



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$: $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{21}$, $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$, $ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$. $\min abc$

Покажем что $\min abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$\Rightarrow abc \cdot 5^{39} \Rightarrow$ или $abc = 2^{16} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc > 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ (или $a, b, c \in \mathbb{N}$).

$a = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{21}$
 $b = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^0$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$

$\Rightarrow ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}$, $bc = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{12}$, $ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$

\Rightarrow пример работает, в нем $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$, т.е. равно ма-
ксимуму.

Ответ: $\min abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

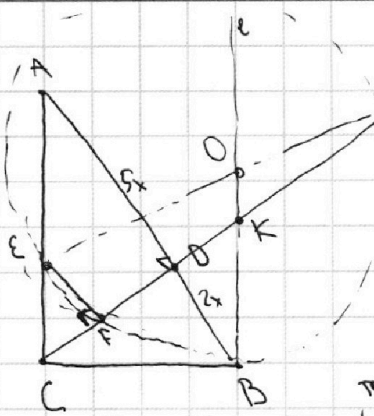
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AD$, $CD \perp AD \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle EFD = 90^\circ$,
 а так как $\angle C$ — острый $(\angle F, B) \Rightarrow$ или провести
 FD до второго пересечения, то этот диаметр ED
 кр. EF , которая диаметральна \perp хорде EF .
 найдем ср. кас. $BC \Rightarrow$ если O — центр окр., то $OB \perp BC \Rightarrow$
 $\Rightarrow OB \parallel AC$ ($\angle C = 90^\circ$). EE' — диаметр $\Rightarrow O$ — это пер-
 сечение EE' и l (прямая $\parallel AC$, проходящая через B), причем
 O — ср. $EE' \Rightarrow$ пусть K — точка пересечения l и CD ,
 тогда OK — ср. линия $\triangle EE'C \Rightarrow K$ — середина CE' . Пусть

$AD = 5x \Rightarrow BD = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{10}x$ (используем в прямоугол. $\triangle CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} \Rightarrow$
 $= \sqrt{35}x$ и $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{14}x$. $l \parallel AC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{KD} \Rightarrow \frac{CD}{KD} = \frac{5}{2} \Rightarrow KD = \frac{2CD}{5} = \frac{2\sqrt{10}x}{5}$, так-
 же $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BK} \Rightarrow BK = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{35}x}{5}$. Пусть $CF = y$, тогда $BC^2 = CF \cdot CE'$. CE' как сумма
 отрезков (отм. найдем окр. \Rightarrow $AK^2 = CF \cdot CE' = CF \cdot (CF + CE)$ $\Rightarrow 7x^2 = CF \cdot CK$. $AK = \frac{2\sqrt{35}x}{5}$
 $\Rightarrow CF = \frac{AK^2}{CK} = \frac{(\frac{2\sqrt{35}x}{5})^2}{CK} = \frac{28x^2}{5CK}$. $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{14x^2 - \frac{4 \cdot 35 x^2}{5}} = x \sqrt{14 - \frac{28}{5}} = x \sqrt{\frac{28+70}{5}} = \frac{2\sqrt{98}x}{5} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 7x}{5} = \frac{14\sqrt{2}x}{5}$
 $= \frac{7\sqrt{2}x}{5}$. Тогда $CF \cdot CK = 7x^2 \Rightarrow 7x^2 = \frac{14x^2}{5} \cdot CF \Rightarrow CF = \frac{5}{2}x$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{10}x \cdot 7x}{2} = \frac{7\sqrt{10}x^2}{2}$; $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CAD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \frac{CD \cdot AD}{2} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2$. Тогда $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{CD \cdot AB \cdot CD^2}{40 \cdot AD \cdot CF^2} =$
 $= \frac{AB \cdot CD^2}{AD \cdot CF^2} = \frac{7x \cdot 10x^2}{5x \cdot \frac{25x^2}{4}} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{28}{5} = 5,6$

