



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Штрих QR-кода недостоима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$
Представим

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \alpha_4, \text{ где } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z} \\ b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot \beta_4 \text{ и } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0 \\ c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot \gamma_4 \quad \alpha_4, \beta_4, \gamma_4 \in \{2, 3, 5\}$$

$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, при этом $ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} \cdot \alpha_4 \cdot \beta_4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases} \text{ аналогично } \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \end{cases} \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28,5 \end{cases} \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 54 \end{cases}$$

$\alpha_1 \geq 5 \quad \alpha_1 \geq 5$
 $\beta_1 \geq 3 \quad \beta_1 \geq 3$
 $\gamma_1 \geq 9 \quad \gamma_1 \geq 9$
 $\alpha_2 \geq 8 \quad \alpha_2 \geq 8$
 $\beta_2 \geq 6 \quad \beta_2 \geq 6$
 $\gamma_2 \geq 14 \quad \gamma_2 \geq 14$
 $\alpha_3 \geq 17 \quad \alpha_3 \geq 17$
 $\beta_3 \geq 5 \quad \beta_3 \geq 5$
 $\gamma_3 \geq 22 \quad \gamma_3 \geq 22$
 $\Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 39$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot \alpha_4 \cdot \beta_4 \cdot \gamma_4 \geq$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \cdot \alpha_4 \cdot \beta_4 \cdot \gamma_4 \geq \dots$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

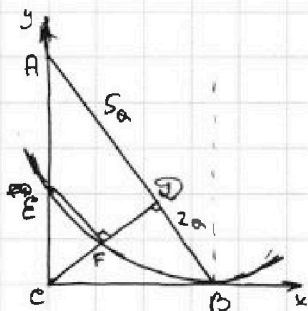
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Введем прямоугольную систему координат: a
 Ox - вдоль CB
 Oy - вдоль CA
 $(0,0)$ - т.с

Ответ: 5, 6

Пусть $AD = 5a$, тогда $DB = 2a$

$$AC^2 = 25a^2 + CD^2$$

$$CB^2 = 4a^2 + CD^2$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 29a^2 + 2CD^2 = 49a^2$$

$$CD^2 = 10a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{35}a \quad BC = \sqrt{14}a$$

Пусть точка $E(0; h)$.

$$y_{AB} = -\frac{\sqrt{35}a}{\sqrt{14}a}x + \sqrt{35}a = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{35}a$$

$$y_{EO} = \sqrt{\frac{2}{5}}x$$

$$y_{EF} = -\sqrt{\frac{5}{2}}x + h$$

т.к. F : $y_{EF} = y_{EO}$
 $-\sqrt{\frac{5}{2}}x + h = \sqrt{\frac{2}{5}}x$

$$x_F = h \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$$

$$y_F = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}} h = \frac{2}{7}h$$

Окр. касается BC в точке $B \Rightarrow$
 центр O лежит на \perp к BC в т. B .
 Пусть $a.O(\sqrt{14}a; R) \Rightarrow R =$

Окр. проходит через $EF \Rightarrow$ т. O
 лежит на перес. \perp EF :

$$y_{OEF} = \sqrt{\frac{2}{5}}x + \frac{h}{2}$$

$$\frac{2}{7}h = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{14}a + \frac{h}{2} = \frac{2}{7}a\sqrt{\frac{7}{5}}a + \frac{h}{2} = R$$

А также $EO = R$:

$$(\sqrt{14}a)^2 + (2\sqrt{\frac{2}{5}}a + \frac{h}{2} - h)^2 = (2\sqrt{\frac{2}{5}}a + \frac{h}{2})^2$$

$$14a^2 + h^2 - 2h(2\sqrt{\frac{2}{5}}a + \frac{h}{2}) = 0$$

$$14a^2 - 4\sqrt{\frac{2}{5}}ah = 0$$

$$h = \sqrt{35}/2 \cdot a = 1/2 AC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35}a \cdot \sqrt{14}a = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10}a^2$$

$$S_{CEEF} = \frac{1}{4} S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{4} a^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEEF}} = \frac{4\sqrt{10}a^2}{5\sqrt{10}/4 a^2} = \frac{28}{5} = 5,6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$x =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

