



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b , с таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длии медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

Представим

$$a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot d_4, \quad \text{такие } d_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot \beta_4 \quad \text{и } d_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot \gamma_4 \quad d_4, \beta_4, \gamma_4 \neq 2, 3, 5$$

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, \quad \text{при этом } ab: 2^{d_1+\beta_1} \cdot 3^{d_2+\beta_2} \cdot 5^{d_3+\beta_3} \cdot d_4 \cdot \beta_4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ d_2 + \beta_2 \geq 14 \\ d_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases}$$

аналогично

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 24 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

Решим системы:

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \end{cases}$$

$$d_1 \geq 8 \quad d_1 \geq 5$$

$$\beta_1 \geq 3 \quad \beta_1 \geq 3$$

$$\gamma_1 \geq 9 \quad \gamma_1 \geq 9$$

$$\begin{cases} d_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 24 \\ d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28,5 \end{cases}$$

$$d_2 \geq 8 \quad d_2 \geq 8$$

$$\beta_2 \geq 6 \quad \beta_2 \geq 6$$

$$\gamma_2 \geq 14 \quad \gamma_2 \geq 14$$

$$d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$$

$$\begin{cases} d_3 + \beta_3 \geq 12 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 39 \\ d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 34 \end{cases}$$

$$d_3 \geq 6 \quad d_3 \geq 14$$

$$\beta_3 \geq 5 \quad \beta_3 \geq 5$$

$$\gamma_3 \geq 22 \quad \gamma_3 \geq 22$$

$$d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 39$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{d_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{d_2+\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{d_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot d_4 \cdot \beta_4 \cdot \gamma_4 \geq$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \cdot d_4 \cdot \beta_4 \cdot \gamma_4 \Rightarrow \text{наименее}$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

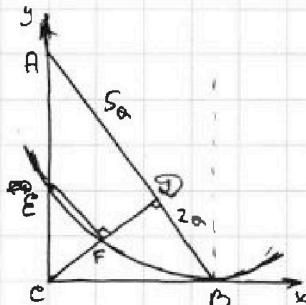
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Введем прямоугольную систему координат:
 Ox - вдоль CB
 Oy - вдоль CA
 $(0,0)$ - E

Омбем: 5,6

Пусть $AE = 5a$, тогда $EB = 2a$

$$AC^2 = 25a^2 + CB^2$$

$$CB^2 = 4a^2 + CD^2$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 25a^2 + 2CD^2 = 49a^2$$

$$CD^2 = 10a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{35}a \quad BC = \sqrt{14}a$$

Пусть точка $E(0; h)$.

$$y_{AB} = \frac{\sqrt{35}a}{\sqrt{14}a} x + \sqrt{35}a = \sqrt{\frac{5}{2}} x + \sqrt{35}a$$

$$y_{CD} = \sqrt{\frac{2}{5}} x$$

$$y_{EF} = -\sqrt{\frac{5}{2}} x + h$$

$$\therefore F: y_{EF} = y_{CD}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}} x + h = \sqrt{\frac{2}{5}} x$$

$$x_F = h \cdot \frac{2\sqrt{10}}{17}$$

$$y_F = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{17} h = \frac{2}{17} h$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35}a \cdot \sqrt{14}a = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{10}a^2$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{4} a^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5\sqrt{10}/4} = \frac{28}{5} = 5,6$$

Окр. ищется в $\angle B \Rightarrow$
 центр О лежит на \perp к BC $b \perp B$.
 Пусть $a, 0 (\sqrt{14}a; R)$ \Rightarrow

Окр. проходит через $EF \Rightarrow +, 0$
 лежит на \perp к EF :

$$\text{Черн.} = \sqrt{\frac{2}{5}} x + \frac{h}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} x + \frac{h}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{14}a + \frac{h}{2} = \frac{2}{5} \sqrt{14}a + \frac{h}{2} = R$$

И так же $EF = R$:

$$(\sqrt{14}a)^2 + (2\sqrt{\frac{2}{5}}a + \frac{h}{2} - h)^2 = (2\sqrt{\frac{2}{5}}a + \frac{h}{2})^2$$

$$14a^2 + h^2 - 2h(2\sqrt{\frac{2}{5}}a + \frac{h}{2}) = 0$$

$$14a^2 - 4\sqrt{\frac{2}{5}}h = 0$$

$$h = \sqrt{35}/2 \cdot a = \frac{1}{2} AC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10(\pi/2 - x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$x =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

