



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

По условию: $ab : 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow ab = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot k$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} \Rightarrow bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} \cdot m$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} \Rightarrow ac = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} \cdot n; m, n, k \in \mathbb{N}$$

Рассмотрим величину $ab \cdot bc \cdot ac$:

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k$$

$$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k; \text{ обе части натуральные } \Rightarrow$$

корень из обеих частей

$$abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25} \cdot \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k}$$

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ произведения справа тоже натуральные

$$\Rightarrow \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 \cdot m \cdot n \cdot k - \text{ это полный квадрат,}$$

$\& 3 \cdot m \cdot n \cdot k \neq$ при нем квадрат числа, кратного 3-и

(т.к. 3 уже есть). Ближайший такой квадрат -

$$270 \text{ и } \Rightarrow \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k} \geq 3$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$$

Возьмем пример на $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$

Пусть $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7; b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^8; c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11}$

Тогда $abc = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^8 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$, а $ab = 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} : 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14};$

$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16}; ac = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} \Rightarrow$ Эта тройка удовлетворяет условию

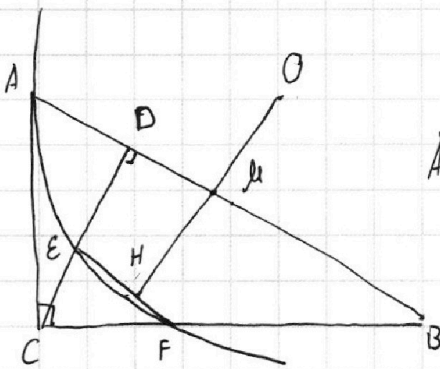
Order: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{25}$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.



Отметим точку O - центр данной окружности.

A также точки M и H - середины AB и EF соответственно.

1) Отрезок из центра окружности к середине этой дуги будет ей перпендикулярен, т.к. будет являться медианой и высотой в равнобедренном треугольнике с вершинами в концы дуги и центре, в к-р. 2 отрезка будут равны как радиусы.

2) $\Rightarrow OM \perp AB$; $ON \perp EF$, но $AB \parallel EF \Rightarrow OM \perp EF$, но из точки O можно опустить только одну перпендикуляр на $EF \Rightarrow O, M$ и H лежат на одной прямой.

3) Теперь пусть $AB = 13x$, тогда:

$$BD = \frac{13x \cdot AB}{13} = \frac{13x}{13} = 10x \Rightarrow AD = AB - BD = 13x - 10x = 3x$$

$$AM = MB = \frac{1}{2} AB = 6,5x \quad (M - \text{серединая } AB)$$

$$\Rightarrow \cancel{DM} = AM - AD = 6,5x - 3x = 3,5x \quad (\text{по условию } H)$$

4) Рассмотрим четырехугольник $EDMH$, в к-м: $\angle EDM = 90^\circ$, $\angle DMH = 90^\circ$

и $\angle EHM = 90^\circ$ (из п. 2) $\Rightarrow EDMH$ - прямоугольник $\Rightarrow DM = EH = 3,5x$,

5) H - середина $EF \Rightarrow EF = 2EH = 7x$.

6) Высота ^{на гипотенузу} отсекает ~~отсекает~~ ~~отсекает~~ отсекает прямоугольный треугольник,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

подобных между собой (а также исходную) \Rightarrow

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CBD, k = \frac{CD}{BD}$$

А сама высота равна корню из произведения проекций катетов

$$\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{BD}$$

8) Площади подобных относятся как квадрат коэфф. пропорциональности

$$\Rightarrow S_{ACD} : S_{CBD} = k^2 = \frac{AD \cdot BD}{BD^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{3x}{10x} = \frac{3}{10}$$

