МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a,b,c \in \mathbb{N}$: $ab \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$, $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$. $\min abc$

Понятно что у нас $(abc)^2 \vdots 2^{8+12+14}\cdot 3^{14+20+21}\cdot 5^{12+17+39} = 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68} \Rightarrow abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$

Заметим, что $abc \vdots ac \Rightarrow$ $\Rightarrow abc \vdots 5^{39} \Rightarrow$ у нас $abc \vdots 2^{18}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geqslant 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$ (ибо $a,b,c \in \mathbb{N}$).

$$\left.\begin{aligned} a &= 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{12} \\ b &= 2^3\cdot 3^7\cdot 5^0 \\ c &= 2^9\cdot 3^{13}\cdot 5^{27} \end{aligned}\right] \Rightarrow ab = 2^8\cdot 3^{15}\cdot 5^{12} \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}.\ bc = 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{27} \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17} \text{ и } ac = 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39} \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$$

$\Rightarrow$ пример работает, в нём $abc = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$, т.е. равно нашей оценке.

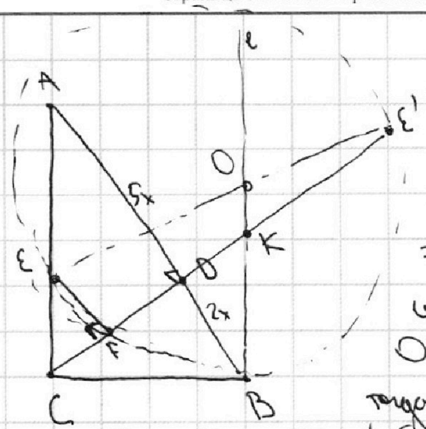
Ответ: $\min abc = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AD$, $CD \perp AD \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle EFD = 90^\circ$, а он вписан в окружность $(E, F, B) \Rightarrow$ если продлить FD до второго пересечения, то мы попадём в точку E', которая диаметрально противоположна E. Наша окр. кас. $BC \Rightarrow$ если O-центр окр., то $OB \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow OB \parallel AC$ ($\angle C = 90^\circ$). EE' - диаметр $\Rightarrow$ O - это пересечение EE' и l (прямая $\parallel AC$, проход. через B), причём O - сер. EE' $\Rightarrow$ пусть K - точка пересечения l и CE', тогда OK - ср. линия $\triangle EE'C \Rightarrow K$ - середина CE'. Пусть $AD = 5x \Rightarrow BD = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{10}x$ (ибо в прямоуг. $\triangle$ $CD^2 = AD \cdot BD$) $\Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} =$ $= \sqrt{35}x$ и $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{14}x$. $l \parallel AC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow \frac{CD}{KD} = \frac{5}{2} \Rightarrow KD = \frac{2CD}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}x$, также $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BK} \Rightarrow BK = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{35}x}{5}$. Ещё мы знаем, что $BC^2 = CF \cdot CE'$ как степень точки (отн. нашей окр.) $\Rightarrow 14x^2 = CF \cdot CE' = CF \cdot 2CK \Rightarrow 7x^2 = CF \cdot CK$. $CK = \sqrt{BC^2 + BK^2} = \sqrt{14x^2 + \frac{4 \cdot 35}{25}x^2} = x\sqrt{14 + \frac{4 \cdot 7}{5}} = x\sqrt{\frac{28+70}{5}} = \frac{\sqrt{98}x}{5} =$ $= \frac{7\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}$. Тогда $CF \cdot CK = 7x^2 \Rightarrow 7x^2 = \frac{7\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} \cdot CF \Rightarrow CF = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2}$, $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CAD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \frac{CD \cdot AD}{2} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2$. Тогда $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{CD \cdot AB \cdot CD^2}{CD \cdot AD \cdot CF^2} =$

$= \frac{AB \cdot CD^2}{AD \cdot CF^2} = \frac{7x \cdot 10x^2}{5x \cdot \frac{5}{2}x^2} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{28}{5} = 5{,}6$

Ответ: $S_{\triangle ABC} / S_{\triangle CEF} = \frac{28}{5} = 5{,}6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x \Rightarrow \arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10}$, понятно что $\arcsin(\cos x)$ определен при $\forall x$, при этом он принимает значения $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow (\pi-2x)/10 \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \pi-2x\in[-5\pi;5\pi] \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x\in[-6\pi;4\pi] \Rightarrow 2x\in[-4\pi;6\pi] \Rightarrow x\in[-2\pi;3\pi]$