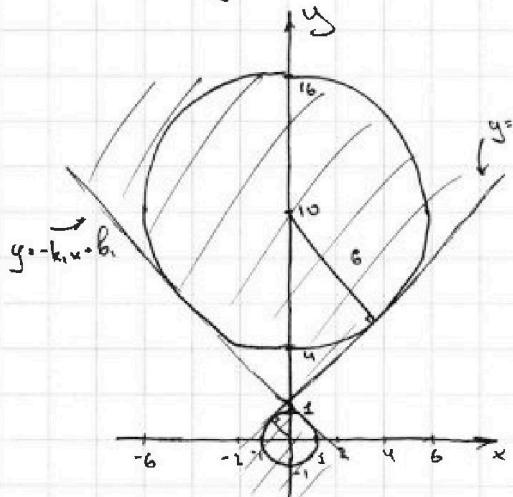
МФТИ



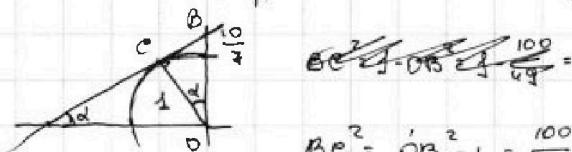
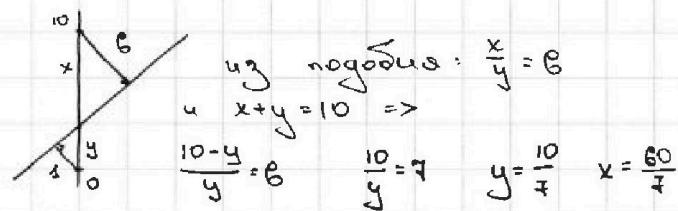
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 84) = 0 \\ 8x - 3y + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \vee \\ 8x - 3y + 4b = 0 & y = \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}b \end{cases}$$



Т.к. $b \in \mathbb{R}$, достаточно, чтобы коэффициент наклона прямой был отличен от нуля, иначе говоря, прямая не должна лежать в одних из координатных осей.



$$BE^2 = OB^2 - 1^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$$

$$\tan \alpha = \frac{BE}{OE} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in \left(-\frac{\sqrt{51}}{7}, \frac{\sqrt{51}}{7} \right)$$

$$\alpha \in \left(-\frac{3\sqrt{51}}{7}, \frac{3\sqrt{51}}{7} \right)$$

для второй прямой $\tan \alpha_2 = -\frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $\alpha \in \left(-\frac{3\sqrt{51}}{7}, \frac{3\sqrt{51}}{7} \right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5(2x) - 3\log_{5x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$$

ОДЗ: $2x > 0$

$2x \neq 1$

$$\log_5(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 5^t$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$t^4 + 3 = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t} \quad (1)$$

$$\log_5 y + 4 \log_5 5 = \log_y \frac{1}{5} - 3$$

ОДЗ: $y > 0$

$y \neq 1$

$$\log_5 y + \frac{4}{\log_5 y} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

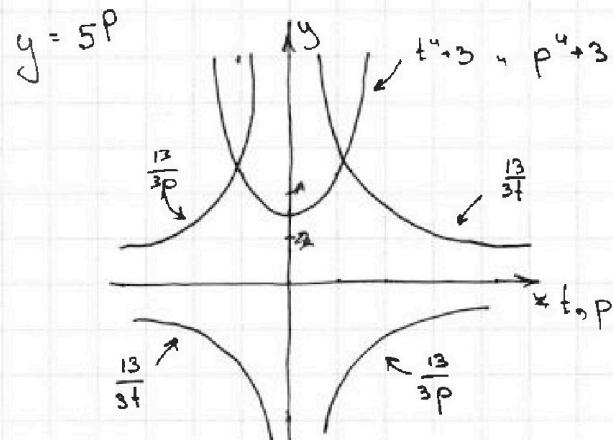
$$p = \log_5 y$$

$$p^4 + \frac{4}{p} = \frac{-1}{3p} + 3$$

$$p^4 + 3 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{p} \quad (2)$$

$$xy = \frac{1}{2} 5^t \cdot 5^p = \frac{1}{2} 5^{t+p}$$

Несправедливо



Легко заметить, что при

подстановке $-p$, мы получим уравнение относительно t .

Значит если t_1 - решение, то $p = -t_1$ - тоже

решение, тогда $t + p = 0$

$$xy = \frac{1}{2} 5^{t+p} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть

$$5x_2 + y_2 = k$$

$$5x_1 + y_1 = -l, \text{ тогда } k + l = 45.$$

g ($k > l$)

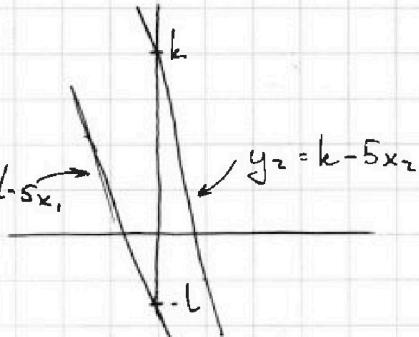
На координатной плоскости:

а для любых k и l ,

решение $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ —

точки лежащие на прямых

y_1 и y_2 (по зеркально).