Ответ: $S_{\triangle ABC} / S_{\triangle CEF} = \frac{28}{5} = 5,6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$, заметим что $\arcsin(\cos x)$ определен при $\forall x$,
 при этом он принимает значения $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow (\pi - 2x)/10 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \pi - 2x \in [-5\pi, 5\pi] \Rightarrow$
 $\Rightarrow -2x \in [-6\pi, 4\pi] \Rightarrow 2x \in [-4\pi, 6\pi] \Rightarrow x \in [-2\pi, 3\pi]$
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Rightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \Rightarrow \cos x = \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) -$
 $-\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = 0 \Rightarrow 2 \sin(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10})) \cdot \cos(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10})) = 0$

$$\sin(\frac{1}{2}(\frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{10})) = 0$$

$$\frac{5\pi - 8x}{20} = \pi k$$

$$\frac{\pi - 2x}{5} = \pi k$$

$$\pi - 2x = 5\pi k$$

$$2x = \pi - 5\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2}(1 - 5k)$$

$$k \leq -2 \Rightarrow -5k \geq 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 5k \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11\pi}{2} > 3\pi,$$

не подходит

$$k \geq 2 \Rightarrow -5k \leq -10 \Rightarrow 1 - 5k \leq -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{-9\pi}{2} < -2\pi, \text{ не подходит}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = 3\pi$$

Тогда для полученных нами x равенство нулей выполняется (либо эти корни удовлетворяют), при этом оба аргумента $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ тогда один аргумент равен \Rightarrow оба нуля \Rightarrow только эти.

Ответ: $x \in \{-2\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi\}$.

$$\cos(\frac{1}{2}(\frac{5\pi - 10x + \pi - 2x}{10})) = 0$$

$$\frac{6\pi - 12x}{20} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi n$$

$$-6x = 10\pi n + 2\pi$$

$$-3x = 5\pi n + \pi$$

$$x = \frac{-\pi}{3}(5n + 1)$$

$$|5n - 2| \Rightarrow 5n \leq -1 \Rightarrow 5n \leq -1 \Rightarrow x \geq \frac{14\pi}{3} > 3\pi, \text{ не подходит}$$

$$|5n + 2| \Rightarrow 5n \geq 10 \Rightarrow 5n \geq 11 \Rightarrow x \leq \frac{-11\pi}{3} < -2\pi, \text{ не подходит}$$

$$n = 1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$n = 0 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{3}$$

$$n = -1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$n = -2 \Rightarrow x = 3\pi$$

