



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1 : 3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - Найдите произведение длины медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем систему:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 \geq 1 \\ k_2 + k_3 \geq 13 \\ k_1 + k_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 \geq 11$$

$$x_2 + x_3 \geq 15 \quad (=)$$

$$x_1 + x_3 \geq 17$$

$$y_1 + y_2 \geq 14$$

$$y_2 + y_3 \geq 18$$

$$y_1 + y_3 \geq 43$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_2 + k_3 + k_1 + k_3 \geq 11 + 13 + 14 \\ x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3 \geq 11 + 15 + 17 \\ y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_1 + y_3 \geq 14 + 18 + 43 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} 2(k_1 + k_2 + k_3) \geq 34 \\ 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 43 \quad (=) \\ 2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 75 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 \geq 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 21,5 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 37,5 \end{cases}, \text{ но н. к}$$

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{N} \\ y_1 + y_2 + y_3 &\in \mathbb{N} \text{ и} \\ y_1 + y_3 &\geq 43, \text{ значит} \end{aligned}$$

значим:  $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 \geq 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 22 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 43 \end{cases}$

Пример:  $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi - 40\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccos}(\sin(-\frac{3\pi}{2})) = \operatorname{arccos} 1 = 0$$

~~$a \wedge b \wedge c = 2^{k_1+k_2+k_3} \cdot 3^{x_1+x_2+x_3} \cdot 5^{y_1+y_2+y_3}$~~

$$a \wedge b \wedge c = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Объем:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$$\frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Так, как нам нужно получить наименьшее произведение  $abc$ , значит мы можем представить числа  $a, b, c$  в виде, как  $a, b, c$  как:

$$a = 2^{k_1} \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{y_1}; k_1, x_1, y_1 \in \mathbb{N}$$

$$b = 2^{k_2} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{y_2}; k_2, x_2, y_2 \in \mathbb{N}$$

$c = 2^{k_3} \cdot 3^{x_3} \cdot 5^{y_3}; k_3, x_3, y_3 \in \mathbb{N}$ , тогда мы можем представить числа  $ab, bc, ac$  как:

$$ab = 2^{(k_1+k_2)} \cdot 3^{(x_1+x_2)} \cdot 5^{(y_1+y_2)}$$

$$bc = 2^{(k_2+k_3)} \cdot 3^{(x_2+x_3)} \cdot 5^{(y_2+y_3)}$$

$$ac = 2^{(k_1+k_3)} \cdot 3^{(x_1+x_3)} \cdot 5^{(y_1+y_3)}$$

Так, как  $ab: 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{10}$ , значит

$$\begin{cases} k_1 + k_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 11 \\ y_1 + y_2 \geq 10 \end{cases}$$

Так, как  $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ , значит:

$$\begin{cases} k_2 + k_3 \geq 13 \\ x_2 + x_3 \geq 15 \\ y_2 + y_3 \geq 18 \end{cases}$$

Так, как  $ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ , значит

$$\begin{cases} k_1 + k_3 \geq 14 \\ x_1 + x_3 \geq 17 \\ y_1 + y_3 \geq 43 \end{cases}$$



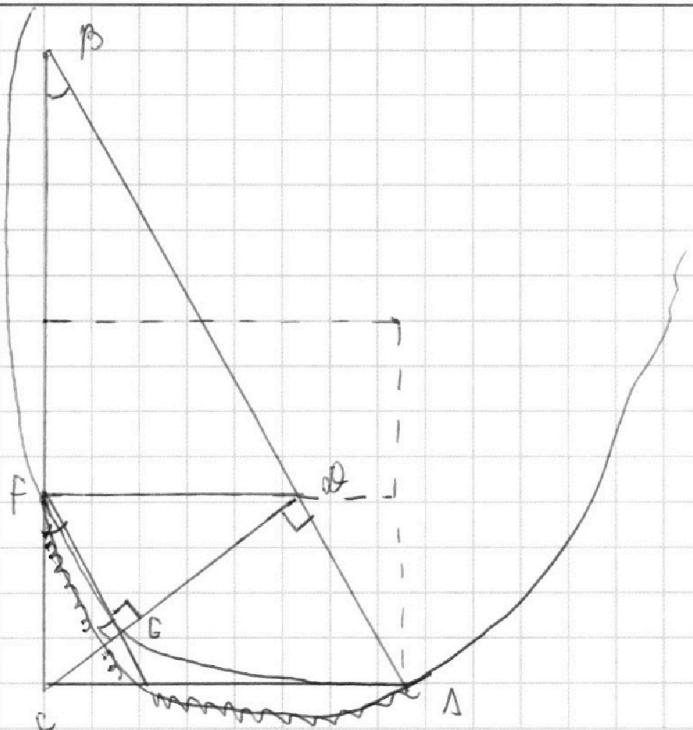
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Демонстрируем:

$$MC\vartheta = \sqrt{A\vartheta \cdot B\vartheta} = \frac{10}{13}x \cdot \frac{3}{13}x = \frac{\sqrt{30}}{13}x$$

Пусть  $FD \parallel AC$ , тогда

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \\ 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \quad (=) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \end{array} \right. \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \arccos(\sin x) = \pi - x \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \end{array} \right. \quad (=) \quad \left\{ \begin{array}{l} \arccos(\sin x) = \frac{\pi - x}{5} \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \end{array} \right. \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \sin \frac{\pi - x}{5} \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \end{array} \right. \quad (=) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi - x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi - x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \end{array} \right. \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \text{as } \frac{3\pi}{2} + -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right. \quad (=) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{2} \\ x = \pi \\ x = \frac{11\pi}{2} \end{array} \right.$$

Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\ell$  - отрезок <sup>длиной</sup> кас к окр, причем  $\ell \perp$

$$\text{тогда: } OH \cap \ell = H$$

$$OH \perp \ell$$

$$OH = 3$$

$$O_1H_1 \perp \ell$$

$$O_1H_1 \perp \ell$$

$$O_1H_1 = 2$$

$$\ell \cap OX = M$$

$$\triangle OHM \sim \triangle O_1H_1M \quad (\angle OHM = \angle M_1H_1O_1 = 90^\circ; \angle OMH = \angle HM_1O_1)$$

$$\text{значит: } \frac{OM}{MO_1} = \frac{OH}{O_1H_1}$$

$$\text{Нужно} \quad \begin{cases} \frac{OM}{MO_1} = \frac{3}{2} \\ OM + MO_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM = \frac{24}{5} \\ OM_1 = \frac{14}{5} \end{cases}$$

По теореме Пифагора в  $\triangle OHM$ :

$$HM^2 = OM^2 - OH^2 \quad BM^2 = HM^2 + OH^2$$

$$HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{49 - \frac{441}{25}} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \sqrt{\frac{216}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \angle OMH = \frac{OM}{MH} = \frac{3}{\frac{6\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$a_0 = \operatorname{tg}(90 - \angle OMH) = \operatorname{ctg}(\angle OMH) = \frac{12}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\begin{aligned} |a_1| &\geq |a_0| \\ \left[ a_1 \geq \frac{2\sqrt{6}}{5} \right] &\rightarrow \left[ -3a \geq \frac{2\sqrt{6}}{5} \right] \quad (=) \quad \left[ a \leq -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right] \\ \left[ a_1 \leq -\frac{2\sqrt{6}}{5} \right] &\rightarrow \left[ -3a \leq -\frac{2\sqrt{6}}{5} \right] \quad (=) \quad \left[ a \geq \frac{2\sqrt{6}}{15} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Объем: } (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$

$$\begin{cases} x + 3ay - 4b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{aligned} &(\Rightarrow) \begin{cases} x = -3ay + 4b \\ [(x^2 + 14x + 49) + x^2 + 14x + y^2 + 45] = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x = -3ay + 4b \\ (x^2 + 14x + 49) + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \\ &\text{или} \end{aligned}$$

$\cancel{x=}$  Пусть  $-3a = a_1$ ,  
 $+b = b_1$ , тогда:

$$\begin{cases} x = a_1y + b_1 \\ (x+4)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Произведение дано уравнение