Посмотрим, в каких пределах
может находиться k , чтобы
корни были внутри параллелограмма.

Заметим, что обе боковые стороны
параллелограмма под углом $\tan \alpha = 5$, как
и наше прямые, следовательно
~~точек~~ $k \leq$ чем пересечение прямой
QR с осью Oy, и $k \geq$ чем пересеч.
прямой PR с Oy + 45.

Итак $k \in [45; 90]$

~~поскольку~~ $y \in [0, 80]$ лежит 10 точек с целыми коорд.

При $k : 5 (\Rightarrow l : 5)$ кол-во точек с целыми коор. - 16,
таких $k = 10$. При $k / 5 (\Rightarrow l / 5)$ - кол-во точек - 15.
Посчитали кол-во пар с целыми коордн. (точек),

$$10 \cdot 16 \cdot 16 + 36 \cdot 15 \cdot 15 = 1560 + 8100 = 9660$$

При $k < l$ точки A и B меняются местами.

Ответ: 9660



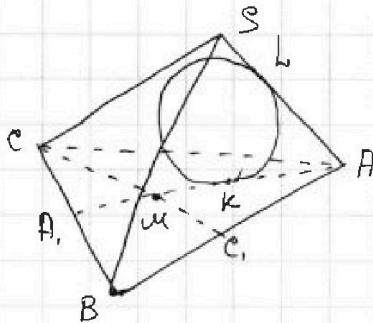
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

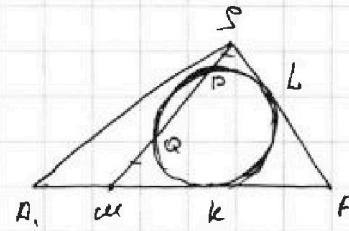
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Отвѣт: а) 3600



Рассмотрим на сечение A, SA' :

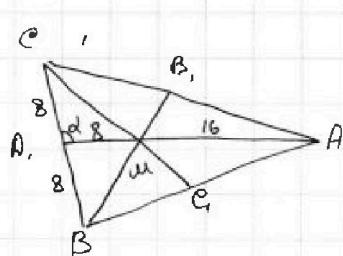
По свойству секущей и касательной:

$$SL^2 = SP \cdot (SP + PQ) \quad | \Rightarrow \quad SP = MK, \quad SL = MK \\ MK^2 = MQ \cdot (MQ + PQ)$$

(б) такое расположение P, Q наоборот: $SL^2 = SQ \cdot (SQ + PQ)$ -
аналогично $SL = MK$)

$$AL = AK \text{ - отрезки кас.} \Rightarrow AL = AS = 18$$

Рассмотрим основание:



$$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{1} \Rightarrow A, M = 8, \text{ where } \alpha = \angle CA, P, \text{ т.к.}$$

$$S_{AA'C} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AA'B} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin(180 - \alpha)$$

$$S_{ABC} = 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 192 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{25}{48} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{23 \cdot 73}{48}}$$

$$\text{По } \gamma \cos: \text{Cell}^2 = 64 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 8 \cdot 64 \left(1 - \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right)$$

$$\text{т. } Bll^2 = 64 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 2 \cdot 64 \left(1 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right)$$

$$AA' \cdot BB' \cdot CC' = 24 \cdot Bll \cdot \frac{3}{2} \cdot Cll \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 64 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right) = 54 \cdot 128 \cdot \frac{25}{48} = 3600$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



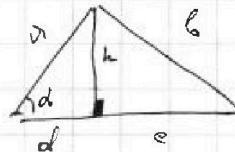
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

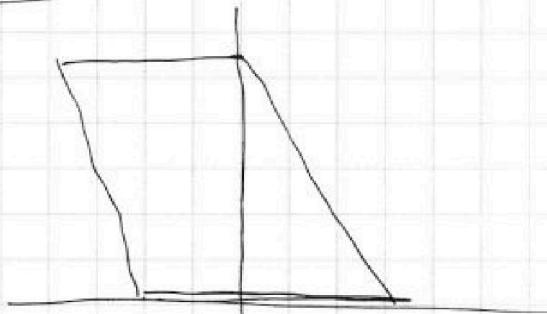
$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{1}{1-x}$$

$$\sqrt{\frac{36 - \frac{\pi^2}{6}}{36}} = \sqrt{\frac{36 - \pi^2}{216}}$$



$$x = \frac{\pi}{6} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{6} \\ \frac{d}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d}{6} \\ \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-x^2 = \frac{3}{4} \\ x^2 = \frac{1}{4} \quad x = \frac{1}{2}$$