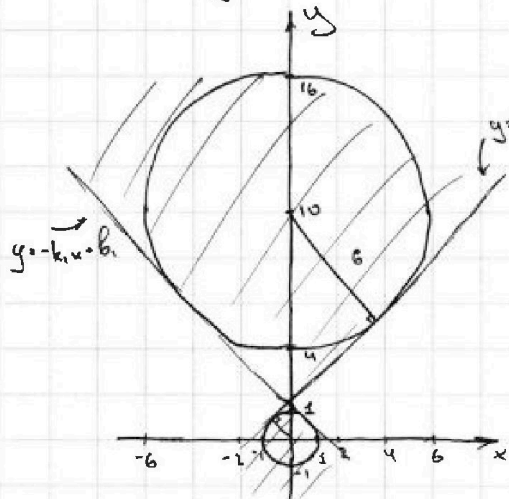
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

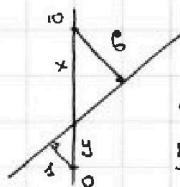
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+84)=0 \\ ax-3y+4b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \vee x^2+(y-10)^2=36 \\ ax-3y+4b=0 \end{cases}$$



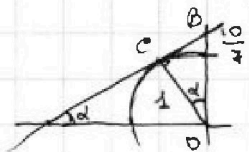
Т.к. $b \in \mathbb{R}$, достаточно, чтобы между коэф. наклона прямой были коэф. наклона касательной, иначе говоря, прямая лежала в заштрихованной области.



из подобия: $\frac{x}{y} = 6$

и $x+y=10 \Rightarrow$

$$\frac{10-y}{y} = 6 \quad \frac{10}{y} = 7 \quad y = \frac{10}{7} \quad x = \frac{60}{7}$$



~~$$be^2 = 1 - 0.6^2 = 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49}$$~~

$$be^2 = OB^2 - 1 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{be}{oe} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

\Rightarrow для второй прямой $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} \in \left(-\frac{\sqrt{51}}{7}, \frac{\sqrt{51}}{7} \right)$$

$$a \in \left(-\frac{3\sqrt{51}}{7}, \frac{3\sqrt{51}}{7} \right)$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{3\sqrt{51}}{7}, \frac{3\sqrt{51}}{7} \right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } 2x > 0 \\ 2x \neq 1$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 5^t$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$t^4 + 3 = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t} \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y \frac{1}{5} - 3$$

$$\text{ОДЗ: } y > 0 \\ y \neq 1$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

$$p = \log_5 y$$

$$p^4 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$$

$$p^4 + 3 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{p} \quad (2)$$

$$xy = \frac{1}{2} 5^t \cdot 5^p = \frac{1}{2} 5^{t+p}$$

Напротив

легко заметить, что при

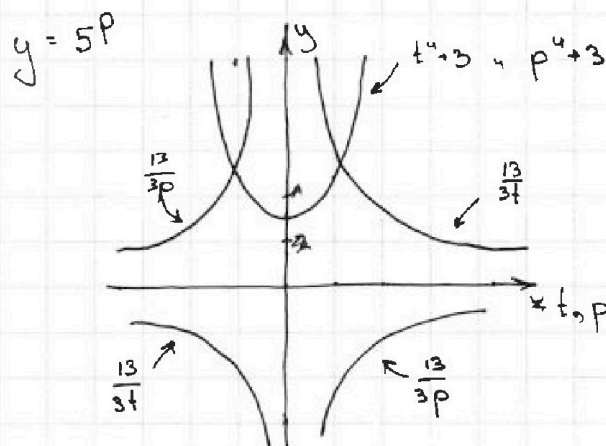
подстановке $-p$, мы получим уравнение относительно t .

Значит если t_1 - решение, то $p_1 = -t_1$ - тоже

решение, тогда $t+p=0$

$$xy = \frac{1}{2} 5^{t+p} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

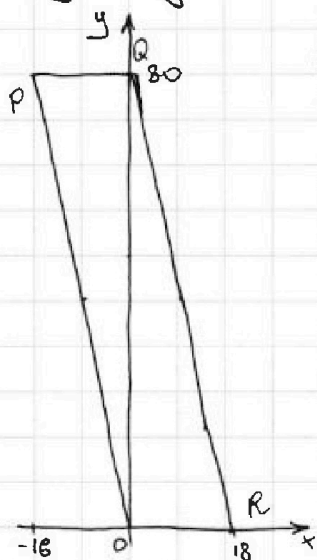
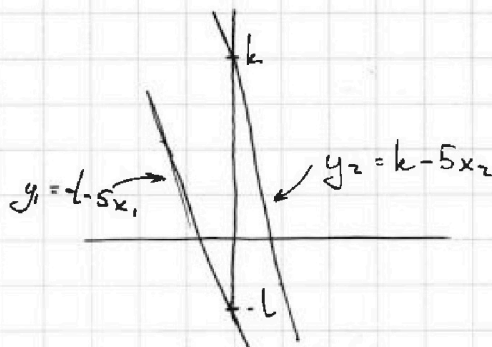
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $5x_2 + y_2 = k$
 $5x_1 + y_1 = -l$, тогда $k+l=45$ ($k \geq l$)

На координатной плоскости:

а для любых k и l ,
решение $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ —
точки лежащие на прямой
 y_1 и y_2 (по графику).