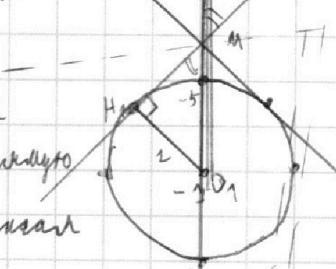
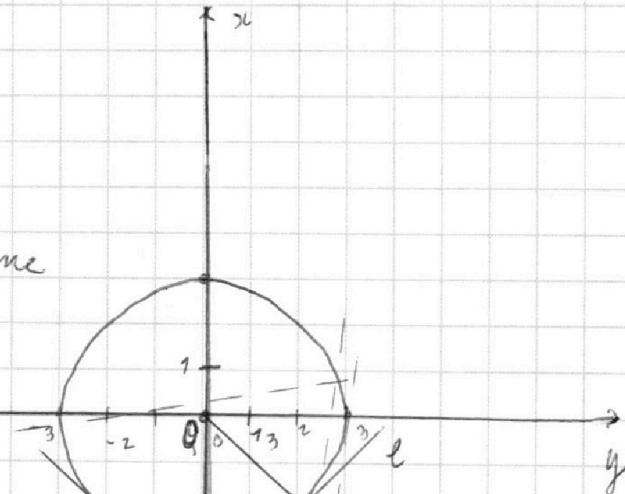
произвольной прямой и

уравнения окружностей

с центрами  $(0; 0)$ ,  $(0; -4)$  и  
радиусами 3 и 2 соответ-

ственно. Для малого коэффициента  
а мы можем без труда выделить прямую  
вдоль оси x, значит прямая  
будет иметь с окр. 4 одинаковый касательный

угол наклона  $a$ , который  
наименее возможен для касания к окр. 4, когда ее касательный





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ.

Ответ:  $\frac{1}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[5]{\log_4^4(6x)} - 2 \log_{6x} 4 = \log_{36x^2} 343 - 4 (=)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \log_4^4(6x) - \frac{2}{\log_4 6x} = \frac{3}{2} \cdot \overbrace{\log_4 6x}^1 - 4 \\ \begin{cases} 6x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Пусть  $\log_4 6x = t$ , тогда:

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2}t - 4 (=) \\ t \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t^5 - \frac{7}{2} + 4t = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4(y) + 6 \log_y 4 = \log_y (4^5) - 4 (=) \\ \begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \overbrace{\log_7 y}^1 - 4 \\ \begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Пусть  $\log_7 y = t$ ,  $t \neq 0$ , тогда:

$$\begin{cases} t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 4 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} t^4 + \frac{7}{2t} + 4 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ 2t^5 + 8t + 4 = 0 \\ \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ -2t^5 - 8t - 4 = 0 \\ \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ 2(-t)^5 + 8(-t) - 4 = 0 \\ \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} t = -t \\ t \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_4 6x = -\log_7 y \\ \begin{cases} 6x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} \log_4 6x = \log_7 \frac{1}{y} \\ \begin{cases} x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 6x = \frac{1}{y} \\ \begin{cases} x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} xy = \frac{1}{6} \\ \begin{cases} x \neq \frac{1}{6} \\ y \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$



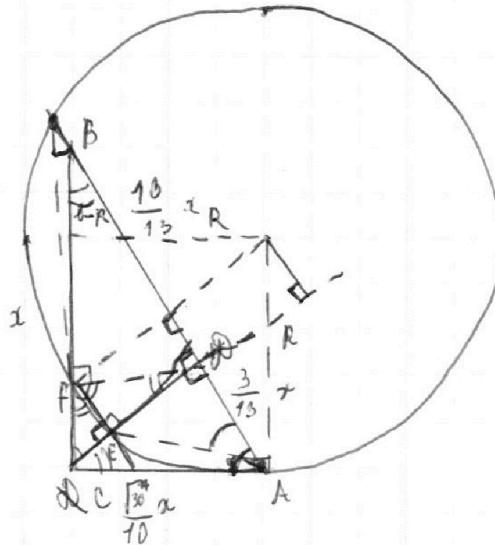
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



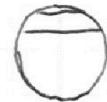
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.