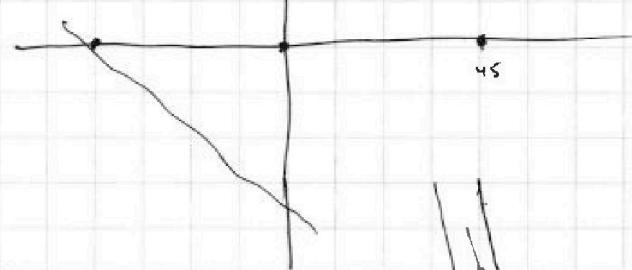
$$x+y=45$$



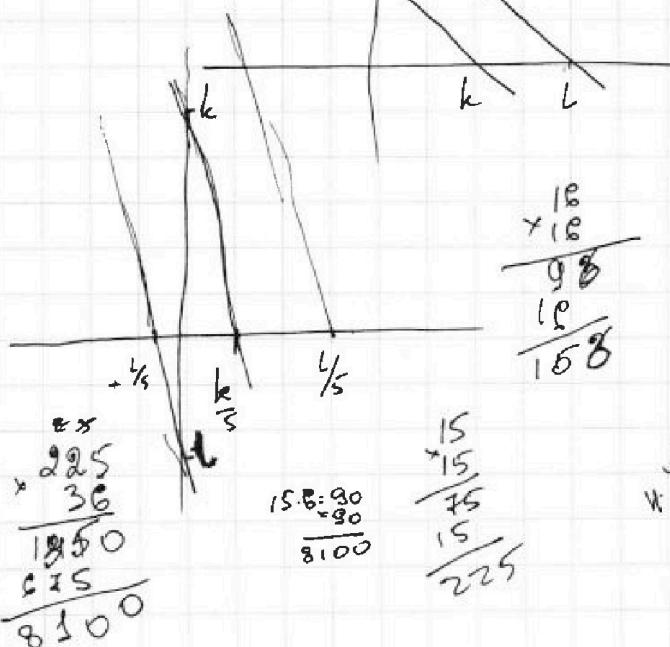
$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 45$$

$$x_1 + y_1 = k \\ x_2 + y_2 = l$$

$$k+l=45$$



$$k+l=45$$



$$\frac{18}{98} \\ \cancel{\frac{18}{98}} \\ \frac{18}{158}$$

$$\cancel{\frac{18}{158}} \\ \cancel{\frac{18}{158}} \\ \cancel{\frac{18}{158}} \\ \cancel{\frac{18}{158}}$$

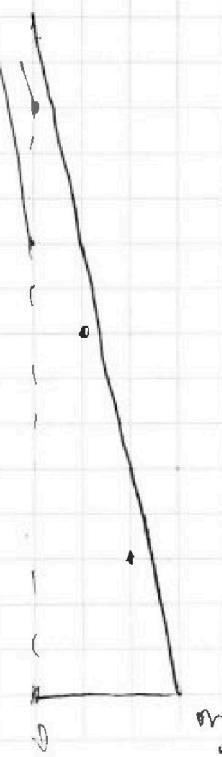
$$38$$

$$45^\circ$$

$$5^\circ$$

$$45^\circ$$

$$45^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

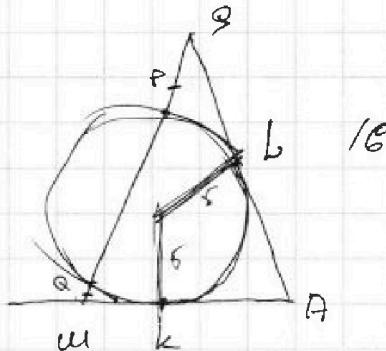
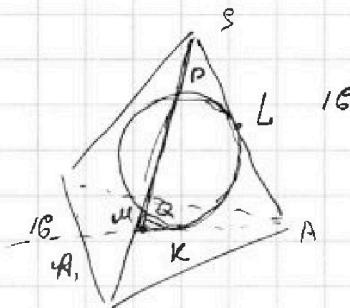


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

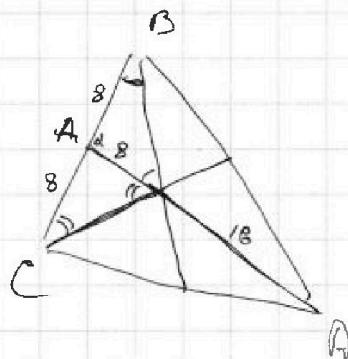
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.