Посмотрим, в каких пределах
может находиться k , чтобы
корни были внутри параллелограмма:

Заметим, что обе боковые стороны
наклонены под углом $\text{tg} \alpha = 5$, как
и наши прямые, следовательно
в край $k \leq$ чем пересечение прямой
QR и Ox или Oy , и $k \geq$ чем пересеч.
прямой PO и $Oy + 45$.

Ито есть $k \in [45; 90]$

~~при $k=90$ на $y \in [0, 80]$ лежит 16 точек с целыми координ.~~

При $k:5$ ($\Rightarrow l:5$) кол-во точек с целыми коор. — 16,
таких k — 10. При $k \neq 5$ ($\Rightarrow l \neq 5$) — кол-во точек — 15.
Посчитаем кол-во пар с целыми координ. (точек):

$$10 \cdot 16 \cdot 16 + 36 \cdot 15 \cdot 15 = 1560 + 8100 = 9660$$

При $k < l$ точки A и B меняются местами.

Ответ: 9660

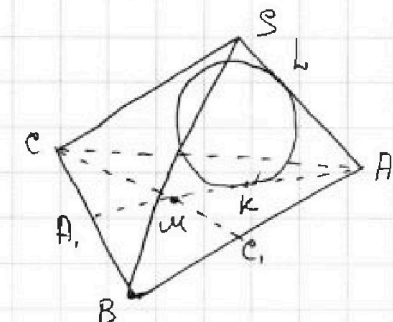
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

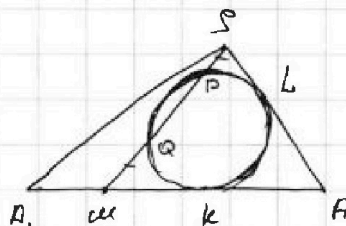
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Ответ: а) 3600

Рассмотрим напр. сечение A_1SA :



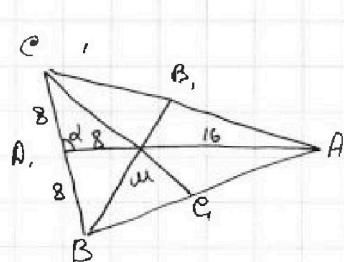
По свойству секущей и касательной:

$$\begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot (SP + PQ) \\ MQ^2 &= MQ \cdot (MQ + PQ) \end{aligned} \Rightarrow \text{т.к. } SP = MQ, \text{ то } SL = MQ$$

(в случае расположения P, Q наоборот: $SL^2 = SQ \cdot (SQ + PQ)$ и $MQ^2 = MP \cdot (MP + PQ)$ - аналогично $SL = MQ$)

$AL = AK$ - отрезки касат. $\Rightarrow AM = AS = 18$

Рассмотрим основание:



$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow AM = 8, \text{ пусть } \alpha = \angle CA_1A, \text{ тогда}$$

$$S_{AA_1C} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AA_1B} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin(180 - \alpha) = S_{AA_1C}$$

$$S_{ABC} = 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 100 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{25}{48} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$$

$$\text{По т. кос: } CM^2 = 64 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 2 \cdot 64 \left(1 - \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right)$$

$$\text{т.к. } BM^2 = 64 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 2 \cdot 64 \left(1 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right)$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot BM \cdot \frac{3}{2} \cdot CM \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 64 \cdot \left(1 - \frac{23 \cdot 73}{48^2} \right) = 54 \cdot 128 \cdot \frac{25}{48} = 3600$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