$k, n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



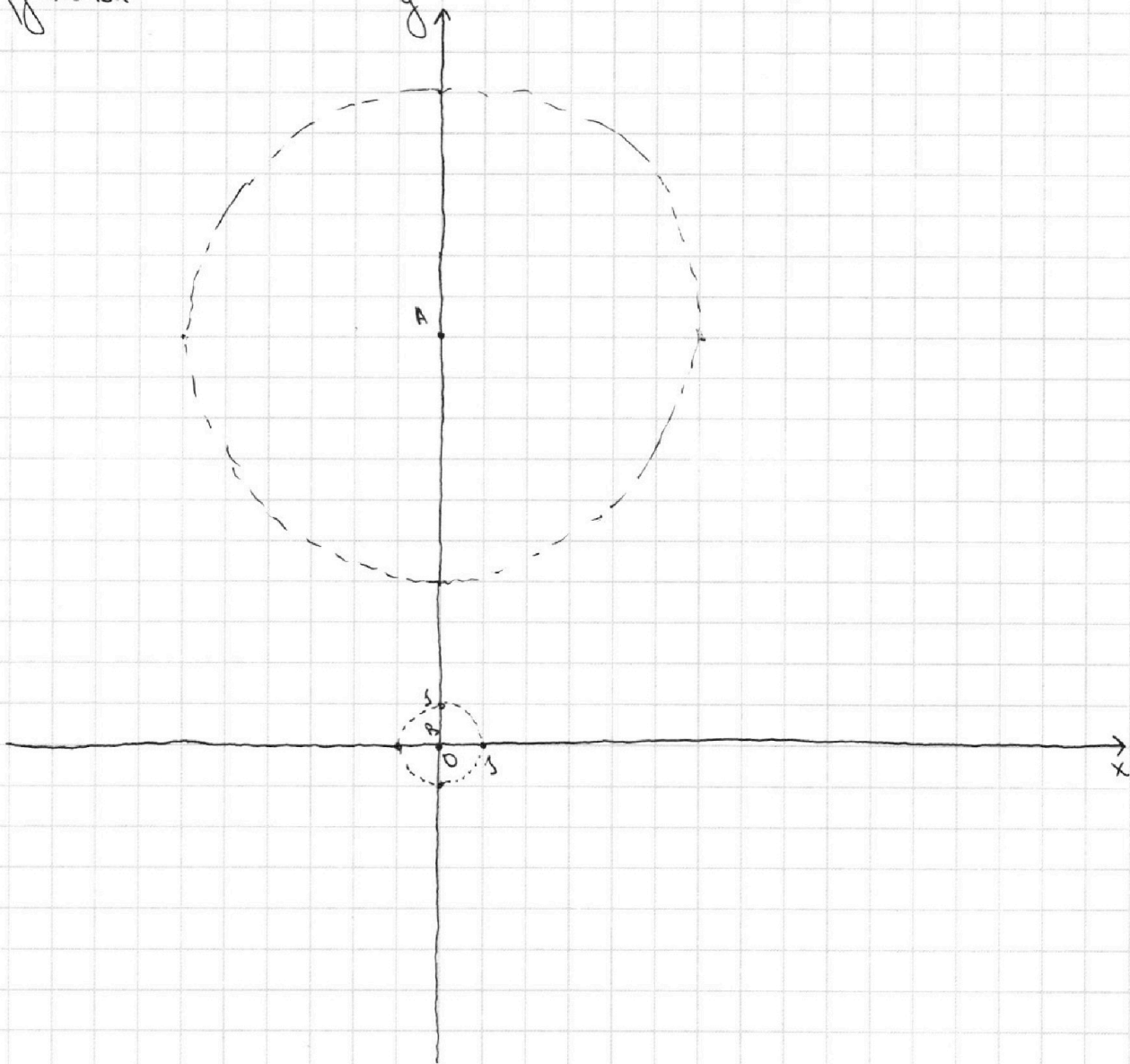
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow 3y = ax + 4b \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\
 & (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 10) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-10)^2 - 36) = 0
 \end{aligned}$$

? а: b: равно 4 реи.

Посмотрим на график II уравнение, понятно, что это объединение 2 фиксированных окружностей



I окр.: центр $A(0, 10)$ и $r = 6$

II окр.: центр $B(0, 0)$ и $r = 6$

График I уравнение - прямая, у которой за нами отвлечет а, а за расстоянием на плоскости - b. Нам нужно равно 4 реи. \Rightarrow наша прямая должна касаться каждой окружности хотя в 2 точках \rightarrow расстояние от A до нашей прямой ≤ 6 и расстояние от B до нашей прямой ≤ 6 . Заметим расстояние от A до прямой: $\frac{|4b - 10a|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, это $\leq 6 \Rightarrow \frac{|4b - 10a|}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 6$. Заметим расстояние от B до прямой: $\frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}}$, это $\leq 6 \Rightarrow \frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow |4b| < \sqrt{a^2+9} \Rightarrow y$ нас такая вещь:
 $\left\{ \begin{array}{l} |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9} \\ |4b| < \sqrt{a^2+9} \end{array} \right. \Rightarrow |4b| + |30-4b| < 7\sqrt{a^2+9}$ при этом из-за
 ведем что $|4b| + |30-4b| \geq 4b + (30-4b) = 30 \Rightarrow 7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow \sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7} \Rightarrow a^2+9 > \frac{900}{49} \Rightarrow a^2 > \frac{900-441}{49} = \frac{459}{49} \Rightarrow |a| > \frac{\sqrt{459}}{7} = \frac{3\sqrt{51}}{7}$ потому что при таких a $7\sqrt{a^2+9} > 30 \Rightarrow 6 \cdot$
 $\sqrt{a^2+9} > \frac{30 \cdot 6}{7}$ и $\sqrt{a^2+9} > \frac{30 \cdot 6}{7}$. Возьмем $b = \frac{15}{4}$, тогда $4b = \frac{30}{4} \Rightarrow |4b| < \frac{30}{7} < \sqrt{a^2+9}$ и
 $|4b-30| = |\frac{30}{4}-30| = 30 \cdot \frac{3}{4} < \sqrt{a^2+9}$, т.е. есть a таких, что $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$, можно брать $b = \frac{15}{4}$
 возможность (а при других a мы можем это сделать по-другому).
 Ответ: $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$, т.е. $|a| > \frac{3\sqrt{51}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_2 x)^4 - 3 \log_2 5 = \log_{2^3} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } x, y > 0; x + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{3}$$

