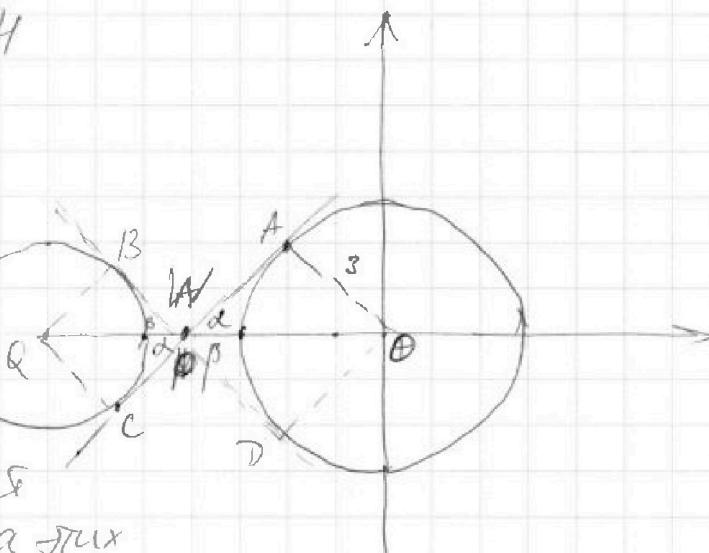
$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

или

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(1) \quad y \text{ из } (1) \Rightarrow y = 7b - x$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$



Все решения есть
система лежит на этих
окружностях

и на прямой $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

Система же будет иметь 4 решения
только тогда, когда а такое, чтобы при
каком-то б прямая касалась обеих окружностей
или между её и кругом было больше, чем
у этих касательных.

$$WD = x \quad \text{и} \quad W = 7 - x.$$

$$\tan \beta = \sin \alpha = \frac{3}{x} = \frac{2}{7-x}$$

$$21 - 3x = 2x$$

$$x = \frac{21}{5} = 4,2$$

$$\tan \beta = \frac{3}{x} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\beta = \alpha \quad AW = \sqrt{\frac{49}{25} - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{6}$$

- угловой квадрат единиц кас

- $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ - другой кас.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

$$\text{Значит } -\frac{5\sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{a} > -\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{1}{a} > -\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

$$a > 0 \text{ или } a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$a \frac{1}{a} < \frac{5\sqrt{6}}{4}$$

$$a < 0 \text{ или } a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$$



$$a \in (-\infty, -\frac{4}{5\sqrt{6}}) \cup (\frac{4}{5\sqrt{6}}, +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$6x = t$$

$$\log_7^4 t - 2\log_7 7 = \frac{3}{2} \log_7 7 - 4$$

$$\log_7^4 t - \frac{7}{2} \log_7 7 = -4$$

$$\log_7^4 t + \frac{7}{2} \log_7 7 = -4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_7 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 = -4$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 = -4$$

$$f(x) = \log_7 x + \frac{7}{2} \log_x 7$$

~~f(x)~~

$$f(x) = f(\ln x) \quad \frac{7}{2} \log_x 7 - \text{удобная форма}$$

$\frac{7}{2} \log_x 7$ - корп. функция.

$\log_7^4 x$ - корп. функция.

значит $f(x)$ - монотонно вур.

значит какое свое значение она должна

иметь 1 раз, значит $\frac{1}{y} = + = 6x$

$$xy = \frac{6x \cdot y}{6} = \frac{\frac{1}{y} \cdot y}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Отсюда: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Начало

$$x_2 - x_1 = 10 - \frac{y_2 - y_1}{4}$$

$x_2 - x_1$ — целое,

значит $\frac{y_2 - y_1}{4}$ — целое

x_n — фиксированное

значит $y_2 - y_1 \cdot 4$

$x_2 - x_1$, возможное при любых y_2 и y_1 ,

\tan угла наклона ломаной равен $\frac{y_2 - y_1}{4}$,
значит при умножении $y_2 - y_1$ на 4, x_n уменьшится на 1.