+



$$S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 24 \cdot \sin(180 - \alpha) = \dots \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABC} = 8 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 100$$

$$48 \sin \alpha = 25$$

$$\sin \alpha = \frac{25}{48} \quad \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$$

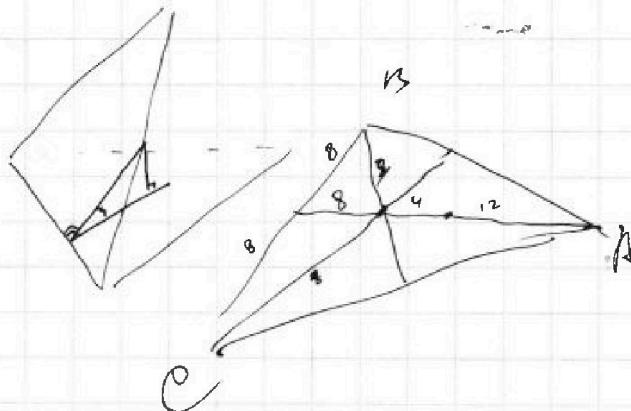
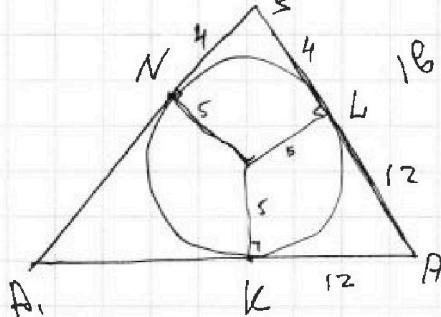
$$48^2 - 25^2 = 23 \cdot 73$$

$$\cancel{8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 100}^{24} \\ \cancel{100}^{100}$$

$$f = \frac{25^2}{48^2} = \frac{48^2 - 25^2}{48^2} = \frac{23 \cdot 73}{48^2}$$

$$6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 100$$

$$\frac{48^2 - (48^2 + 25^2)}{48^2} = \frac{25^2}{48^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

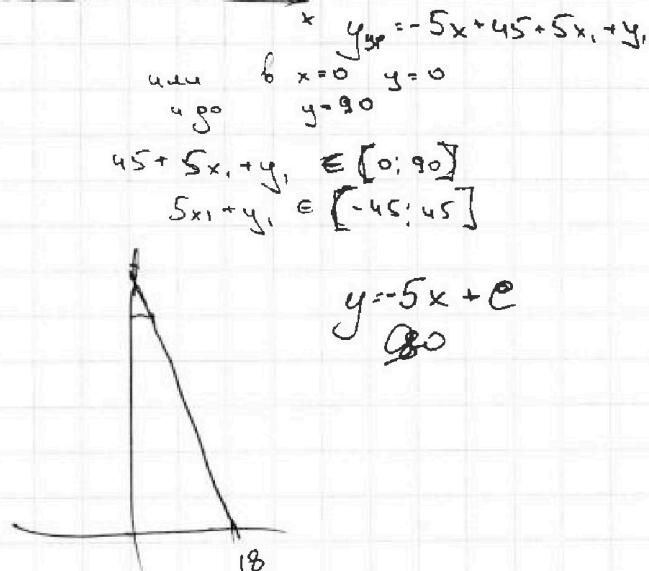
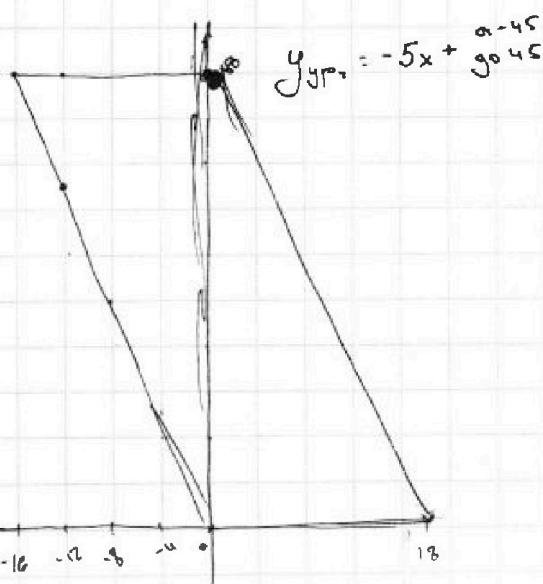
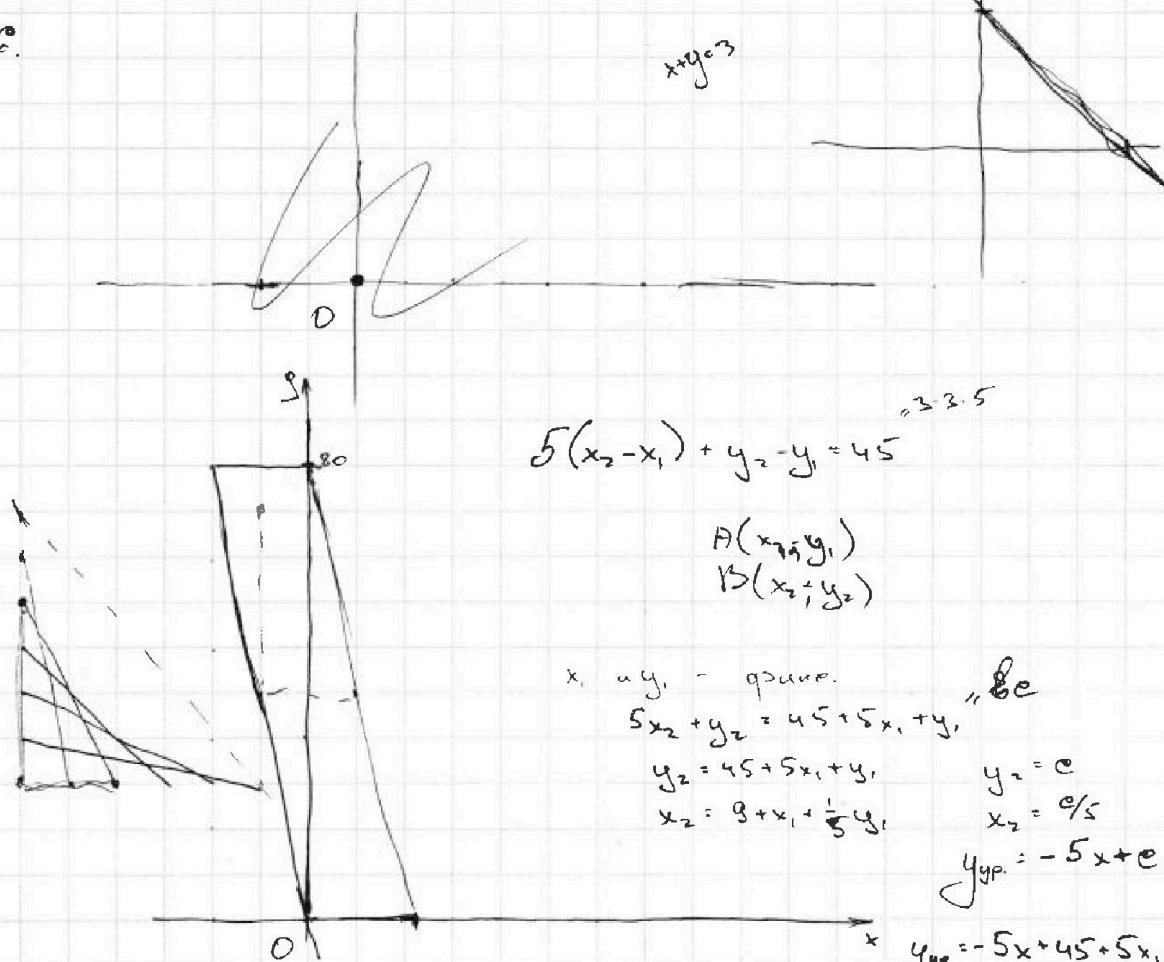


- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

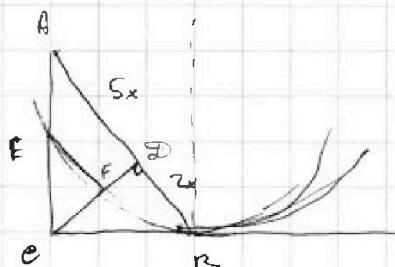


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



$$AB \parallel EF$$

$$d \geq 12$$

$$x \geq 17$$

$$d + x \geq 39$$

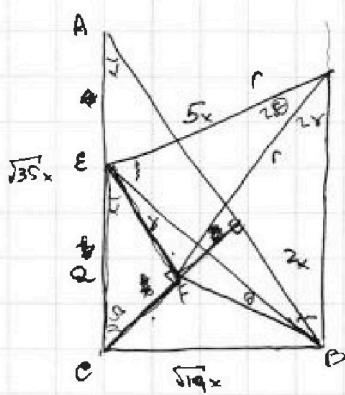
$$\beta + \gamma \geq 14$$

$$\gamma + x \geq 20$$

$$\alpha + x \geq 22$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 28$$

$$d \geq 8 \quad \beta \geq 6 \quad x \geq 14$$



$$CE = d$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{5} = \frac{d}{EF}$$

$$EF = \frac{5d}{\sqrt{5}}$$

$$CF = \frac{\sqrt{10}d}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{5}}$$