9) Важно заметить, что т.к. $\angle EFC = \angle DCB$ как соответственные

при $AB \parallel EF$ и секущей BC , то $\triangle EFC \sim \triangle DCB$ по 2-4

$$\text{углам (у них еще общий угол DCB)} \Rightarrow k = \frac{EF}{DB} = \frac{2x}{10x} = \frac{1}{5}$$

$$10) \text{ А } \triangle EFC \text{ относятся как } k^2 = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25} = \frac{S_{EFC}}{S_{DCB}} \Rightarrow \frac{S_{EFC}}{S_{DCB}} = \frac{100}{25}$$

$$11) \text{ из п. 8 и 10 } \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{S_{CBD}}{S_{EFC}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{100}{49} = \frac{30}{49}$$

Ответ: $\frac{30}{49}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$, воспользуемся формулой приведения:
 $5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$, теперь \arccos определяет арккосинуса \Rightarrow

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Проверим $x = \frac{\pi}{6}$ в исходное уравнение, чтобы убедиться,
что решение подходит:

$$5 \arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = 5 \cdot \arccos(\frac{1}{2}) = 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$A \quad \frac{3\pi}{2} + x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi + \pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 5 \arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ подходит и это}$$

единственный корень, так как мы рассуждали равносильными
преобразованиями

Ответ: $\{\frac{\pi}{6}\}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

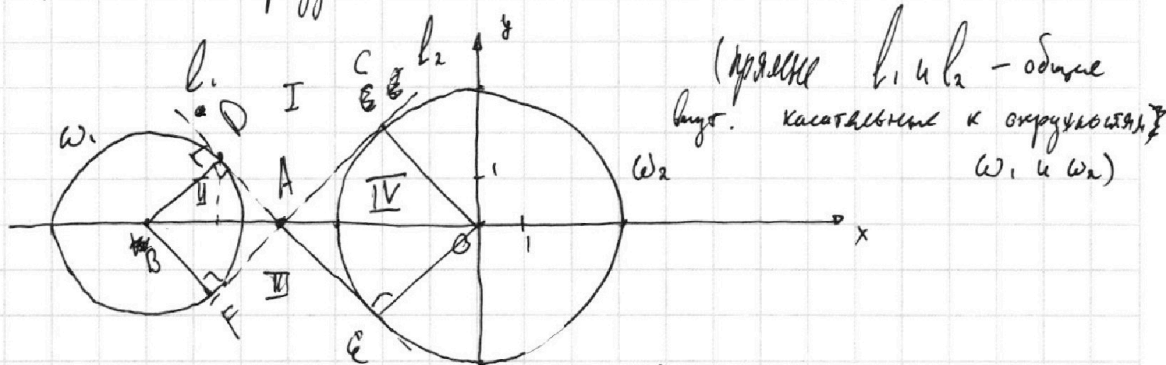
$$\begin{cases} x+3ay-4b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

, оба множителя упрощаются на \mathbb{R}^2

\Rightarrow эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x+3ay-4b=0 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} = \begin{cases} x+3ay-4b=0 & (1) \\ (x+7)^2+y^2=4 & (2) \\ x^2+y^2=9 & (3) \end{cases}$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности на Oxy с в. $(-7; 0)$ и $(0; 0)$ и радиусами 2 и 3 соот.:



А урав (1) задаёт прямую $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{4b}{3a}$. Заметим, что существует также пара сфер по Oy . \Rightarrow Пусть уравнения (1) задавало прямую l . Сферам известны b так, чтобы l проходила через T , пересечения l_1 и l_2 . Если l совпадает с l_1 или l_2 , то радиусы максимум 2 (если $l=l_1$, то сфера \uparrow , то l не пересека ω_1 , а если сфера \downarrow то не пересека ω_2 ; аналогично если $l=l_2$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Если l лежит в I и III, то пересекать две окружности $\neq 2$~~

Заметим, что если пересекать окружностей 4 (\Rightarrow 4 окружностей и прямой), то прямая обязательно лежит в II и IV, и возможно в I или III, но не в I и III одновременно.