$\arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10} \Rightarrow \sin(\arcsin(\cos x))=\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x=\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-$
$-\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)=0 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi/2-x-\frac{\pi-2x}{10}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi-2x}{10}\right)\right)=0$

$k,n\in\mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi-10x-\pi+2x}{10}\right)\right)=0$

$\frac{4\pi-8x}{20}=\pi k$

$\frac{\pi-2x}{5}=\pi k$

$\pi-2x=5\pi k$

$2x=\pi-5\pi k$

$x=\frac{\pi}{2}(1-5k)$

$k\le-2 \Rightarrow -5k\ge10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1-5k\ge11 \Rightarrow x\ge\frac{11\pi}{2}>3\pi$,
не подходит

$k\ge2 \Rightarrow -5k\le-10 \Rightarrow 1-5k\le-9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\le\frac{-9\pi}{2}<-2\pi$, не подходит

$k=1 \Rightarrow x=-2\pi$

$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$k=-1 \Rightarrow x=3\pi$

$\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi-10x+\pi-2x}{10}\right)\right)=0$

$\frac{6\pi-12x}{20}=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$\frac{3\pi-6x}{10}=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$3\pi-6x=5\pi+10\pi n$

$-6x=10\pi n+2\pi$

$-3x=5\pi n+\pi$

$x=\frac{-\pi}{3}(5n+1)$

$n\le-3 \Rightarrow 5n\le-15 \Rightarrow 5n+1\le-14 \Rightarrow x\ge\frac{14\pi}{3}>3\pi$, не подходит

$n\ge2 \Rightarrow 5n\ge10 \Rightarrow 5n+1\ge11 \Rightarrow x\le\frac{-11\pi}{3}<-2\pi$, не подходит

$n=1 \Rightarrow x=-2\pi$

$n=0 \Rightarrow x=\frac{-\pi}{3}$

$n=-1 \Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$

$n=-2 \Rightarrow x=3\pi$

Тогда для отобранных нами x равенство синусов выполняется (ибо они именно подходят), при этом оба аргумента $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ тогда сами аргументы равны $\Rightarrow$ нам нужны эти значения и только они.

Ответ: $x\in\left\{-2\pi;-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3};3\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