$$(\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_{5^2} \left(\frac{1}{5}\right) - 3$$

$$\text{пусть } \log_5 2x = a \quad \log_5 y = b \quad (a, b \neq 0)$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{1}{a} - 3 \Rightarrow a^4 - \frac{4}{a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{b} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3} - 3 \Rightarrow b^4 + \frac{4}{b} + \frac{10}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{где } a^5 + 3a - 4 = 0 \quad \text{и} \quad 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$a^5 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 4) = 0$. Посмотрим на $f(a) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 4$ 注意到, что
в $a > 0$ $f(a) > 0$, если $a \leq 1$, то $a^4 + a^3 \geq 0$ и $a^2 + a > 0$ (ибо a^2 и $a > 0$ и $|a| > 1$) $\Rightarrow f(a) > 0$,
если $a \in (0; 1)$, то $4 + a^2 + a > 2$ (ибо $|a| < 1$) $\Rightarrow f(a) > 0$. Значит $f(a) > 0$ при $\forall a \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^4 + a^3 + a^2 + a + 4 \neq 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \log_5 2x = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$!

$3b^5 + 9b + 13 = 0$,注意到, что если $f(b) = 3b^5 + 9b + 13$, то $f(b) = 15b^4 + 9 > 0 \Rightarrow f(b)$ имеет все
где $\Rightarrow y$ не равно 1 корням (у многочлена целой степени всегда есть 1 корень).

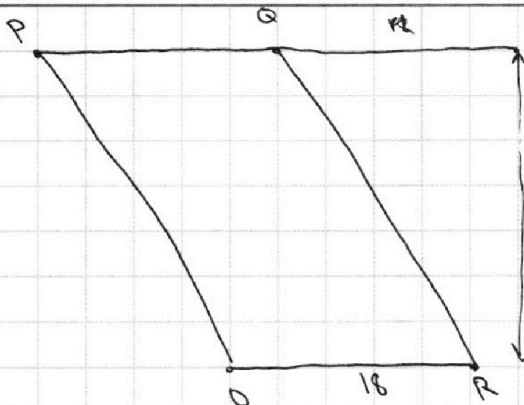
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



? координаты вер A(x₁, y₁), B(x₂, y₂):
 $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$
 Пусть $x_2 - x_1 = a$ и $y_2 - y_1 = b$,
 тогда найдется, что $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow y$ макс
 $5a + b = 45 \Rightarrow b: 5$. Также можно
 заметить, что высота трапеции
 $\Rightarrow |b| \leq 20$ и $|a| \leq 18$. Поскольку,
 какие вершины еще a, b могут нам
 устроиться.

$|a| \leq 18 \Rightarrow 5a \in [-90, 90] \Rightarrow 45 - b \in [-90, 90] \Rightarrow -b \in [-135, 45] \Rightarrow b \in [-45, 135]$, при
 этом $|b| \leq 20 \Rightarrow b \in [-45, 20]$, при этом $b: 5$. $|b| \leq 20 \Rightarrow b \in [-20, 20] \Rightarrow 45 - 5a \in [-20, 20] \Rightarrow$
 $9 - a \in [-18, 18] \Rightarrow -a \in [-27, 9] \Rightarrow a \in [-9, 27] \Rightarrow a \in [-9, 18]$, при $|a| \leq 18$.