\Rightarrow чтобы она лежала в II и IV, необходимо чтобы её углы наклона были с наклоном около Ox был меньше чем y l_2 и больше чем y l_1 . Для этого можно выбрать углы l_1 и l_2

~~$l_1: Ax + By + C = 0$~~

~~Тогда т.к. l кас., должны выполняться следующие равенства: для l_1 и l_2~~

~~l_2 и l_1 : $\frac{|A \cdot (-4) + B \cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$
 $\frac{|A \cdot 0 + B \cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \Rightarrow C = \pm 3\sqrt{A^2 + B^2}$~~

~~$\frac{|-4A + 3\sqrt{A^2 + B^2}|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$
 $\frac{|-4A - 3\sqrt{A^2 + B^2}|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$~~

Но все l_1 проходят через точку A , которая лежит OB в отношении радиусов (в ту же сторону) $\Rightarrow OA = \frac{3}{5}|OB| = \frac{21}{5}$

$\Rightarrow (-\frac{21}{5}; 0) \in l_1 \Rightarrow -\frac{21}{5}A + C = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим l_1 проходит через точки A и D . Точка A лежит (\checkmark)

OB в отношении радиусов (в силу подобия $\triangle ODB$ и $\triangle OEA$)

$$\Rightarrow OA = \frac{3}{5} OB = \frac{21}{5}, AB = \frac{2}{5} OB = \frac{14}{5}$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{196}{25} - 4 = \frac{96}{25}$$

$$AD^2 = (x_d - x_a)^2 + (y_d - y_a)^2$$

(*) или OB в отношении радиусов (в силу подобия $\triangle ODB$ и $\triangle OEA$)

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{5} \cdot BO = \frac{14}{5}$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{96}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle DAB = \frac{BD}{AD} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle DAO = -\frac{5}{2\sqrt{6}} = \text{угл наклона } l_1$$

Угол наклона прямой $l_2 = \operatorname{tg} \angle BAF = \operatorname{tg} \angle DAB = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

Угол наклона прямой $l = -\frac{1}{3a}$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2\sqrt{6}} < -\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{3a} < -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} < -\frac{15}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{2\sqrt{6}}{15} < \frac{15}{2\sqrt{6}} < a < \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{15}{2\sqrt{6}}; \frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Воспользуемся свойствами логарифмов, преобразуем оба равенства:

1) $\log_3^4(6x) - 2 \log_{36x}^4 = \log_{36x^2} 343 - 4$ 2) $\log_3^4 y + 6 \log_2 y = \log_9^5 7 - 4$

$\log_3^4 6x - \frac{2}{\log_3 6x} = \frac{3}{2 \log_3 6x} - 4$

$\log_3^4 6x - \frac{4}{2 \log_3 6x} + 4 = 0$

$\frac{2 \log_3^5 6x + 4 \cdot 8 \log_3 6x - 4}{2 \log_3 6x} = 0$

Сделаем замену $t = \log_3(6x)$:

$\frac{2t^5 + 8t - 4}{2t} = 0$

обозначим это выражение за $f(t)$

$f'(t) = \frac{(2t^5 + 8t - 4)' \cdot 2t - (2t^5 + 8t - 4) \cdot (2t)'}{4t^2} = \frac{10t^4 + 10t - 2t^5 - 16t + 4}{4t^2} =$

$= \frac{-4t^5 + 10t^5 + 4}{4t^2} = \frac{6t^5 + 4}{4t^2}$

при $t > 0$ $f'(t) > 0$

$\Rightarrow f(t)$ возрастает. А при $t < 0$ очевидно решение нет

т.к. $2t^5 + 8t - 4 < 0$

\Rightarrow Единственное решение есть, решение единственно. $t =$

2) Аналогично получим что решение y корень, то он единственный

Заметим что если $\log_3 t = t = \log_3(6x)$ - корень, то

$-\log_2 y = -t$ - корень второе $\Rightarrow \log_2(6x) = -\log_2 y$

$\log_2 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \quad xy = \frac{1}{6}$ Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