если $y_2 - y_1 = 40$ то есть $x_n - (x_2 - x_1) + 1$ вариантов

бывает 2 точки где катет y_1 и y_2 и $68 - (y_2 - y_1) + 1$

вариантов будет 69 . Всего же вариантов $y_2 - y_1 = 40$

если же $y_2 - y_1 = 40$ то есть $s = (69 - 40) \cdot 10$

вариантов будет такие 2 точки. (но все же если $y_2 \geq y_1$, потом просто поменяют A и B местами, дальнейшие результаты не будут отличаться)

тогда $10 \geq \frac{dy}{4}$, т.е. $dy \leq 40$, $s = (69 - dy) \cdot 10$
а а когда $dy > 40$, $s = (69 - dy)(30 - \frac{dy}{2})$

тогда общее кол-во вариантов $y_2 \geq y_1$ будет

$$S_1 = 690 + 650 + 610 + 570 + 530 + 490 + 450 + 410 + 370 + 330 + 290 + \\ + 8 \cdot 25 + 6 \cdot 21 + 4 \cdot 17 + 2 \cdot 13 + 0 \cdot 9$$

S_1 — это исключение 0.0 не берётся, так как S не может быть 0.

Теперь просто поменяют местами A и B (координаты y) и
получим столько же случаев, только уже $y_1 \leq y_2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

то будет $2S_n = 11620$. Но теперь мы
посчитали 2 раза служа, когда $y_1 = y_2$. Вместе 1 раз
все варианты с $y_1 = y_2$

$$S_0 = 2S_n - 690 = 11620 - 690 = 10930$$

Ответ: 10930



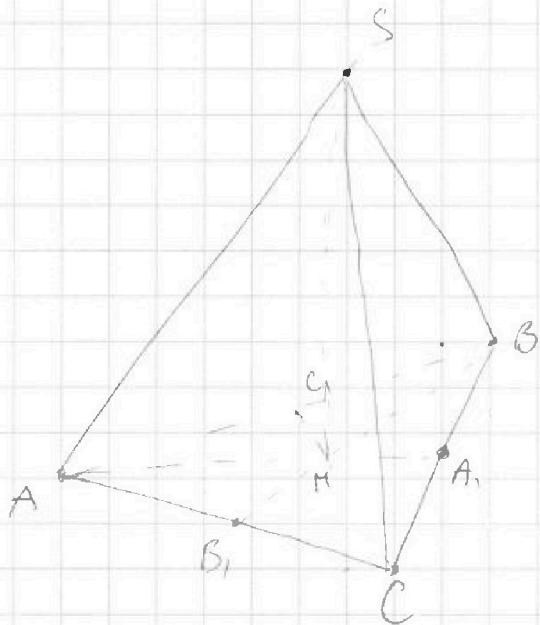
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AA₁ ∈ (A₁AS)

Не AA₁

Не (A₁AS)

(бок)

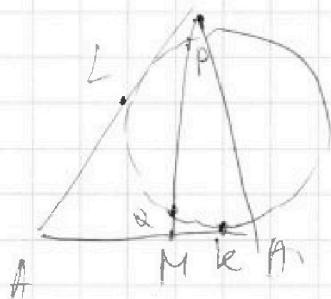
SME (A₁AS)

PGSM

PE(A₁AS)

Аналогично $\angle L \in (A_1HS)$

Значит мы можем
нарисовать искомый рис-к.



$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1}$$

из-за пропорции
 $\sqrt{2AC^2}$

$$AA_1 = \sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$$

8) рас-е от центра симметрии вершины S равно 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\ln^5 x$

$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln 7}\right)^4 + \frac{7}{2} \frac{\ln x}{\ln 7}$$
$$f'(x) = 4 \cdot \left(\frac{\ln x}{\ln 7}\right)^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 7} + \frac{7}{2} \cdot \ln 7 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= \frac{4}{\ln^4 7} \cdot \frac{\ln^3 x}{x} - \frac{7 \cdot \ln 7}{2} \cdot \frac{1}{x \ln^2 x}$$
$$\frac{4 \ln^3 x}{\ln^4 7} \cdot \frac{1}{x} > \frac{7 \cdot \ln 7}{2} \cdot \frac{1}{x \ln^2 x}$$
$$\ln^5 x > \frac{7}{8} \ln^5 7$$
$$\ln^5 x > \ln^5 7$$
$$x > 7^{\frac{5}{8}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

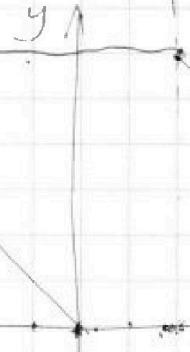
6) $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

$(69 - 44) : (30 - 22)$

$(10930 + 6502)$

$= 11580 + 30 + 902$

$= 11620$



60 $\cancel{42}$
 $17 \cdot 42$
 $- 60 + 28 = 68$

61 17

53 95
45 91
37 33
29

570 530 490 450 410 370 330 290

$690 + 650 + 610 + \dots + 290 + \cancel{19} \cdot 19 = 6288 =$
 $+ 8 \cdot 25 + 6 \cdot 21 + 4 \cdot 17 + 2 \cdot 13 + \cancel{9}$