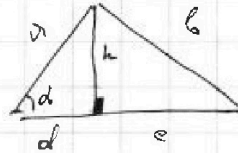
$$\frac{1}{1-x}$$

$$x = \pi/6$$

$$\cos x = \sqrt{3}/2$$

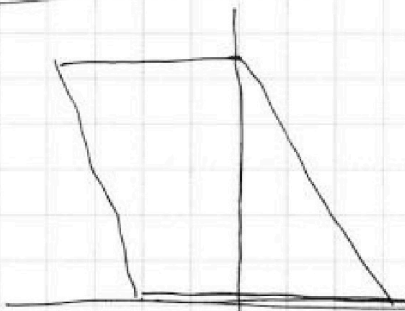
$$\arcsin(\cos x) = \pi/3$$

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{36}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{36 - \pi^2}}$$

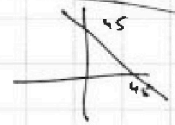


$$\cos d = \frac{d}{b}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



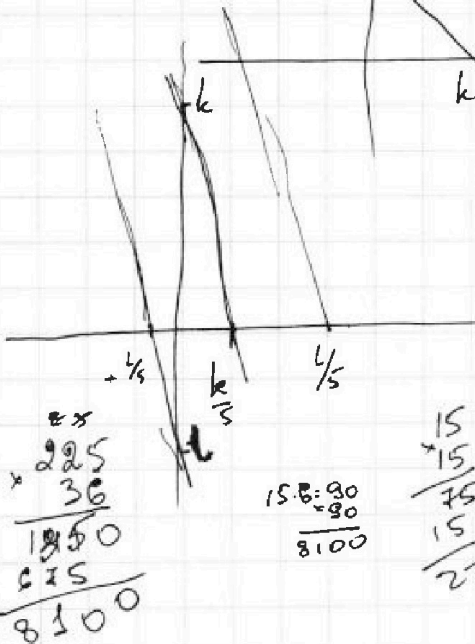
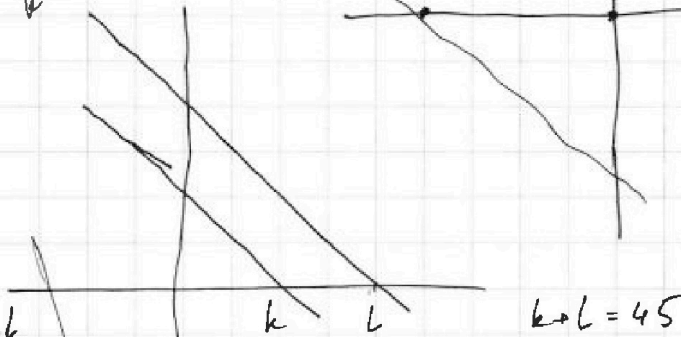
$$x + y = 45$$



$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 45$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = k \\ x_2 + y_2 = l \end{cases}$$

$$k + l = 45$$



$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 98 \\ \hline 18 \\ \hline 158 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 225 \\ 36 \\ \hline 1850 \\ 575 \\ \hline 8100 \end{array}$$

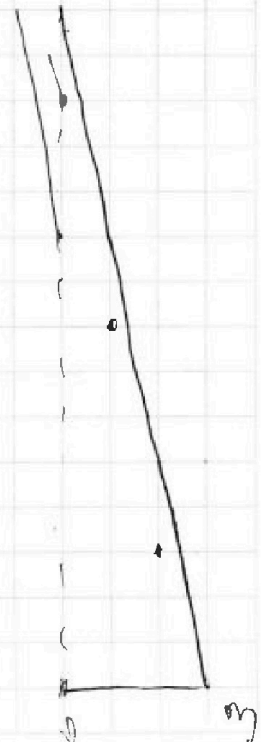
$$15 \cdot 6 = 90$$

$$\frac{90}{8100}$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 75 \\ \hline 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 150 \\ \hline 45 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$58^{12} \cdot 42$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

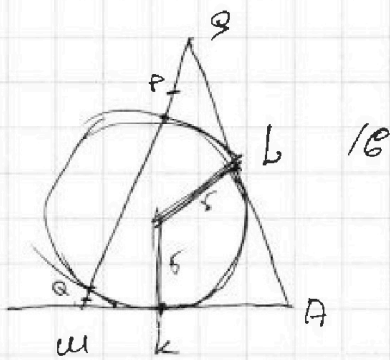
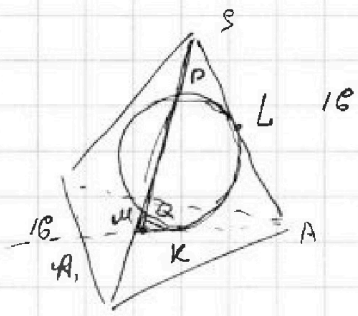
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

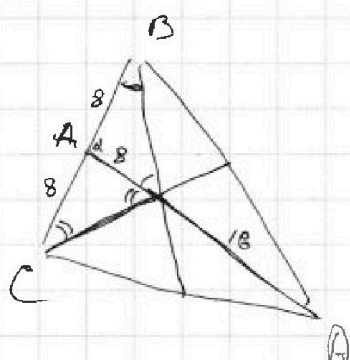


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.