$$AC^2 = 25x^2 + h^2$$

$$BD^2 = 4x^2 + h^2$$

$$4x^2 + AC^2 = BD^2$$

$$4x^2 = 20x^2 + 2h^2$$

$$20x^2 = h^2$$

$$h^2 = AC^2 = 35x^2$$

$$BE^2 = 14x^2$$

$$AE^2 = 25x^2 + h^2$$

$$CE^2 = 4x^2 + h^2$$

$$4x^2 + CE^2 = BE^2$$

$$20x^2 = h^2$$

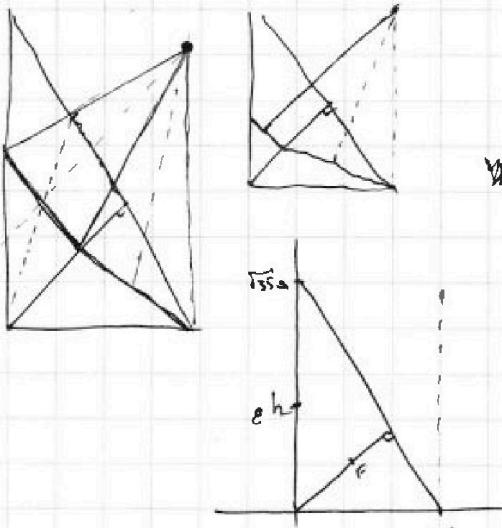
$$h^2 = AE^2 = 35x^2$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}d}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}d^2}{25}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}x^2}{35} = \frac{\sqrt{10}}{7}x^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{ABCE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}x \cdot \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{10}x^2}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



* 20
8

$$y_{AB} = \frac{\sqrt{5}}{14}x + \sqrt{35}x = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{35}x$$

$$y_{CD} = \sqrt{\frac{2}{5}}x \quad 2 \sqrt{17} \sqrt{5}$$

$$D(\sqrt{14}x, \sqrt{5}x)$$

2 4

$$CO^2 = 14x^2 + (\sqrt{5}x - h)^2 = h^2$$

$$14x^2 + 5x^2 - 2\sqrt{5}hx + h^2 = h^2$$

$$CO^2 = 14x^2 + (t - h)^2 = t^2$$

$$14x^2 + h^2 - 2ht + t^2 = t^2$$

$$t = \frac{14x^2 + h^2}{2h}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}x \cdot 5x$$

$$y_{CEF} = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + h$$

$$F: -\frac{\sqrt{5}}{2}x + h = \frac{\sqrt{2}}{5}x$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}x = h \Rightarrow \frac{14+2\sqrt{5}}{10}x = h$$

$$x_F = h \cdot \frac{\sqrt{10}}{7}$$

$$y_F = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{7}h = \frac{2\sqrt{2}}{7}h$$

$$FO^2 = \left(\sqrt{14}x - \frac{\sqrt{10}}{7}h\right)^2 + h^2$$

$$+ \left(t - \frac{4}{7}h\right)^2 = t^2$$

$$14x^2 + h^2 - \frac{2\sqrt{10}\sqrt{4}}{7}ah +$$

$$+ \frac{26}{49}h^2 - \frac{4h}{7} \cdot \frac{\sqrt{10}\sqrt{4}}{7}ah$$

$$14x^2 + \frac{26}{49}h^2 - \frac{4\sqrt{55}}{7}ah - \frac{4}{7}(14x^2)h$$

$$6x^2 - \frac{2}{49}h^2 - \frac{4\sqrt{55}}{7}ah = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. a, b, e :

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$be : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} 3^{24} 5^{39}$$

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 8$$

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$a_3 + b_3 \geq 12$$

$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$b_1 + c_1 \geq 12$$

$$b_2 + c_2 \geq 20$$

$$b_3 + c_3 \geq 17$$

$$\cancel{b_3 \geq 20}$$

$$c_1 + a_1 \geq 14$$

$$a_2 + c_2 \geq \cancel{29}$$

$$a_3 + c_3 \geq 39$$

$$\cancel{c_3 \geq 29}$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 34$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$$

$$c_1 + c_2 \geq 9$$

$$a_1 b_1 + a_2 c_1 + b_2 c_1 + a_3 c_2 \geq 17$$

$$2(a_1 + b_1 + c_2) \geq 68$$

$$a_1 + b_1 + c_2 \geq 33$$

$$29$$

$$15 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \\ 8 \quad * \quad 5$$

$$+ \geq 68$$

$$34$$

$$c_2 \geq 0$$

$$\cancel{\sqrt{2}} \\ \cancel{\sqrt{2}}$$

$$22 + 20 + 14 = 56$$

$$29$$

2. $ax - 3y + 4b = 0$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm \sqrt{1-x^2}$$

или \varnothing при $x^2 > 1$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$ax = 3y$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{36}} = \sqrt{\frac{36-x^2}{36}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{36}}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