$-4x < y < -4x + 76$

$y > -4x +$

$900 + 900 + 600 + 500 + 1100 + 690 +$

$+ 200 + 126 + 68 + 26 = 3600 + 1700 +$

$h = 68$ $\cancel{40} \quad \cancel{20} \quad \cancel{94} \quad \cancel{40} =$

$l_{\max} = 36 \quad \cancel{15} \quad \cancel{18} = 4020 + 1700 =$

$y_1 = y_2 \quad x_2 - x_1 = 10$

$690 + 650 + 610 + \cancel{19} = 5810$

680 тоже

решить точки

уравнение: $x_2 - x_1$ - уравнение

нестандартное

$= 11620$

$y_1 - y_2 =$

$x_2 - x_1 = 10 - y_2 - y_1$

$y_2 - y_1 = 4$

$y_2 - y_1 = 8$

~~должно быть~~

$y_2 - y_1 = 4$

$y_2 - y_1 = 68$

$10 - 68$

$x_2 - x_1 = 9$

$x_2 - x_1 = -7$

$x_m = 19 - \frac{y_2 - y_1}{4}$

$y_2 - y_1 = 40$

$y_2 - y_1 = 8$

$x_m = 9$

$y_2 - y_1 = 4$

$y_2 - y_1 = 8$

$x_2 - x_1 = -1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7 t - \frac{7}{2} \log_7 t = -4$$

$$\log_7 y + \frac{7}{2} \log_7 y = -4$$

$$\frac{\lg t}{\lg 7} - \frac{7}{2} \frac{\lg 7}{\lg t} = -4$$

$$\lg^5 t - \frac{7}{2} \lg^3 7 = -4 \lg t + \lg 7$$

$$\lg^5 y + \frac{7}{2} \lg^2 7 = -4 \lg y \lg 7$$

$$\lg^5 t + \lg^5 y = -18 \lg t - 4 \lg 7 (\lg t + \lg y)$$

$$\lg^5 t + \lg^5 y = -4 \lg 7 \cdot \lg t y$$

$$\log_7 t - \frac{7}{2} \frac{\log_7^2 t}{\log_7 t} = -4$$

$$\log_7 t - \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7 t} = -4$$

$$\log_7 t + 4l - \frac{7}{2} = 0$$

$$2l^5 + 8l - 7 = 0$$

2
x
y
z

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

$$1+2+3+4+5+6+7 = 28$$

$$4+4+5=13+5=18+5=23$$

у
т

$$\log_7 \frac{t}{7} + \frac{7}{2} \log_7^2 t = -4$$

$$\log_7 y + \frac{7}{2} \log_7^2 y = -4$$

$$\frac{t}{7} = y$$

$$y^t = 1$$

$$y^t = 6x \quad y = \frac{1}{6x}$$

$$y^t = 6x$$

$$6y^t = 6y^t = 1$$

$$y^t = \frac{1}{6}$$

$$y^t = \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$(68 - (y_2 - y_1)) + 2$$

$$(x_1 - (x_2 - x_1) + 1) =$$

$$-(68 - (y_2 - y_1)) + 2$$

$$(x_1 - (x_2 - x_1)) =$$

$$2(10 - \frac{(y_2 - y_1)}{4}) =$$

$$(7+8)($$

$$x_1 = 19 - \frac{y_2 - y_1}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

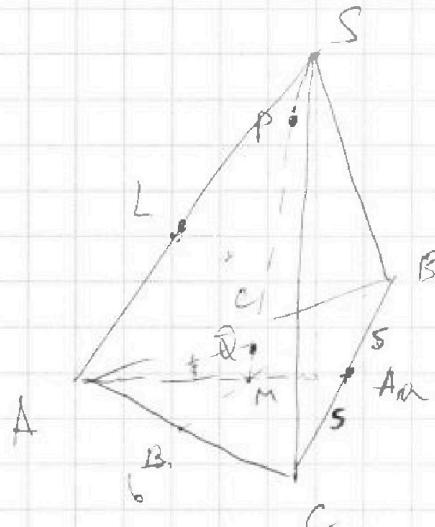
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4AA_1^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$4BB_1^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2$$

$$4CC_1^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$$

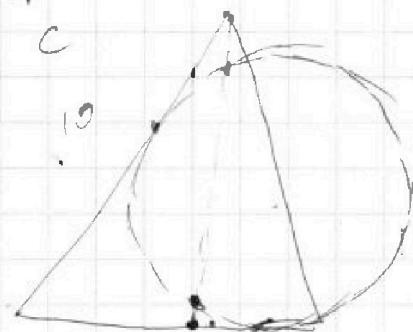
$$\frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