$S_A = S_{MA}$



$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin d$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin(180-d) = \dots \cdot \sin d$

$S_{APC} = 8 \cdot 24 \cdot \sin d = 100$

$48 \sin d = 25$

$\sin d = \frac{25}{48}$

$\cos d = \pm \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$

$48^2 - 25^2 = 23 \cdot 73$

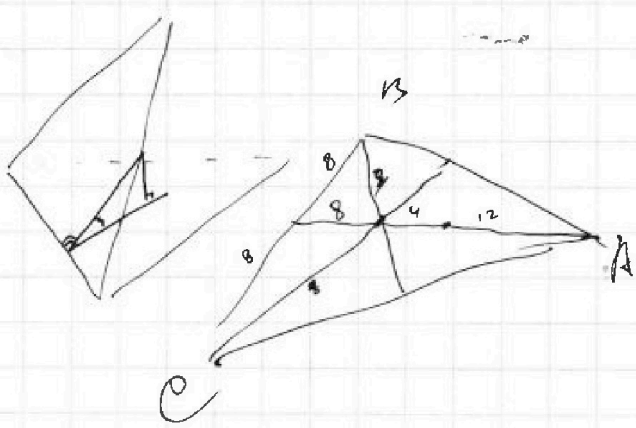
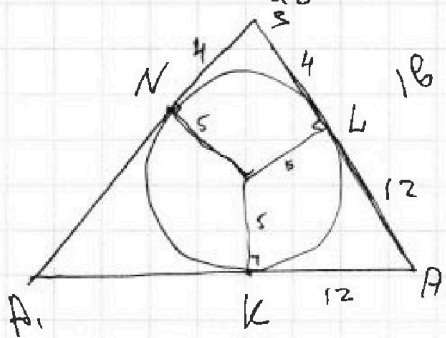
$1 - \frac{25^2}{48^2} = \frac{48^2 - 25^2}{48^2} = \frac{23 \cdot 73}{48^2}$

$0.9 \cdot 2 \cdot 24$

$\frac{0.9 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 24}{\sqrt{23 \cdot 73}}$

$100 \cdot 36$

$\frac{48^2 - (48^2 + 25^2)}{48^2} = \frac{25^2}{48^2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

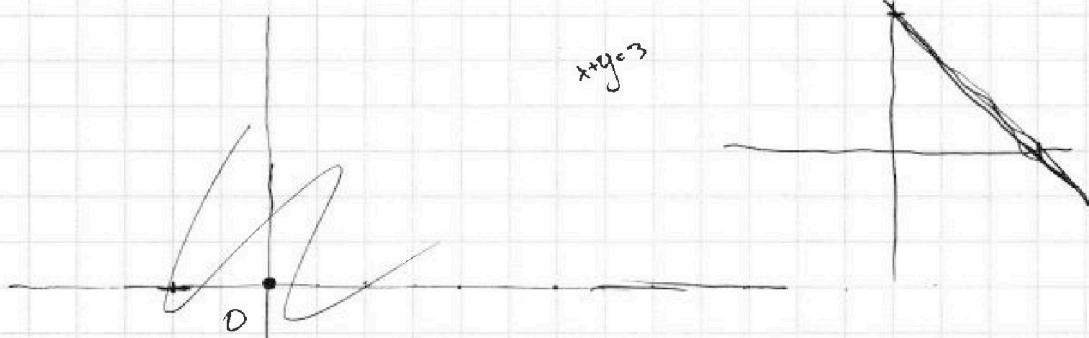
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Понча QR-кода недопустима!