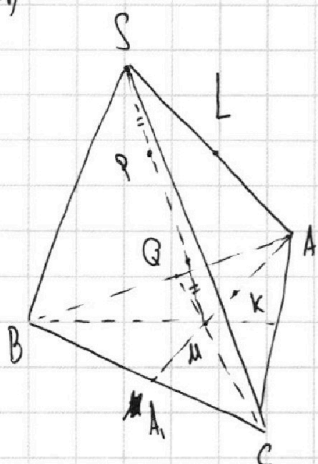
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 а)



1) Рассм. сечение шара плоскостью (SAM)

Это будет окружность, проходящая через точки

L, P, Q и K (используя), найдем эту

окружность ω.

2)

Тогда сечение точки S относительно ω:

$$\deg_{\omega} S = SL^2 = SP \cdot SQ (= SP \cdot (SP + PQ))$$

$$\text{в сечении точка M: } \deg_{\omega} M = MK^2 = MQ \cdot MP (= MQ \cdot (MQ + PQ)) \quad | \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } MQ = SP, \quad SL^2 = MQ \cdot MP = MK^2 \Rightarrow SL = MK \quad (\text{они отрезки}$$

не нулевые и не отрицательны как длины отрезков)

3) А АК = AL как отрезки касательных $\Rightarrow AM = AK + MK = AL + LS = AS = 10$

4) Если AM = 10, а M — центр тяжести $\triangle ABC \Rightarrow AM = \frac{3}{2} AM = 15$ т.

5) $\Rightarrow B \in BMC: BA_1 = A_1C = AM = 5 \Rightarrow \triangle BMC$ — прямоугольный $\Rightarrow S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$

6) Медианы разбивают треугольник на 6 равновеликих

$$\Rightarrow S_{\triangle BMC} = S_{\triangle BAM} + S_{\triangle CAM} = \frac{1}{6} S_{ABC} + \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$$

$$7) \Rightarrow \frac{1}{2} BM \cdot MC = 20 \Rightarrow BM \cdot MC = 40$$

8) Т.к. M — центр тяжести: $BB_1 = \frac{3}{2} BM$; $CC_1 = \frac{3}{2} CM$

$$9) \text{ из п. 4, 7 и 8 } \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{3}{2} \cdot 40 \cdot \frac{3}{2} = 1350$$

Ответ: 1350

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

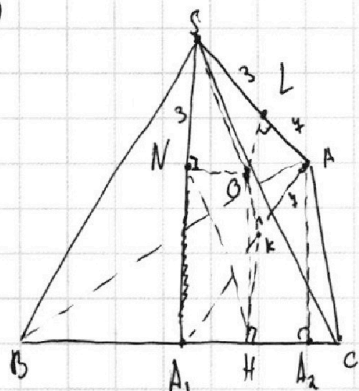
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 б)



Рассмотрим точку O - центр сферы.

1) $SN = SL$ как отрезки касательных к сфере

$$\Rightarrow SL = 3 \Rightarrow \angle A = 4$$

2) Аналогично $AK = AL = 4$

3) Выясним перпендикулярность на BC и A_1K и A

$$2) AA_2 = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12$$

и отсюда точки H и A_2 а также точки

3) из подобия $\triangle A_1KH$ и $\triangle A_1AA_2 \Rightarrow \frac{KH}{AA_2} = \frac{A_1K}{A_1A}$

$$\Rightarrow KH = \frac{AA_2 \cdot A_1K}{A_1A} = \frac{12 \cdot 8}{15} = \frac{4 \cdot 6}{5} = 6.4$$