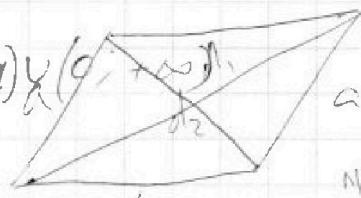
$$\frac{1}{a} > -\frac{4\sqrt{6}}{5}$$



$$a = -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$\frac{4}{5\sqrt{6}} > a > -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$



$$a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$a > 0 :$$

$$-\frac{4}{5\sqrt{6}} < a < 0$$

также $a > 0$.

$$-\frac{1}{a} > -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

$$-a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{a} < \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \log(x+1) + \frac{1}{2} \log^2 x - \\ &- \log^2 \frac{x+1}{x} + \frac{1}{2} \log x^2 - \\ &= \log \left(\frac{x+1}{x} \right) - \log^2 \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{KF}{CF} = \frac{CF}{EF}$$

$$KF \cdot EF = CF^2 \quad AK^2 = KE \cdot KC$$

$$CE^2 = KE \cdot EF$$

$$\frac{CF}{CE} = \sqrt{\frac{KF}{KE}}$$

$$\frac{EF}{KE}$$

$$\frac{FB}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

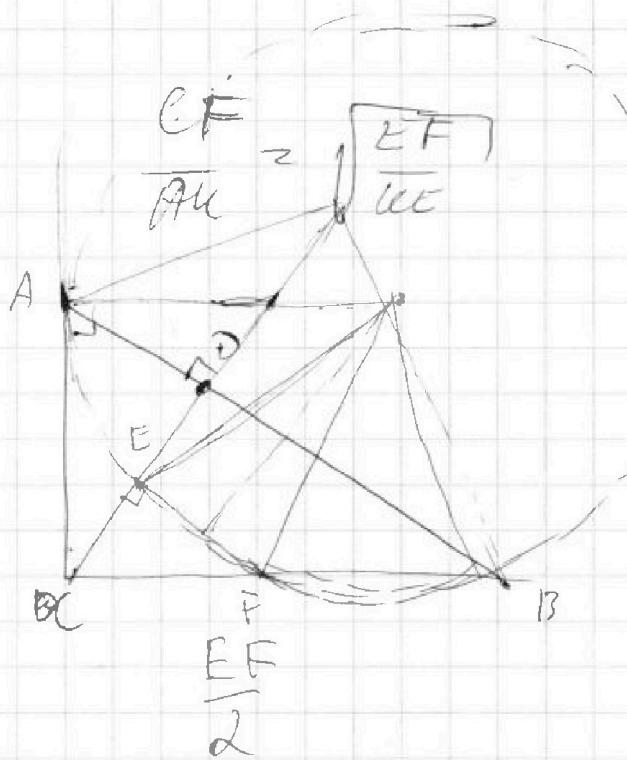
$$0,3 \times \sqrt{0,3} = 0,3 \times \sqrt{0,3}$$

$$AK = \sqrt{0,3} \cdot FB$$

$$\frac{0,3 \times \sqrt{0,3}}{CE} = \frac{\sqrt{0,3}}{CF}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = 0,3 \quad S_{BCD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{0,3}{0,25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$



$$AK^2 = KE \cdot RF = KE^2 + KE \cdot EF$$

$$AK^2 = KE^2 + CE^2 = KC$$

$$AK = KC$$

$$\Rightarrow EF = BF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{BCD} < 0,25 S_{BCD}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) ab = n \cdot 2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = k \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = g \cdot l \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{63}$$