6.

$$x + y = 3$$



$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45 \quad \approx 3 \cdot 2.5$$

$A(x_1, y_1)$
 $B(x_2, y_2)$

x_1 и y_1 - произв.

$$5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 + y_1 \quad \approx 8e$$

$$y_2 = 45 + 5x_1 + y_1$$

$$x_2 = 9 + x_1 + \frac{1}{5}y_1$$

$$y_2 = e$$

$$x_2 = e/5$$

$$y_{гр.} = -5x + e$$

$$y_{гр.} = -5x + 45 + 5x_1 + y_1$$

или $\begin{cases} x=0 & y=0 \\ y=90 \end{cases}$

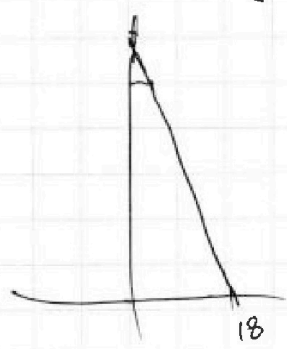
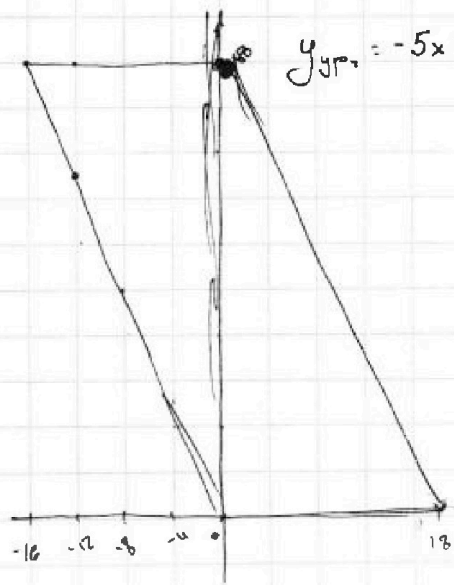
$$45 + 5x_1 + y_1 \in [0; 90]$$

$$5x_1 + y_1 \in [-45; 45]$$

$$y_{гр.} = -5x + \frac{a-45}{90} \cdot 45$$

$$y = -5x + e$$

80



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

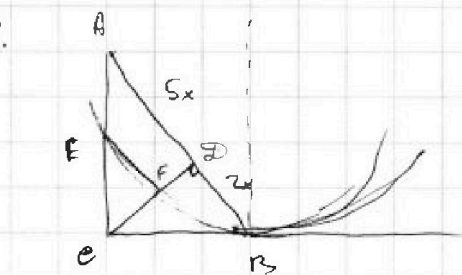
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

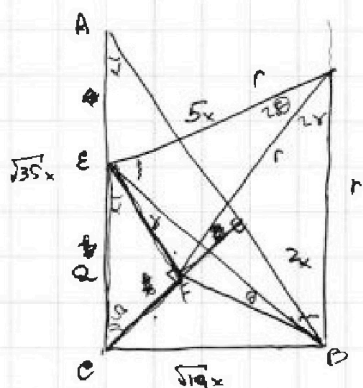


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$
 $a \geq 12$
 $x \geq 17$
 $a + x \geq 39$

$\therefore d_1 + \beta \geq 14$
 $\beta + x \geq 20$
 $a + x \geq 22$
 $d + \beta + x \geq 28$
 $d \geq 8 \quad \beta \geq 6 \quad x \geq 14$



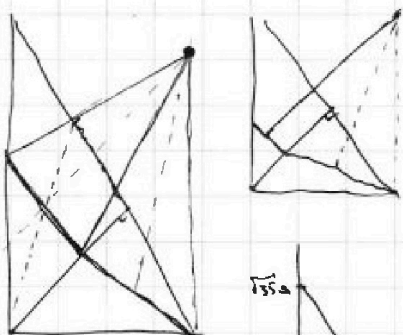
$OE = a$
 $\frac{\sqrt{5}a}{5} = \frac{a}{EF}$
 $EF = \frac{5a}{\sqrt{5}}$
 $CF = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}}$

~~$AE^2 = 25x^2 + h^2$~~
 ~~$BE^2 = 4x^2 + h^2$~~
 ~~$4a^2 = AE^2 + BE^2 = 29x^2 + 2h^2$~~
 $AE^2 = 25x^2 + h^2$
 $BE^2 = 4x^2 + h^2$
 $20x^2 = h^2$
 $h^2 = 20x^2$
 $AE^2 = 35x^2$
 $BE^2 = 14x^2$

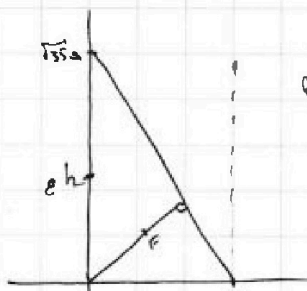
$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$