4) $\angle OHK$ равен $\frac{1}{2}$ \angle точки N, O, K и H лежат на σ сферой

поэтому $\Rightarrow 2 \angle S(BC)A = 2 \angle OHK$

$$\text{tg } \angle OHK = \frac{OK}{HK} = \frac{4}{6.4} = \frac{5}{8}$$

$$\text{tg } 2 \angle OHK = \frac{2 \text{tg } \angle OHK}{1 - \text{tg}^2 \angle OHK} = \frac{2 \cdot \frac{5}{8}}{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{39}{64}} = \frac{5 \cdot 64}{4 \cdot 39} = \frac{5 \cdot 16}{2 \cdot 39} = \frac{80}{39}$$

$$\Rightarrow 2 \angle OHK = \angle S(BC)A = 2 \angle OHK = \arctg \frac{80}{39}$$

Ответ: $\arctg \frac{80}{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|-4A + 3\sqrt{A^2+B^2}|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ -\frac{21}{5}A + 3\sqrt{A^2+B^2} = 0 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|-4A - 3\sqrt{A^2+B^2}|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ -\frac{21}{5}A - 3\sqrt{A^2+B^2} = 0 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Восстановите все члены логарифмов, преобразуйте оба равенства к виду:

$$1) \log_2^3 6x - \log_2 6x = \frac{3}{2 \log_2 6x} - 4$$

$$f(x) = \frac{\log_2^5 6x + 8 \log_2 6x - 4}{\log_2 6x} = 0$$

$$f'(x) = 6 \log_2^5 6x + 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 6x - 2 \log_3 7 = \log_{36x^2} 393 - 4 \quad \log_2^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2 \log_2 y} - 4$$

$$\log_3^4 6x - \frac{2}{\log_3 6x} = \frac{3}{2 \log_3 6x} - 4$$

$$\log_3^4 6x - \frac{4}{2 \log_3 6x} + 4 = 0$$

$$\log_2^4 y + \frac{4}{2 \log_2 6xy} + 4 = 0$$

$$t^4 - \frac{4}{2t} + 4 = 0$$

$$\log_2 6x = -\log_2 y$$

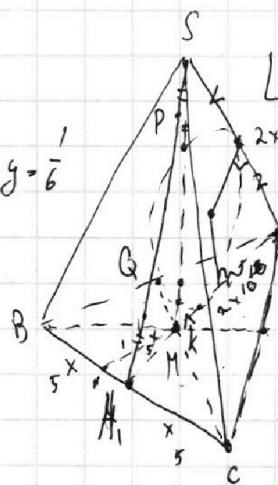
$$t^4 + \frac{4}{2t} + 4 = 0$$

$$\log_2 6x \cdot y = 0$$

$$\frac{2t^5 + 8t + 4}{2t} = 0$$

$$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

$$\log_2^4 y - \log_2^4 6x + \frac{4}{2} \left(\frac{1}{\log_2 6x} + \frac{1}{\log_2 6y} \right) = 0$$



$SP \cdot SQ = SL^2$
 $MQ \cdot MP = MK^2$
 $BK \cdot KC = 20$
 $\frac{3}{4} \cdot 20 \cdot AM =$
 $\boxed{3 \cdot 5 \cdot 15}$

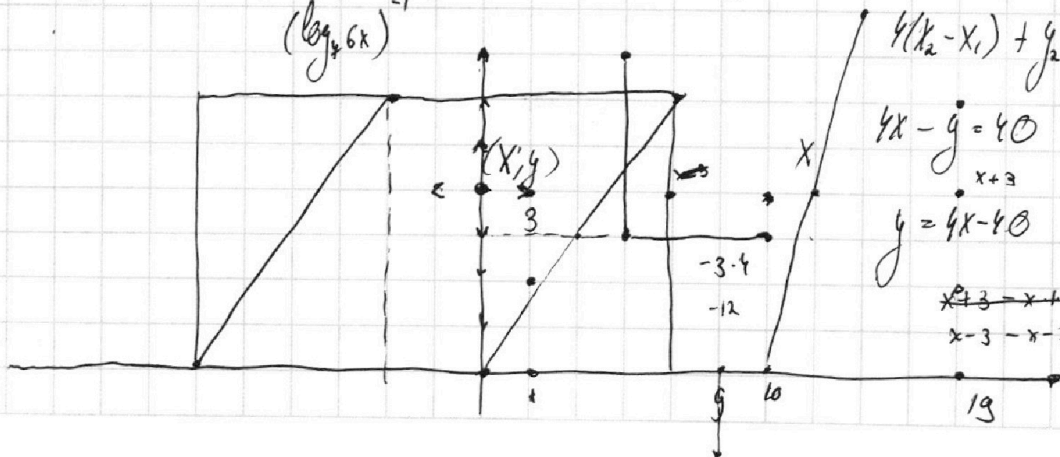
$$(\log_2 y + \log_2 6x)(\log_2 y - \log_2 6x)(\log_2 y + \log_2 6x) + \frac{4}{2} = 0$$

