



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) III. K. $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$, то $ab \geq 2^9 3^{10} 5^{10}$. III. K. $bc :$

$: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$, то $bc \geq 2^{14} 3^{13} 5^{13}$. III. K. $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$,

то $ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30}$. И, M.K. $ab, bc, ac > 0$, то:

$ab \times bc \times ac \geq 2^9 3^{10} 5^{10} \times 2^{14} 3^{13} 5^{13} \times 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$(abc)^2 \geq 2^{42} 3^{41} 5^{53}$, то M.K. $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$,

$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ и $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$, то $(abc)^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}$.

2) Заменим, что $(abc)^2$ -квадрат числа \Rightarrow при разложении

на простые множители, каждый множитель будет иметь

целую степень, а M.K. $(abc)^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}$, то $(abc)^2 :$

$2^{42} 3^{42} 5^{54} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} 3^{42} 5^{54}$

$abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{27}$, то $abc : 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

3) Проверим $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$; $ab = 2^{10} 3^{10} 5^{10}$, $bc =$

$= 2^{14} 3^{13} 5^{13}$;

$c = 2^{12} 3^{11} 5^{20} = \frac{abc}{ab}$

$a = 2^{7} 3^{8} 5^{17} = \frac{abc}{bc}$

$b = \frac{ab}{a} = 2^2$

3) Заменим, что если $a = 2^7 3^8 5^{17}$; $b = 2^2 3^3$, $c = 2^{12} 3^{10} 5^{13}$,

то $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$; $ab = 2^9 3^{11} 5^{17} \cdot 2^9 3^6 5^0$; $bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} \cdot 2^{11} 3^{13} 5^{13}$.

$ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} \cdot 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow$ все условия выполнены $\Rightarrow min(abc) = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \quad 5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{10}$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \end{array} \right] \text{(I)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} \end{array} \right] \text{(II)}$$

$$2) \quad (\text{I}) \quad \frac{2}{5}\pi = \frac{6}{5}x$$

$$\underline{\frac{\pi}{3} = x}$$

$$(\text{II}) \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} - \pi = \frac{4}{5}x$$

$$\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{5}x$$

$$-\frac{4\pi}{10} = \frac{4}{5}x$$

$$\underline{x = -\frac{\pi}{2}}$$

3) Проверим полученные значения:

$$(\text{I}) \quad 5 \arcsin(\cos \frac{\pi}{3}) = \cancel{5} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$(\text{II}) \quad 5 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = 0$$

$$5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\underline{\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}}$$

$$5 \arcsin 0 = 0$$

$$\underline{0 = 0}$$

Отвѣт: $x = \frac{\pi}{3}; \quad x = -\frac{\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ - ровно 4 решения.

2) Будем искать a , при которых система имеет
одно b , при котором система имеет ровно 4 решения.

3) $\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$ - упрощаем ур-ия явления плоское
 $R=3$
 $x^2+y^2=9$ - упрощаем ур-ия явления окр-тии с ц. $(0,0)$ и
 $(x-6)^2+y^2=4$ - упрощаем ур-ия явления окр-тии
с ц. $(6,0)$ и $R=2$.

4) Если плоскость с звуком касается концентрических окр-тии
имеет ровно 4 общие точки, то умножим $a \in$
 $\epsilon (-R; R)$, где R -уровень козримости внутренних
касательных. Найдём эти козримости. Если
плоскость касается окр-тии, то f (расстояние) от плоскости
до окр-тии равно радиусу R :

$$\begin{cases} \frac{|3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 3 \\ \frac{|6a-3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9b^2 = 9(a^2+4) \Rightarrow b^2 = a^2 + 4 \\ (6a-3b)^2 = 4(a^2+4) \Rightarrow (6a-3b)^2 = 4b^2 \Rightarrow \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 6a = 5b \Rightarrow b = \frac{6}{5}a \Rightarrow \frac{36}{25}a^2 = a^2 + 4 \Rightarrow \frac{11}{25}a^2 = 4 \Rightarrow \\ 6a = b \Rightarrow 36a^2 - a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{35} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{35}}; b = \frac{12}{\sqrt{35}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = \frac{10}{\sqrt{41}}, b = \frac{12}{\sqrt{41}} \\ a = -\frac{10}{\sqrt{41}}, b = -\frac{12}{\sqrt{41}} \end{cases}$$