~~$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}a^2}{4\sqrt{5}}$~~
 $S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}a^2}{35} = \frac{110}{7} a^2 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}a \cdot \sqrt{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}x^2 \cdot \frac{1}{2}$



20
8



$y_{AO} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x + \sqrt{5}a = \sqrt{\frac{5}{2}}x + \sqrt{5}a$
 $y_{EO} = \sqrt{\frac{2}{5}}x$
 $O(\frac{\sqrt{14}a}{5}, h)$

$EO^2 = 14a^2 + (h-y)^2 = h^2$
 $14a^2 + y^2 - 2yh = 0$
 $EO^2 = 14a^2 + (t-h)^2 = t^2$
 $14a^2 + h^2 - 2ht = 0$
 $t = \frac{14a^2 + h^2}{2h}$

$y_{EF} = -\sqrt{\frac{5}{2}}x + h$
 $F: -\sqrt{\frac{5}{2}}x + h = \sqrt{\frac{2}{5}}x$
 $\sqrt{\frac{2}{5}}x + \sqrt{\frac{5}{2}}x = h = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}c}{110}$
 $x = h \cdot \frac{110}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$
 $y = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{7} h = \frac{2}{7} h$

$FO^2 = (\sqrt{14}a - \frac{\sqrt{10}}{7}h)^2 + (\frac{2}{7}h)^2 = 4^2$
 $14a^2 + \frac{10}{49}h^2 - \frac{2\sqrt{10}\sqrt{14}}{7}ah + \frac{26}{49}h^2 - \frac{4h}{7} \cdot \frac{14a^2 + h^2}{2h} = 0$
 $6a^2 + \frac{26}{49}h^2 - \frac{4\sqrt{5}}{7}ah = 0$

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}a \cdot 5a$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

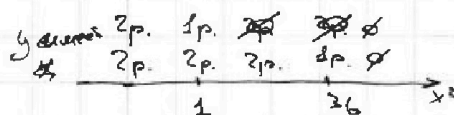
1. a, b, c :
 $ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$
 $bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$
 $ac : 2^{14} 3^{24} 5^{39}$

$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$
 $b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$
 $c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$

$a_1 + b_1 \geq 8$ $a_2 + b_2 \geq 14$ $a_3 + b_3 \geq 12$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 $b_1 + c_1 \geq 12$ $b_2 + c_2 \geq 20$ $b_3 + c_3 \geq 17$
 $c_1 + a_1 \geq 14$ $a_2 + c_2 \geq 24$ $a_3 + c_3 \geq 39$

$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 34$ $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 58$ $+ \geq 68$
 $a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$ $a_2 + b_2 + c_2 \geq 29$ 34
 $a_2 \geq c_2 \geq 9$ 29 $c_2 \geq 9$
 $a_1 + b_1 + c_1 + 8 + 9 \geq 17$ $15 \quad 9 \quad 8 \geq 17$ $22 + 20 + 14 = 56$
 $8 \quad 4 \quad 5$ 29

2. $ax - 3y + 4b = 0$
 $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 36) = 0$



$x^2 + y^2 - 1 = 0$
 $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$
 или \emptyset при $x^2 > 1$

$x^2 + y^2 - 20y + 36 = 0$
 $x^2 + (y - 10)^2 - 36 = 0$
 $y = 10 \pm \sqrt{36 - x^2}$
 или \emptyset при $x^2 > 36$

a-кайти
 b-кайгетед

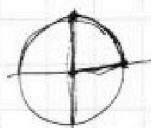
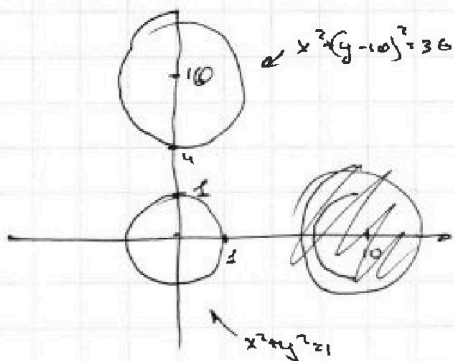
$ax - 3y + 4b = 0$
 $ax - 3y$

$y = \frac{ax + 4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

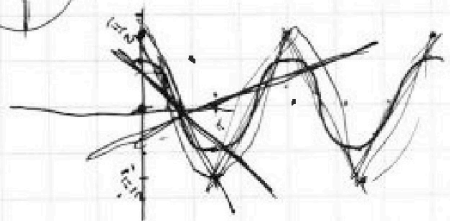
$\arcsin(\cos x)$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{36}}}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}$
 $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$