Поискать сколько точек есть $b = 90$ и $a = -7$. $b = 90 \Rightarrow B \in PQ$ и $A \in OR$, при этом
 $a = -7 \Rightarrow$ коротких вер равна $18 + 5 - 7 = 12$. Также $b = 75$ и $a = -6$, если мы фиксируем
 одну вершину, например, то выберем вершину y макс $19 - 6 = 13$ возможностей, выберем вершину
 например, например равно $91 - 75 = 6 \Rightarrow$ всего $6 \cdot 13 = 78$. Тогда в общем случае y макс
 $81 - |b|$ вариантов выбора вершину горизонтальных вершин и $19 - |a|$ вариантов выбора
 вершину на уровне заданной вершины \Rightarrow всего вариантов $(81 - |b|)(19 - |a|) = 91 \cdot 19 - 19|b| - 81|a| + |a||b|$.

Нам нужно найти сумму $a, b: (-7, 90); (-6, 75); (-5, 70) \dots (11, -45)$, то есть 26 пар,
 считаем все наши варианты для каждой пары по формуле $26 \cdot 81 \cdot 19 - 19(90 + 75 + \dots + 70 + 5 + \dots + 45) -$
 $81(7 + 6 + \dots + 1 + 0 + 1 + \dots + 18) + (7 \cdot 20 + 6 \cdot 75 + \dots + 16 \cdot 45)$
 $19(80 + 75 + \dots + 0 + 5 + \dots + 45) = 95(161 + \dots + 11 + 1 + \dots + 9) = 95 \cdot (\frac{16 \cdot 17}{2} + \frac{10 \cdot 9}{2}) = 95(45 + 45) = 95 \cdot 90 =$
 $= 95 \cdot 181$

$81(7 + \dots + 1 + 1 + \dots + 18) = 81(\frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{10 \cdot 9}{2}) = 81(21 + 45) = 81(21 + 45) = 81 \cdot 66 = 81 \cdot 192$
 $26 \cdot 81 \cdot 19 - 95 \cdot 181 - 81 \cdot 192 = (13 \cdot 81 \cdot 19 - 181 \cdot 5 \cdot 19) + (13 \cdot 19 \cdot 81 - 192 \cdot 81) = 19(13 \cdot 81 - 181 \cdot 5) + 81(13 \cdot 19 -$
 $- 192) = 19(1053 - 905) + 81(247 - 192) = 19 \cdot 148 + 81 \cdot 55$

Остается посчитать $(7 \cdot 20 + 6 \cdot 75 + \dots + 16 \cdot 45) = 16(45 + 40 + \dots + 5) + 9 \cdot 0 + 7 \cdot 80 + 6 \cdot 75 + \dots + 1 \cdot 50 =$
 $= 16 \cdot 5 \cdot (9 + \dots + 1) + 5(7 \cdot 16 + 6 \cdot 15 + \dots + 1 \cdot 10) = 90 \cdot 45 + 5(112 + 90 + 70 + 52 + 36 + 22 + 10) = 90 \cdot 45 + 5 \cdot$
 $\times (170 + 110 + 112) = 90 \cdot 45 + 5 \cdot (280 + 112) = 90 \cdot 45 + 5 \cdot 392$
 $19 \cdot 148 + 81 \cdot 55 + 90 \cdot 45 + 5 \cdot 392 = 2960 - 148 + 81 \cdot (55 + 50) + 1960 = 4920 - 148 + 81 \cdot 105 =$
 $= 8505 + 4920 - 148 = 13425 - 148 = 13277$

Ответ: 13277.

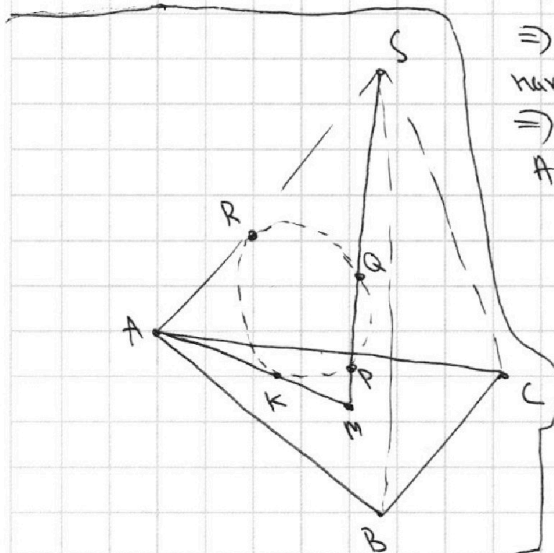
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