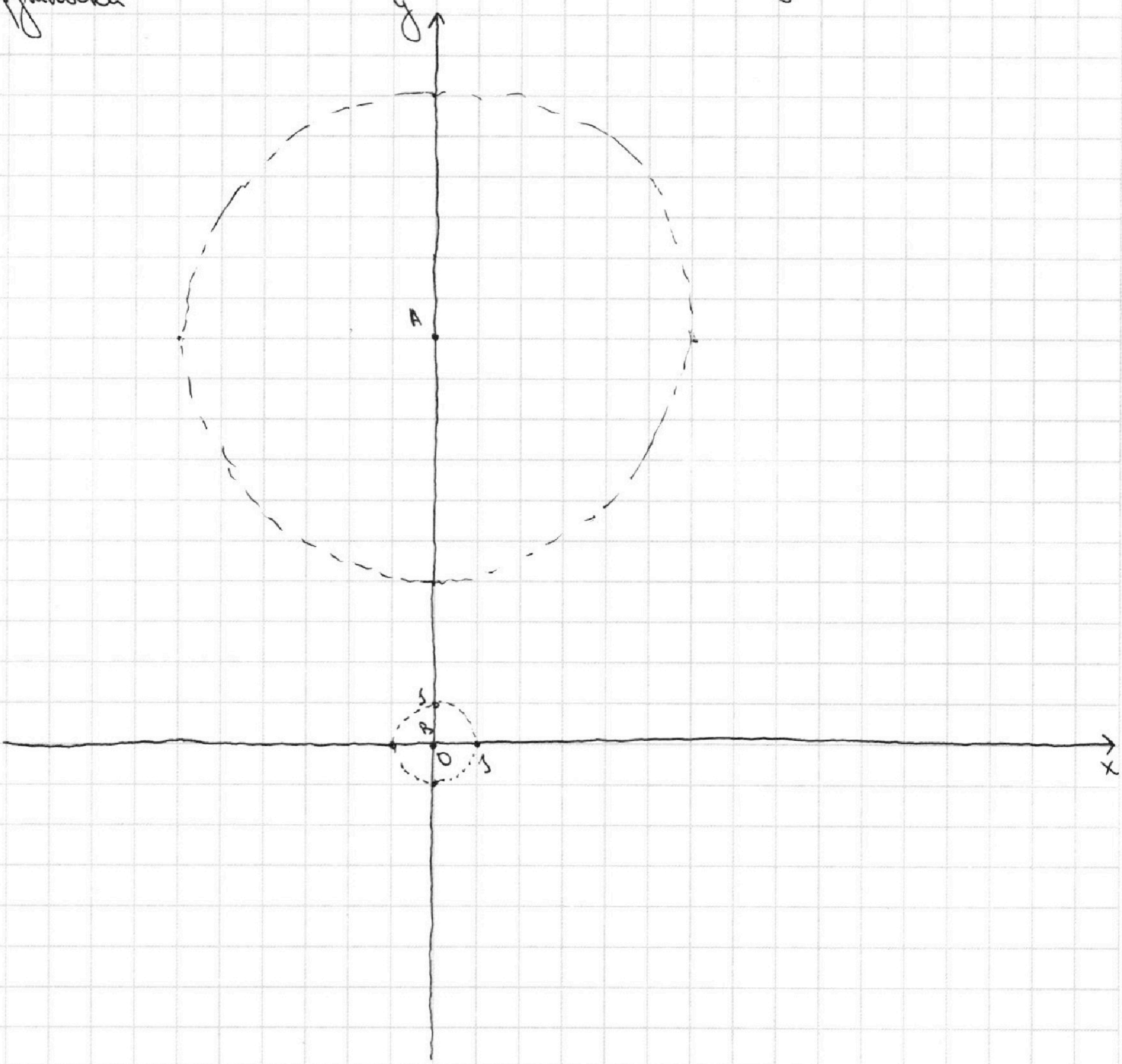
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \Rightarrow 3y=ax+4b \Rightarrow y=\frac{a}{3}\cdot x+\frac{4b}{3} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \Rightarrow (x^2+y^2-1)(x^2+(y-10)^2-36)=0 \end{cases}$$

?a: $\exists b$: ровно 4 реш.

Посмотрим на график II уравнения, понятно, что это объединение 2 фиксированных окружностей



I окр.: центр $A(0;10)$ и $r=6$

II окр.: центр $B(0;0)$ и $r=1$

График I уравнения — прямая, у которой за наклон отвечает a, а за расположение на плоскости — b. Нам нужно ровно 4 реш. $\Rightarrow$ наша прямая должна пересекать каждую окружность в 2 точках $\Rightarrow$ расстояние от A до нашей прямой < 6 и расстояние от B до нашей прямой < 1. Запишем расстояние от A до прямой: $\frac{|4b-30|}{\sqrt{a^2+9}}$, это $< 6 \Rightarrow \frac{|4b-30|}{\sqrt{a^2+9}} < 6 \Rightarrow |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9}$. Запишем расстояние от B до прямой: $\frac{|4b|}{\sqrt{a^2+9}}$, это $< 1 \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow |4b| < \sqrt{a^2+9} \Rightarrow$ у нас такая вещь:

$\begin{cases} |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9} \Rightarrow |30-4b| < 6\sqrt{a^2+9} \\ |4b| < \sqrt{a^2+9} \end{cases} \Rightarrow |4b| + |30-4b| < 7\sqrt{a^2+9}$, при этом известно что $|4b| + |30-4b| \geqslant 4b + (30-4b) = 30 \Rightarrow 7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow \sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7} \Rightarrow a^2+9 > \frac{900}{49} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 > \frac{900-441}{49} = \frac{459}{49} \Rightarrow |a| > \frac{\sqrt{459}}{\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{51}}{7}$, понятно что при таких a $7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{a^2+9} > \frac{30 \cdot 6}{7}$ и $\sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7}$. Возьмём $b = \frac{15}{14}$, тогда $4b = \frac{30}{7} \Rightarrow |4b| \leqslant \frac{30}{7} < \sqrt{a^2+9}$ и $|4b-30| = \left|\frac{30}{7} - 30\right| = 30 \cdot \frac{6}{7} < \sqrt{a^2+9}$, т.е. для a таких, что $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$, можно брать $b = \frac{15}{14}$ и побеждать (а для других a мы поняли, что нельзя победить).