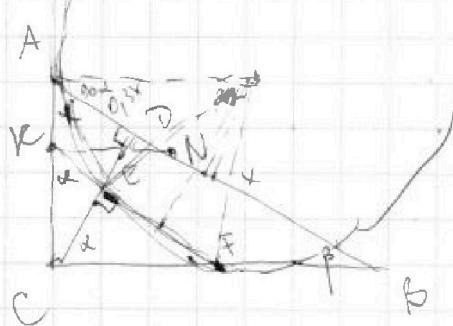
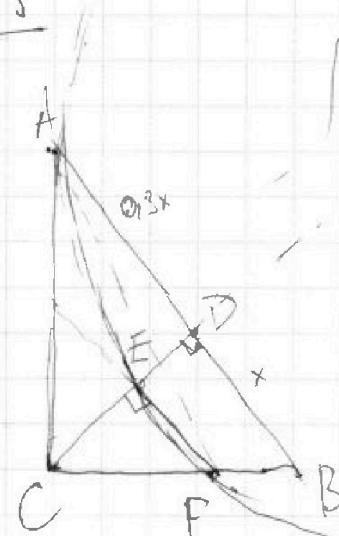
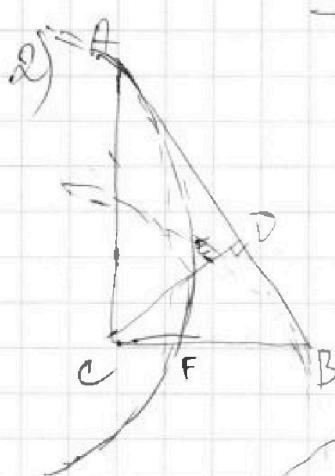
$$(abc)^2 = nkl \cdot 2^{34} \cdot 3^{48} \cdot 5^{75} = \cancel{abc}$$

аб - $nkl 2^{34} 3^{48} 5^{75}$ - целое число
abc - целое число

$$(abc)^2 = 2^{38} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$l=5 \quad k=3 \quad n=1$$



$$AK^2 = KE \cdot KF$$

$$\frac{AK+KC}{KC} = \frac{0,3x}{KE}$$

$$\frac{AK}{KC} + 1 = \frac{0,3x}{KE}$$

$$\frac{AK+KC}{KC} = \frac{1,3x}{KF}$$

$$\frac{0,3x}{KE} = \frac{1,3x}{KF}$$

$$\frac{0,3x}{CD} = \frac{0,3x}{CF}$$

$$CD = \sqrt{0,3x^2 + 0,3x^2} = \sqrt{0,6x^2} = x\sqrt{0,6}$$

$$BC = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot 0,3^2} = x\sqrt{1,09}$$

$$AC = \sqrt{0,09x^2 + 0,3x^2} = x\sqrt{0,39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos \in [0, \pi]$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{6}$$

4)

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & y^2 - \frac{x-7b}{3a} = \frac{y^2}{3a} - \frac{x}{3a} \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

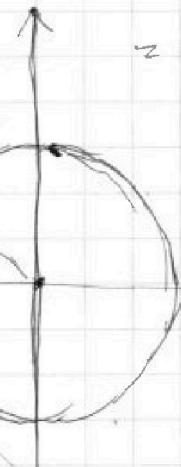
$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{7-x}$$

$$21 - 3x = 2x$$

$$5x = 21$$



$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{\frac{21^2}{2} - 3^2} \\ &= \sqrt{\frac{441 - 9 \cdot 81}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{651 - 81}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{570}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{570}}{5} \\ &= \frac{6\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} &= \frac{3}{6\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{20} \\ &= \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{5\sqrt{10}}{4} \\ \text{OB} &= \sqrt{\frac{106}{25} - \frac{100}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} &= \frac{2\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{KE}{KE} = \frac{13}{0.3} = \frac{13}{\frac{3}{8}} = KE \cdot EF$$

$$\frac{EF}{KE} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{CE}{EF} = \frac{KE}{CE}$$

$$CE^2 = KE \cdot EF$$

CEAK

$$343 = 7^3$$

$$\frac{CE}{CE+ED} = \frac{KC}{KC+AK}$$

$$AK = 280 + 64 + 343$$

$$x + \frac{ED}{CE} = x + \frac{AK}{KC}$$

$$\frac{ED}{AK} = \frac{AK}{KC} \quad AK^2 = ED \cdot KE = KE \cdot EF$$

$$\frac{ED}{KE} = \frac{EF}{KE}$$

$$(\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{6x^2} 343) - 4$$

$$(\log_7^4 y + 6 \log_7^4 y = \log_{y^2} (7^5)) - 4$$

$$6x = +$$

$$\log_7^4 t^4 - 2 \log_7^4 t = \frac{3}{2} \log_7^4 t - 4 \quad \log_7^4 t - \frac{7}{2} \log_7^4 t = -4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7^4 y = \frac{5}{2} \log_7^4 y - 4 \quad \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7^4 y = -4$$

$$\log_7^4 t - \frac{7}{2} \log_7^4 t = \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7^4 y$$

$$\log_7^4 \frac{t}{y} = \frac{7}{2} \log_7^4 t + \frac{7}{2} \log_7^4 y = \frac{7}{2} \lg 7 \cdot \left(\frac{\lg y + \lg t}{\lg y \lg t} \right)^2$$

$$= \frac{7}{2} \lg 7 \cdot \frac{\lg y + \lg t}{\lg y \lg t}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!