$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$



$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$\cos x = b/c$
 $\arcsin(b/c) = \alpha$
 $\sin \alpha = b/c$
 $\arcsin \alpha = \frac{\pi}{2} - x$

7
 10
 12.5

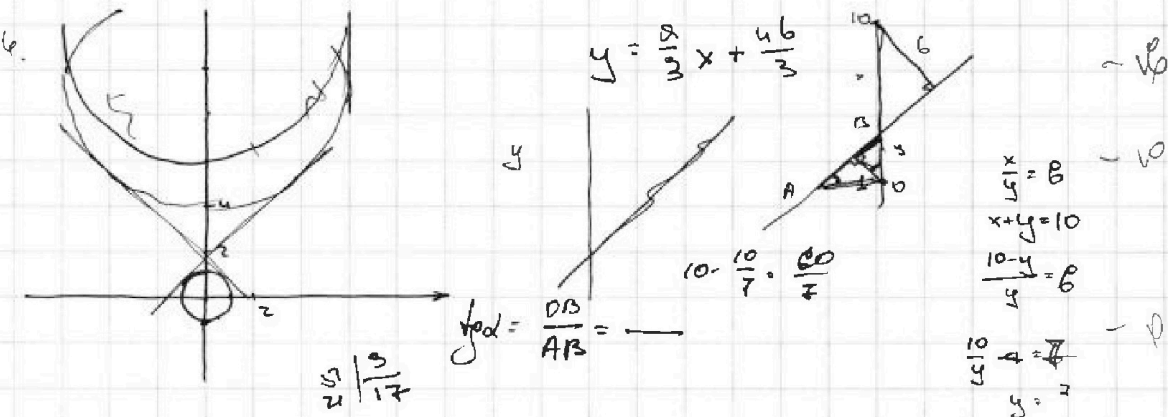
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



5. $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x^4}5 - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \frac{1}{t} - 3$

$t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t \quad \vee \quad \log_5 2x = 0$
 $t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \quad x = \frac{1}{2} \quad \cancel{\neq}$

$t^4 + 3 = \frac{13}{3} - \frac{1}{t}$

$\log_8 8^{1/3} = \log_8 2 = 2$
 $\frac{1}{3} \log_2 64 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$
 $\log_{2^3} 8 = \frac{1}{2}$

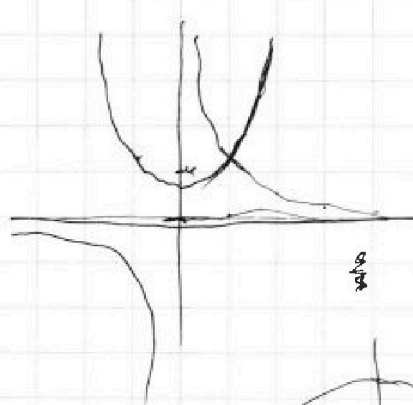
$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{2} - 3$

$\log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3$

$p^4 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$

$p^5 + \frac{13}{3} + 3p = 0$

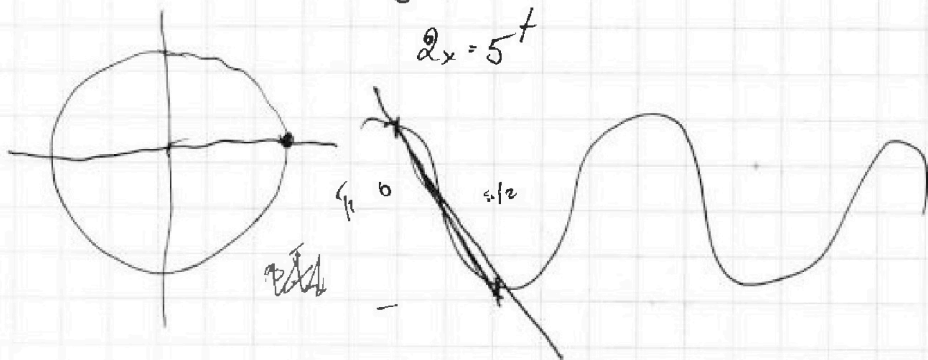
$p^4 + 3 = \frac{13}{3} - \frac{1}{p}$



$t = -p$
 $xy = \log_5 2x \cdot \log_5 y = t \cdot p = -t^2$

$\log_5 2x = t$

$2x = 5^t$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