$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

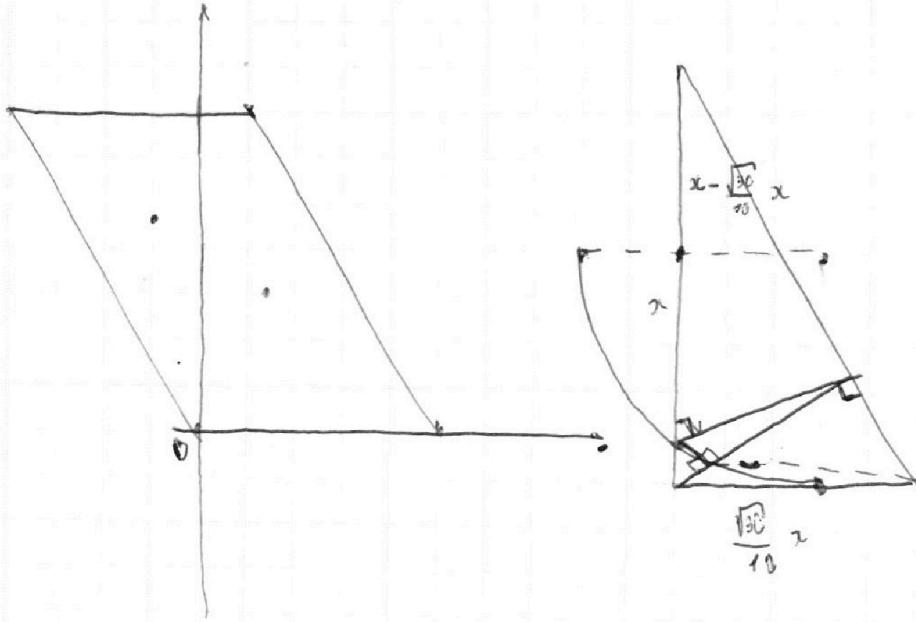
$$\text{及 } \angle C = \sqrt{BD \cdot DA} = \frac{\sqrt{30}}{13}$$



$$\cancel{A}^C \cancel{B}^D = \cancel{B}^C \cancel{A}^D$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$





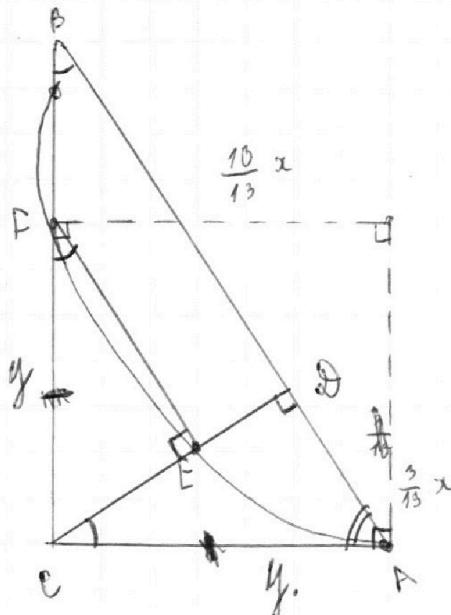
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



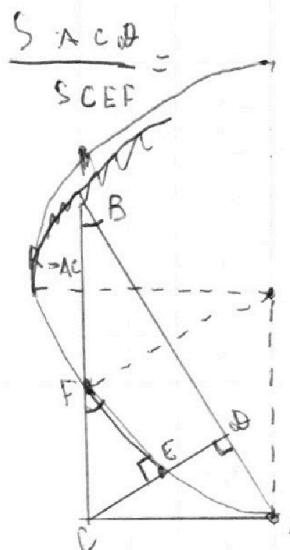
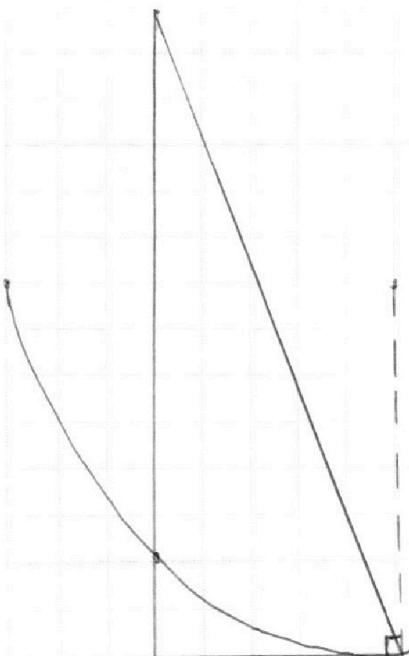
13  
10