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$, т.е. $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4\log_y 5 = \log_{y^3}\left(\frac{1}{5}\right) - 3 \end{cases}$ ОДЗ: $x, y > 0$; $x \neq \frac{1}{2}$ и $y \neq 1$

пусть $\log_5 2x = a$ и $\log_5 y = b$ $(a, b \neq 0)$

Тогда: $\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{1}{a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{1}{b}\left(4 + \frac{1}{3}\right) + 3 = 0 \Rightarrow b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases}$. Тогда $a^5 + 3a - 4 = 0$ и $3b^5 + 9b + 13 = 0$

$a^5 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 4) = 0$. Посмотрим на $f(a) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 4$ понятно, что в $a \geq 0$ $f(a) > 0$, если $a \leq 1$, то $a^4 + a^3 \geq 0$ и $a^2 + a \geq 0$ (ибо a^4 и $a^2 > 0$ и $|a| > 1$) $\Rightarrow f(a) > 0$, если $a \in (0; -1)$, то $4 + a^3 + a \geq 2$ (ибо $|a| < 1$) $\Rightarrow f(a) > 0$. Значит $f(a) > 0$ при $\forall a \Rightarrow$
$\Rightarrow a^4 + a^3 + a^2 + a + 4 \neq 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \log_5 2x = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 5/2$!

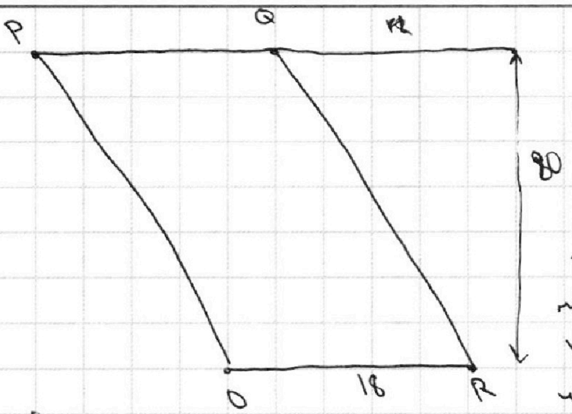
$3b^5 + 9b + 13 = 0$, понятно, что как $f(b) = 3b^5 + 9b + 13$, то $f'(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(b)$ растёт всегда $\Rightarrow$ у неё ровно 1 корень (у многочлена нечётной степени всегда есть ≥ 1 корень).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



? кол-во пар $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$: $5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

Пусть $x_2-x_1=a$ и $y_2-y_1=b$, понятно, что $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ у нас $5a+b=45 \Rightarrow b \vdots 5$. Такие точки заключены в нашем параллелограмме $\Rightarrow |b| \le 80$ и $|a| \le 18$. Посмотрим, какие пары чисел a, b могут нас устраивать.

$|a| \le 18 \Rightarrow$: $5a \in [-90;90] \Rightarrow 45-b \in [-90;90] \Rightarrow -b \in [-135;45] \Rightarrow b \in [-45;135]$, при этом $|b| \le 80 \Rightarrow b \in [-45;80]$ при этом $b \vdots 5$. $|b| \le 80 \Rightarrow b \in [-80;80] \Rightarrow 45-5a \in [-80;80] \Rightarrow$
$\Rightarrow 9-a \in [-16;16] \Rightarrow -a \in [-25;7] \Rightarrow a \in [-7;25] \Rightarrow a \in [-7;18]$, т.к. $|a| \le 18$.

Посмотрим сколько пар точек дают $b=80$ и $a=-7$. $b=80 \Rightarrow B \in PQ$ и $A \in OR$, при этом $a=-7 \Rightarrow$ хороших пар ровно $18+1-7=12$. Теперь $b=75$ и $a=-6$, если мы фиксируем пару горизонт. прямых, то выбрать пару у нас $19-6=13$ возможностей, выбрать пару горизонт. прямых ровно $81-75=6 \Rightarrow$ всего $6 \cdot 13=78$. Тогда в общем случае у нас $81-|b|$ вариантов выбора пары горизонтальных прямых и $19-|a|$ вариантов выбрать пару на уже заданной прямой $\Rightarrow$ всего вариантов $(81-|b|)(19-|a|)=81 \cdot 19-19|b|-81|a|+|a||b|$.
Нам подходят пары чисел a, b: $(-7;80)$; $(-6;75)$; $(-5;70)$ ...; $(18;-45)$, это всего 26 пар, сложим все наши варианты для каждой пары получим $26 \cdot 81 \cdot 19-19(80+75+\ldots+0+5+\ldots+45)-$
$-81(7+6+\ldots+1+0+1+\ldots+18)+(7 \cdot 80+6 \cdot 75+\ldots+18 \cdot 45)$.