$$(\log_2 y + \log_2 6x) \left(\log_2^3 y + \log_2 y \log_2^2 6x - \log_2^2 y \log_2 6x - \log_2^3 6x \right) + \frac{4}{2 \log_2 6x \log_2 6y} = 0$$

$$2 \cdot 8 \cdot 2^4 \beta + 2 \cdot 2^2 \beta^3 - 2 \cdot 2^3 \beta^2 - 2 \cdot 2^3 \beta + 4 = 0$$

68:4
17

$$\frac{4}{1350} \left(\log_2^4 6x - \frac{4}{2 \log_2 6x} \right) = \frac{4 \log_2^3 6x}{\ln 2 \cdot 6x} + \frac{4}{2} \left(\frac{\ln 2 \cdot 6x}{\log_2^2 6x} \right) \quad (d \cdot d): 4$$



$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$
 $4x - y = 40$
 $x = 3$
 $y = 4x - 40$
 $x + 3 = x + 3$
 $x - 3 = x - 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



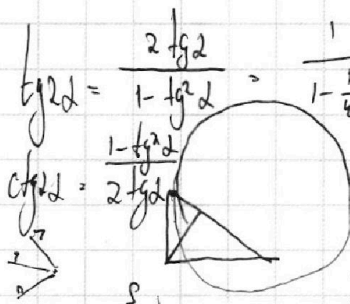
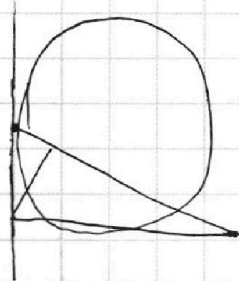
$64 \cdot 4 = 256$
 $\sqrt[4]{256} = 4$
 $\sqrt[4]{16} = 2$
 $a \cdot b = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot n$ $b \cdot c = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot m$ $a \cdot c = 2^4 \cdot 3^{14} \cdot 5^4 \cdot k$

$abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot n \cdot m \cdot k} = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25} \cdot \sqrt{3 \cdot n \cdot m \cdot k}$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7$ $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7$ $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11}$

$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$\arccos(\sin x)$
 $\arccos(\cos(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$



$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$CD = \sqrt{\dots}$

$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

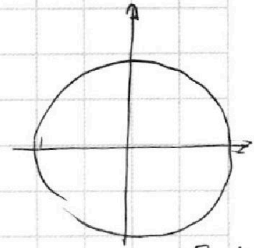
$5\sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2} + x$
 $25(1-x^2) = \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi x + x^2$

$26x^2 + 3\pi x - 25 = \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi x + x^2$
 $0 = 5x^2 - 4 \cdot 26 \left(\frac{9\pi^2}{4} - 25\right)$
 $-9\pi^2 - 26 \cdot 9\pi^2 + 4 \cdot 26 \cdot 25 =$
 $-9\pi^2 \cdot 25 + 4 \cdot 26 \cdot 25 =$
 $25(9\pi^2 + 4 \cdot 26)$

$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$x + 30y - 46 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{30}x + \frac{46}{30}$
 $(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$
 $x^2 + y^2 = 9$
 $(x+7)^2 + y^2 = 4$
 $x^2 + y^2 = 9$



$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