$$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \frac{\sqrt{30}}{13}$$

$$\frac{y}{BA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{DA}{y}$$

$$y^2 = BA \cdot DA$$

$$y = \sqrt{BA \cdot DA}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_4^4(t) - 2 \log_4 t = \log_2 343 - 4$$

$$\log_4^4 t - \frac{2}{\log_4 t} = \frac{3}{2} \log_4 t - 4$$

$$\log_4 16 =$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 16 =$$

$$= \frac{4}{2} \log_2 2 = 2$$

$$m^4 - \frac{2}{m} = \frac{3}{2} m - 4$$

$$2m^5 - 3m^2 + 4m - 2 = 0$$

$$-84 - 1$$

$$2m^5 - 5m^3 + 4m + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 343 \\ \hline \end{array}$$

$$2m^2 - 8 = 0$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm 2$$

$$2^3 + 2^3 = (2+2)(4-4+4) =$$

$$= 16$$

$$\log_4^4 t - \frac{2}{\log_4 t} = \frac{3}{2} \log_4 t - 4 \quad (=) \quad \log_4^4 t - \frac{2}{\log_4 t} = \frac{3}{2} \log_4 t - 4 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad \log_4^4 t - \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\log_4 t} + 4 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2m^5 - 4m + 8m - 4 = 0$$

$$\log_4^4 y + 6 \log_4 y = \log_4 2 (y^5) - 4 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad \log_4^4 y + \frac{6}{\log_4 y} = \frac{5}{2} \log_4 \frac{1}{\log_4 y} - 4 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad 2^4 + \frac{6}{2} = \frac{5}{2} \cdot 1 - 4 \quad (=) \quad 2e^5 + 12 = 5 - 8e \quad (=) \quad 2e^5 + 8e + 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2m^5 + 8m - 4 = 0 \\ 2e^5 + 8e + 4 = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt[5]{2m} = \sqrt[5]{-2}$$

$$\frac{2m^5}{2e^5} = \frac{(m^5 + e^5)}{2e^5} + 4(m + e) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (m + e) (m^4 - m^3e + m^2e^2 - me^3 + e^4) = 0$$

$$\log_4 6x = -\log_4 y \Rightarrow 6x = \frac{1}{y}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45) (x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$49 - 98 + 45 = 0$$

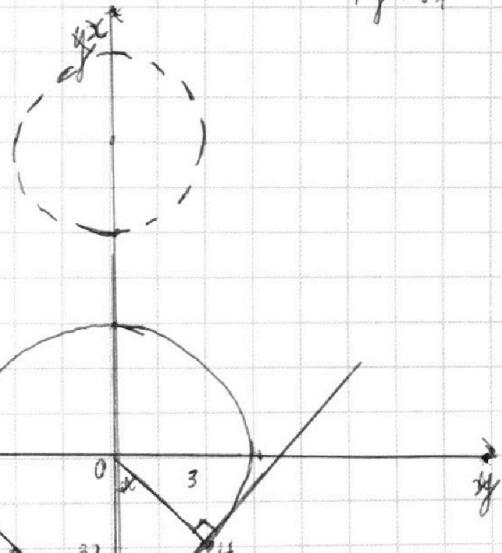
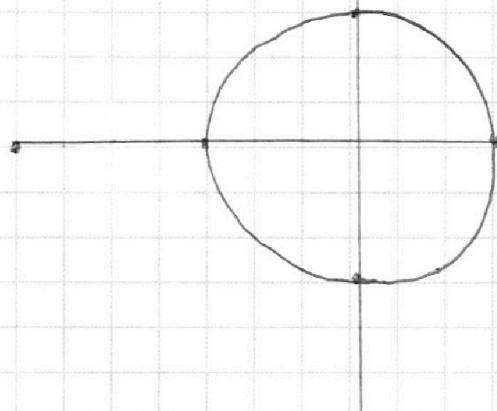
$$25 = 49 - 98 + 45 = 0$$