$19(80+75+\ldots+0+5+\ldots+45)=95(16+\ldots+1+1+\ldots+9)=95 \cdot \left(\frac{16 \cdot 17}{2}+\frac{10 \cdot 9}{2}\right)=95(45+17 \cdot 8)=95(136+45)=$
$=95 \cdot 181$

$81(7+\ldots+1+1+\ldots+18)=81\left(\frac{7 \cdot 6}{2}+\frac{18 \cdot 19}{2}\right)=81(21+19 \cdot 9)=81(21+171)=81 \cdot 192$

$26 \cdot 81 \cdot 19-95 \cdot 181-81 \cdot 192=(13 \cdot 81 \cdot 19-181 \cdot 5 \cdot 19)+(13 \cdot 19 \cdot 81-192 \cdot 81)=19(13 \cdot 81-181 \cdot 5)+81(13 \cdot 19-$
$-192)=19(1053-905)+81(247-192)=19 \cdot 148+81 \cdot 55$

Осталось посчитать $(7 \cdot 80+6 \cdot 75+\ldots+18 \cdot 45)=18(45+40+\ldots+5)+9 \cdot 0+7 \cdot 80+6 \cdot 75+\ldots+1 \cdot 50=$
$=18 \cdot 5 \cdot (9+\ldots+1)+5(7 \cdot 16+6 \cdot 15+\ldots+1 \cdot 10)=90 \cdot 45+5(112+90+70+52+36+22+10)=90 \cdot 45+5 \times$
$\times(170+110+112)=90 \cdot 45+5 \cdot (280+112)=90 \cdot 45+5 \cdot 392$

$19 \cdot 148+81 \cdot 55+90 \cdot 45+5 \cdot 392=2960-148+81(55+50)+1960=4920-148+81 \cdot 105=$
$=8505+4920-148=13425-148=13277$

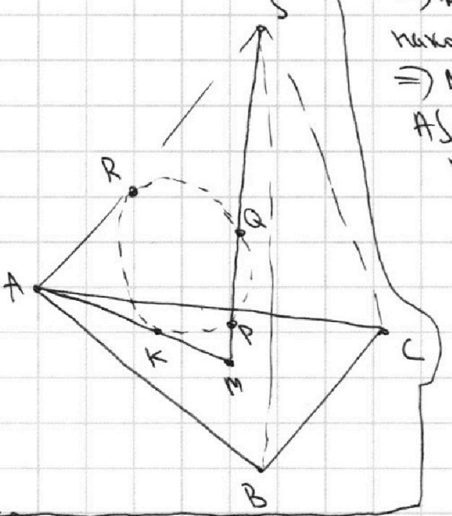
Ответ: 13277.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

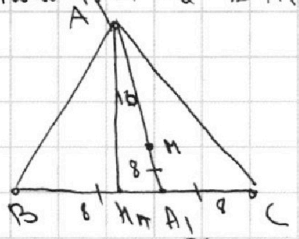
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть R – точка касания сферы и AS. $SP = MQ \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $SQ = MP \Rightarrow SP \cdot SQ = MP \cdot MQ \Rightarrow$ у M и S одинаковые степени отн. сферы $\Rightarrow MK^2 = SR^2$ (это отрезки кас.) $\Rightarrow MK = SR$. Также $AR = AK$ как отрезки кас. Значит, $AS = AM$, $SA = BC = 16 \Rightarrow AM = BC = 16$.

Посмотрим на $\triangle ABC$.