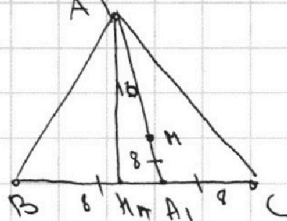
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть R - точка касания сферы с AS . $SP = MQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow SQ = MP \Rightarrow SP \cdot SQ = MP \cdot MQ \Rightarrow$ у M и S общие
 нормали ступеням от сферы $\Rightarrow MK = SR^2$ (по отрезкам кас.)
 $\Rightarrow MK = SR$. Также $AR = AK$ как отрезки кас. Значит,
 $AS = AM$, $SA = BC (=16) \Rightarrow AM = BC = 16$.

Посмотрим на $\triangle ABC$.



$AM = BC = 16$, $S_{\triangle ABC} = 100$

$AA_1 = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot 16 = 24$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a = 100 \Rightarrow h_a \cdot 8 = 200$

$\Rightarrow h_a = \frac{25}{2} \Rightarrow \sin \angle AA_1M = \frac{h_a}{AM} = \frac{25}{32}$

$= \frac{25}{48} \Rightarrow \cos \angle AA_1M = \frac{\sqrt{169}}{48}$

$AA_1M = \frac{AM}{3} = 8 \Rightarrow \triangle BMC$ - равн.

мажоранта (медика = половина стороны) $\Rightarrow S_{\triangle BMC} =$

$= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h'$, также $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot h' \cdot BC$ (где h' - высота из M на BC). $h' = \frac{16}{3}$ (где h_a - высота из A на BC).

$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h' = S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{16}{3} = \frac{128}{3}$

$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h' = \frac{100}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h' = \frac{100}{3} \Rightarrow BC \cdot h' = \frac{200}{3}$

$\Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} \cdot BM \cdot \frac{3}{2} \cdot CM = \frac{9}{4} \cdot \frac{200}{3} = 3 \cdot 50 = 150 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 24 = 3600$.

Ответ: а) 3600.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a = 17 \cdot 12 \cdot 39$
 $b = 39 \cdot 29$
 $c = 29 \cdot 17$

$ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow ax + 4b = 3y \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$
 $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$
 ? a: 7b: равно + пер.

$17 + 12 + 39 = 39 + 29 = 68$

$x^2 + (y - 10)^2 = 100 - 64 = 36$

$y = 2x + 3$ или $\tan(\alpha)$

$a: 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $b: 2^3 \cdot 3^{20} \cdot 5^{19}$ $c: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$2x - y + 3 = 0$ $\frac{3}{\sqrt{4+9}} =$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin 2\alpha = \sin(2\alpha + \delta) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) =$
 $= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$10 \arcsin(\cos x) \in [-5\pi; 5\pi]$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\sin 2\alpha - \sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$

$\sin 2\alpha - \sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) =$

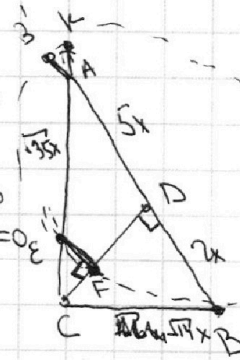
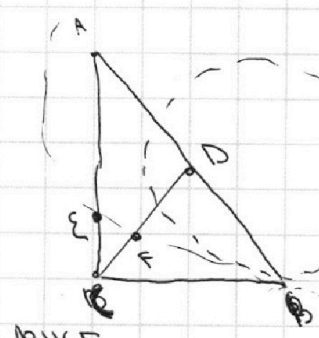
$3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha - \sin \alpha$

$2 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$Ax + By + D = 0$

$Bx - 5y - 4b = 0$



$CD = \sqrt{3}x$

$\sin \angle B = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ $(a=0)$

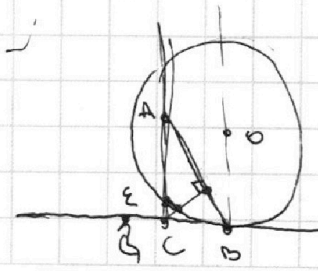
$|6 - 18| < 18$

$|4b| < 3$

$b = \frac{1}{2}$

$|2| < 3$

$|14| < 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x > 0; x \neq \frac{1}{2}; y > 0; y \neq 5$$

$$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_5 \left(\frac{1}{5}\right) - 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8505 \\ + 4920 \\ \hline 13425 \\ - 148 \\ \hline 13277 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2960 \\ + 1960 \\ \hline 4920 \\ 81 \cdot 105 = 85100 + \\ + 81 \cdot 5 = 8100 + \\ + 105 \end{array}$$