$$3x + 2y - 7 = 0$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{3}$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{3}$$

$$x = -a, y = b$$



$$\begin{array}{r} 441 \\ - 225 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$108 \quad | \quad 2$$

$$54 \quad | \quad 2$$

$$27 \quad | \quad 3$$

$$9 \quad | \quad 3$$

$$3 \quad | \quad 3$$

$$3x + 2x = 7$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$3x = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{\frac{441}{25} - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \sqrt{\frac{216}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5} \\ \text{tg} \alpha &= \frac{MH}{MH} = \frac{\sqrt{\frac{441}{25} - 9}}{\sqrt{\frac{441}{25}}} = \frac{\sqrt{\frac{216}{25}}}{\sqrt{\frac{441}{25}}} = \frac{6\sqrt{6}}{21} = \frac{5\sqrt{6}}{21} \end{aligned}$$

$$9 \cdot 25 = 45 \cdot 5 =$$

$$\frac{45}{225}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

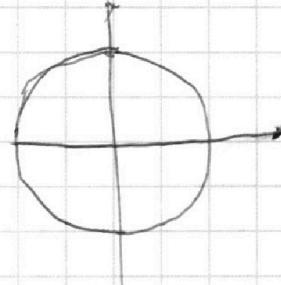
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \frac{\pi - \lambda}{5} + 2\pi n \\ -\lambda = \frac{4\pi + \lambda}{5} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda = \frac{\pi}{5} + 2\pi n \\ 4\lambda = -4\pi + 4\pi n + 10\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \\ \lambda = \pi + \frac{5\pi n}{2} \end{cases}$$

$$\frac{11\pi}{6}$$



$$5 \arccos(\sin \frac{11\pi}{6}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6}$$

$$5 \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6}$$

$$5 \arccos \frac{2\pi}{3}$$

$$5 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{9\pi + 11\pi}{8} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{2}$$

$$5 \arccos(\sin \pi) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$5 \arccos(\sin 0) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\pi =$$

$$5 \left( \arccos \left( \sin \frac{4\pi}{2} \right) \right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}$$

$$\sqrt[4]{4}$$

$$x + 3ay + 4f = 0$$

$$x = 3a - 3ay + 4f$$

$$5\pi = 5\pi$$

$$5 \left( \arccos(6\pi) \right) = \frac{3\pi}{2} + 6\pi$$

~~5 аркосо~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 abc

$$\begin{cases} ab : 2^4 3^{11} 5^{14} \Rightarrow abc : 2^4 3^{11} 5^{14} \\ bc : 2^{13} 3^{15} 5^{18} \Rightarrow abc : 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac : 2^{14} 3^{17} 5^{43} \Rightarrow abc : 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_2 \geq 4 \\ k_2 + k_3 \geq 13 \\ k_1 + k_3 \geq 14 \end{array} \right. \quad ( \Rightarrow ) 2(k_1 + k_2 + k_3) \geq 34 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geq 14$$

$$17 = 8 + 8 + 1$$

$$4 + 4 + 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 11 \\ x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 43 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 21,5, \text{ но } n, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N},$$

значит:  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 22$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 14 \\ y_2 + y_3 \geq 18 \\ y_1 + y_3 \geq 24 \end{cases} \quad \begin{matrix} 14 \\ 18 \\ 24 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 18 \\ \hline 32 \\ + 43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\sin \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$43 - 14 = 29$$

$$\arccos x = d \Rightarrow \sin d = x$$

№ 5

$$5 \arccos \left( \sin \frac{x}{5} \right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$$

$$5 \arccos 0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

\* двоест синх

$$5 \arccos(\sin x) =$$

$$= \frac{5\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$5 \arccos(\sin x) = \pi - x$$

$$5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$

$$\sin x = \sin x$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{\pi - x}{5}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi - x}{5}$$

$$x = \frac{\pi - x}{5} + 2\pi n$$

$$x = \frac{4\pi + x}{5} + 2\pi n$$