$AM = BC = 16$. $S_{\triangle ABC} = 100$

$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$

~~$S_{\triangle ABC} = h_A \cdot \frac{BC}{2} \Rightarrow 100 = h_A \cdot 8 \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow h_A = \frac{25}{2} \Rightarrow \sin \angle AA_1H_A = \frac{h_A}{24} =$~~
~~$= \frac{25}{48} \Rightarrow \cos \angle AA_1H_A = \frac{\sqrt{1679}}{48}$~~

$BA_1 = CA_1 = \frac{BC}{2} = 8$ и $A_1M = \frac{AM}{3} = 8 \Rightarrow \triangle BMC$ – прямоугольный (медиана = половине стороны) $\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{BM \cdot CM}{2}$, также $S_{\triangle BMC} = \frac{BC}{2} \cdot h'$ (h' – высота из M на BC). $h' = \frac{h_A}{3}$ (где h_A – высота из A на BC). $\frac{h_A \cdot BC}{2} = S_{\triangle ABC} = 100 \Rightarrow h_A = \frac{200}{16} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} \Rightarrow h' = \frac{25}{6} \Rightarrow S_{\triangle BMC} = 8 \cdot \frac{25}{6} = \frac{100}{3} \Rightarrow \frac{BM \cdot CM}{2} = \frac{100}{3} \Rightarrow BM \cdot CM = \frac{200}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \frac{9}{4} \cdot \frac{200}{3} = 3 \cdot 50 = 150 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 24 = 3600$.

Ответ: а) 3600.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{4} \cdot 3 \cdot 5^{3}$ 2^4
$b =$ 2^{24}
$c =$ 2^{40}

$17+12+39 = 39+29 = 68$

$ab: 2^{8} \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $bc: 2^{13} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$10 \arcsin(\cos x) \in [-5\pi; 5\pi]$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\sin 3\alpha - \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) =$
$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - \sin\alpha$
$2\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow ax + 4b = 3y \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$

$? a: \exists b:$ ровно 4 реш.

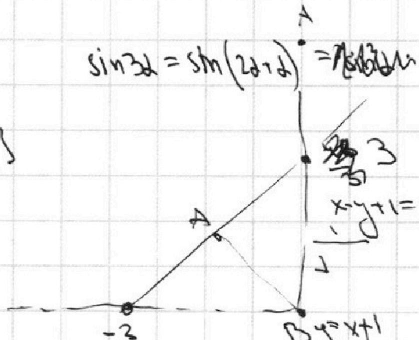
$x^2 + (y-10)^2 = 100 - 64 = 36$

$y = 2x + 3$ от точки $(0;0)$

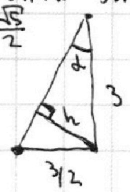
$2x - y + 3 = 0$ $\frac{3}{\sqrt{4+1+9}} =$
$= \frac{3}{\sqrt{14}}$

$y = \frac{a}{3} \cdot x + \frac{4b}{3}$

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) +$
$+ \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) =$
$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha -$
$- 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$



$\sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$



$\frac{4b}{\sqrt{a^2 + 9 + 16b^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$
$\sin\alpha = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$EF \parallel AB$

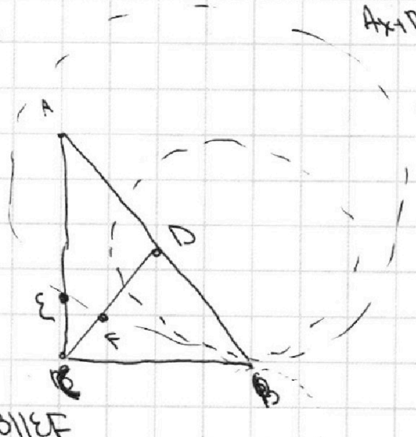
$\frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$

$? \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

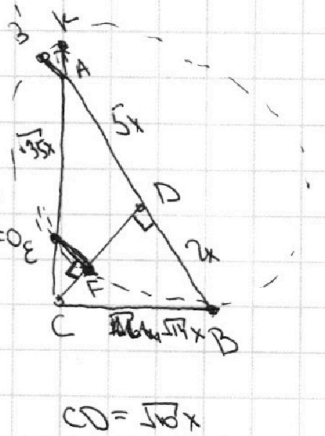
$27 \cdot 7 = 9 \cdot 21 = 189$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$Ax + By + D = 0$
$ax - 3y + 4b = 0$