? xy

$$(\log_5 2x)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 - 3 \quad 48^2 = 16 \cdot 144 \quad 15 - 7 = 12$$

$$a^4 - \frac{4}{a} + 7 = 0 \Rightarrow a^5 + 7a - 4 = 0 \quad \begin{array}{r} 144 \\ + 16 \\ \hline 160 \\ + 864 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$b = 80 \quad a = 7$$

$$b^4 + \frac{13}{b} + 3 = 0 \Rightarrow 3b^5 + 5b + 13 = 0 \quad \begin{array}{r} 144 \\ + 16 \\ \hline 160 \\ + 864 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$148 \cdot 20 - 148 = 2960 - 148$$

$$f(x) = 5b^4 + 9$$

$$\begin{array}{r} 2304 \\ - 625 \\ \hline 1679 \end{array}$$

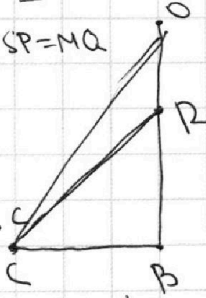
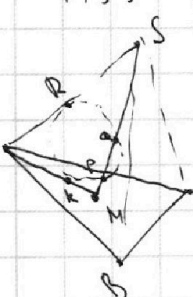
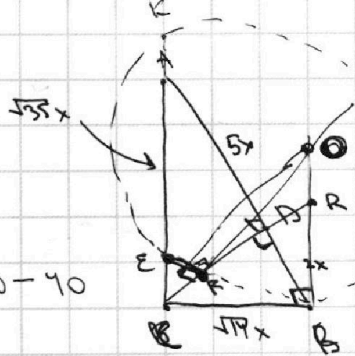
$$2304 - 625 =$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ \times 55 \\ + 405 \\ + 105 \\ \hline 4455 \end{array}$$

$$90 \cdot 45 = 81 \cdot 5 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ \times 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 91 \\ \times 13 \\ \hline 243 \\ + 81 \\ \hline 1053 \end{array}$$



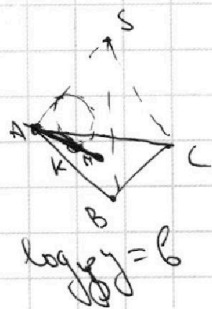
$$5 \cdot 497 = 2000 - 10$$

$$\begin{array}{r} \times 482 \\ \times 1960 \end{array}$$

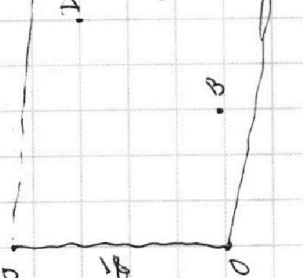
$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\frac{BR}{2x} = \frac{\sqrt{10}x}{18} \Rightarrow BR = x \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{9}$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{10}}{9}$$



$$\log_5 y = 6$$



$$\begin{cases} 5x^2 - 5x + 4y - 4 = 45 \\ 5(x^2 - x) + (4y - 4) = 45 \end{cases}$$

$$5x + 4 = 45$$

$$(a-1)(b-7) = ab$$

$$(\log_5 y)^4 + 4 \log_5 5 = \log_5 0.2 - 3$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \Rightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b^4 \Rightarrow 3b^5 + 9b^4 + 13 = 0$$

$$\begin{array}{l} |b| \leq 80 \\ \begin{array}{l} 8 \cdot 5 \\ 10 \cdot 5 \\ 5 \cdot 14 \\ 4 \cdot 15 \end{array} \quad \begin{array}{l} 18 \cdot 45 \\ 0 \cdot 45 \end{array} \quad \begin{array}{l} 19 \cdot 40 \\ 1 \cdot 40 \end{array} \\ 312 \end{array}$$