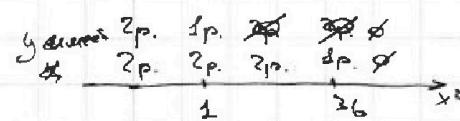
$$x^2 + (y-10)^2 - 36 = 0$$

$$y = 10 \pm \sqrt{36 - x^2}$$

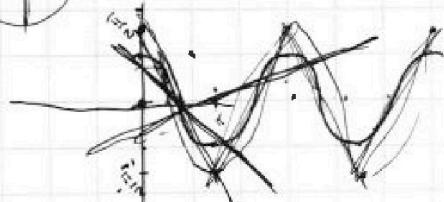
или \varnothing при $x^2 > 36$

a - найди

b - найдется



$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$



$$\cos x = \frac{x}{6}$$

$$\arcsin(\frac{x}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

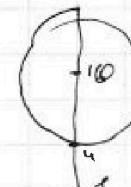
$$\arcsin(\frac{6}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{6}{6}$$

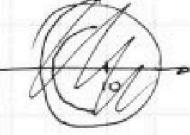
$$\arcsin(\frac{6}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\frac{6}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

$$1$$



$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{7}{6}$$

$$\frac{10}{6}$$

$$\frac{13}{6}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

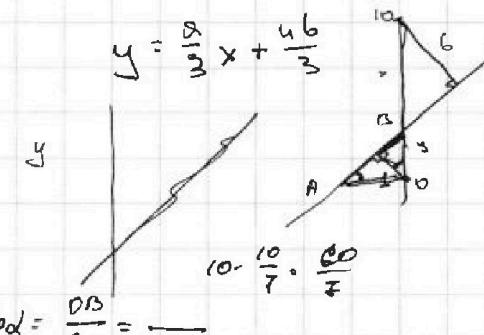
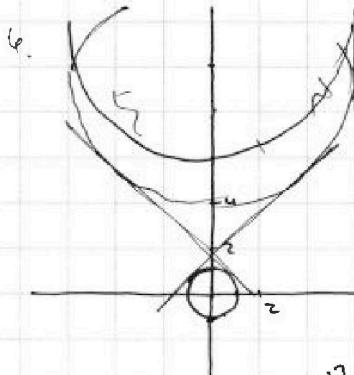
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
- страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sim \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} &= 6 & -10 \\ x+4 &= 10 & x+4 = 10 \\ \frac{10-y}{5} &= 6 & \frac{10-y}{5} = 6 \\ \frac{10}{5} &= 6 & \frac{10}{5} = 6 \\ y &= 2 & y = 2 \end{aligned}$$

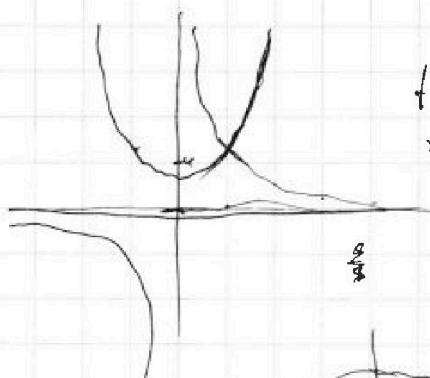
$$5. \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$$

$$\begin{aligned} t^5 - 3t &= \frac{4}{3} - 3t & \checkmark \\ t^5 + 3t - \frac{13}{3} &= 0 & \times \end{aligned}$$

$$t^4 + 3 = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t}$$



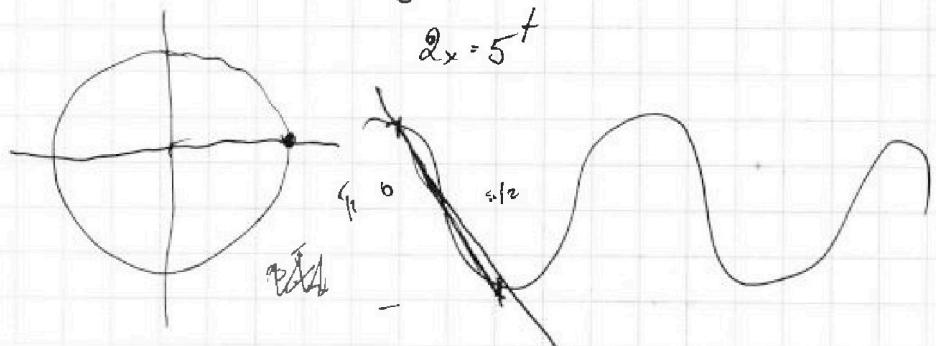
$$\begin{aligned} \log_5^4 y + 4 \log_5 y &= \log_{y^3} 8 \cdot \frac{1}{2} - 3 \\ \log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3 \\ p^4 + \frac{4}{p} &= -\frac{1}{3p} - 3 & \checkmark \\ p^5 + \frac{13}{3} &\neq +3p^0 & p^4 + 3 = \frac{13}{3} \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$xy = \log_5 2x \cdot \log_5 y \quad \cancel{\log_5 xy}$$

$$xy = t \cdot p = -t^2$$

$$\log_5 2x = t$$

$$2x = 5^t$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!