$AB \parallel EF$



$CD = \sqrt{10}x$

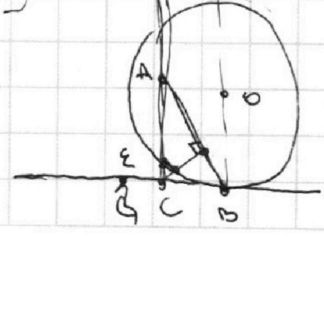
$\sin\angle B = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

$a = 0$

$|4b - 18| < 18$
$|4b| < 3$

$b = \frac{1}{2}$

$|2| < 3$ $|-16| < 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x>0;\ x\neq\frac{1}{2};\ y>0;\ y\neq 1$

$$\begin{cases}(\log_5 2x)^4-3\log_{2x}5=\log_{8x^3}625-3\\(\log_5 y)^4+4\log_y 5=\log_{y^3}\left(\frac{1}{5}\right)-3\end{cases}$$

?xy

$(\log_5 2x)^4-3\log_{2x}5=\log_{2x}5-3$

$a^4-\frac{4}{a}+3=0 \Rightarrow a^5+3a-4=0$

$b^4+\frac{13}{3b}+3=0 \Rightarrow 3b^5+9b+13=0$

$f'(b)=15b^4+9$

8505 + 4920 = 13425; 13425 − 148 = 13277

2960 + 1960 = 4920

$81\cdot105=8100+81\cdot5=8100+405$

$48^2=16\cdot144$ $15-7=12$

144 · 16 = 864 + 144 = 2304

$b=80$ $a=7$

$148\cdot20-148=2960-148$

2304 − 625 = 1679

$2304-625=$

$90\cdot45=81\cdot5\cdot10$

81 · 55 = 405 + 405 = 4455

45 · 9

81 · 13 = 243 + 81 = 1053

SP=MQ

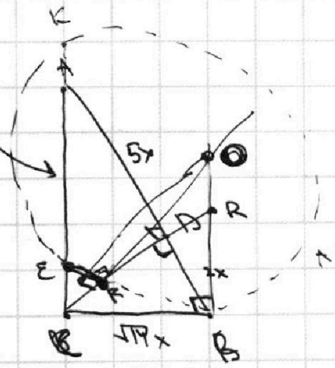
$13\cdot19=260-13=$ $=247$ $15\cdot24=$

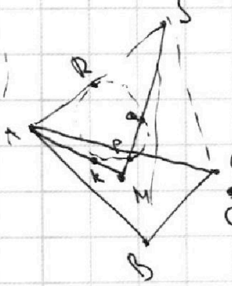
19 · 13 = 57 … $=260$

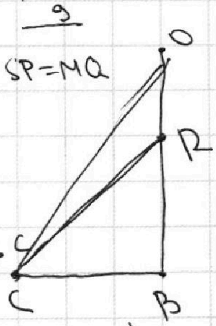
$\frac{19}{247}$ $7+1=26$

$5\cdot392=2000-40$

392 · 5 = 1960







$CD=\sqrt{10}x$

$\frac{BR}{2x}=\frac{\sqrt{14}x}{\sqrt{10}x} \Rightarrow BR=x\cdot\frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$16+9+9=26$

$17\cdot8=80+56=$

$53+95=$ $=153-5=148$

$5x_2-5x_1+y_2-y_1=45$

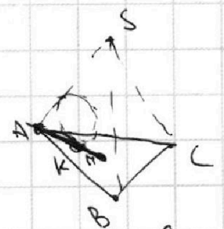
$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

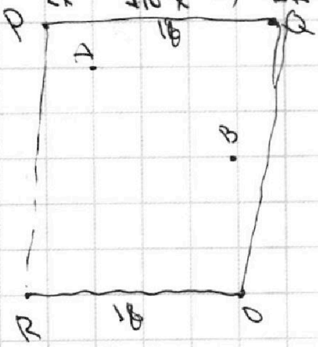
$47+8=55$

ab

$5a+b=45$

$(a-1)(b-7)=ab$





$\log_{y}y=b$

$|b|\leq80$ 8 5; 10 5; 18 −45; 0 45; 17 40; 1 40; 5·14; 4·13; 3·12

$(\log_5 y)^4+4\log_y 5=\log_{y^3}0{,}2-3$

$b^4+\frac{4}{b}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b}-3 \Rightarrow 3b^5+12=-1-9b \Rightarrow 3b^5+9b+13=0$