5) Но засечки, что $\frac{10}{\sqrt{41}} > \frac{2}{\sqrt{35}} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{41}} - \frac{10}{\sqrt{41}}$ - козр. внутренних касательных.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{41}}, \frac{10}{\sqrt{41}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 8 \quad (I) \\ \log_3^4 5y + 2 \log_3 5y = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \quad (II) \end{cases}$$

$$2) (I) \quad \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad | \times \log_3 X, \log_3 X \neq 0, \\ \text{m.k. } X \neq 1, \text{ a} \\ \log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 x \quad | \times 2 \\ 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 4 = 0$$

$\times 1, \text{ m.k. если}$
 $X=1, \text{ то } \log_3 X \text{ не поделится.}$

$$(II) \quad \log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_3 5y - 8 \quad | \times \log_3 5y \text{ (аналогично)} \\ \text{потому, как мы делали для } \log_3 x \text{ в (I).}$$

$$\log_3^5 5y + 2 - \frac{11}{2} + 8 \log_3 5y = 0 \quad | \times 2$$

$$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0$$

3) Пусть $f(t) = 2t^5 + 16t$. Заметим, что $f(-t) = -f(t)$,
т.к. $f(-t) = 2(-t)^5 + 16(-t) = -(2t^5 + 16t) = -f(t)$. Тогда $f(t) \in \mathbb{R}$.
Тогда заметим, что $f(\log_3 X) = -f(\log_3 5y)$
 $f(\log_3 x) = f(-\log_3 5y)$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\begin{cases} \log_3(5yx) = 0 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5yx = 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{5} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases},$$

$$\text{Одн.р.: } xy = \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

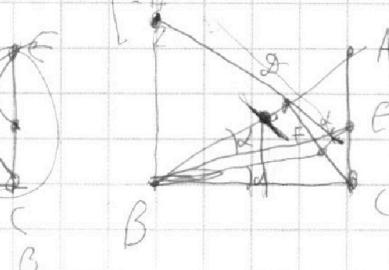
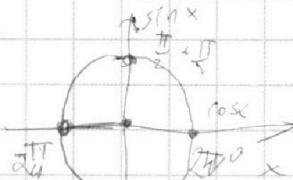
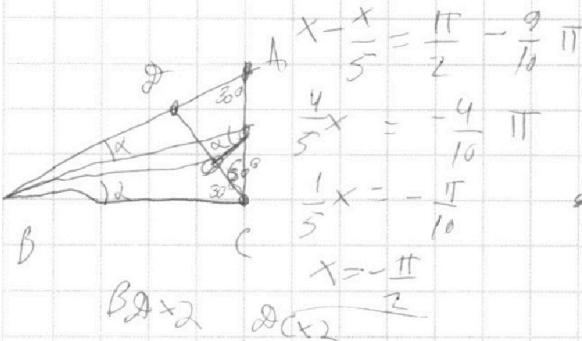
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{лк} \quad \frac{2}{10}\pi - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - x$$



N5

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ (x-a)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\frac{ax-3b}{-2} = y$$

$$-\frac{9}{2}x + \frac{3b}{2} = y$$

$$b^2 = a^2 + 4$$

$$4b^2 - 36a^2 - 36ab + 9b^2$$

$$b^2 = a^2 + 4$$

$$(2b)^2 = (6a - 3b)^2$$

$$c^2 = 3a^2 + 3b^2$$

$$c^2 = 3a^2 + 3b^2$$

$$36a^2 + 12ac + c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$2b = 6a - 3b$$

$$5b = 3b - 6a$$

$$6a = b$$

$$35a^2 = 4$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{35}}; b = \frac{12}{\sqrt{35}}$$

$$a = -\frac{2}{\sqrt{35}}; b = -\frac{12}{\sqrt{35}} = b$$

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \quad |ax+by+c| = 3$$

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{|6a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$$

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$$

$$\frac{|3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3; \quad |6a-3b| = 2$$

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

$$9b^2 = 9a^2 + 36$$

$$4a^2 + 16a^2 = 36$$

$$\frac{11}{25}a^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{11}}; \quad b = \frac{12}{\sqrt{11}}$$

$$a = -\frac{10}{\sqrt{11}}; \quad b = -\frac{12}{\sqrt{11}}$$

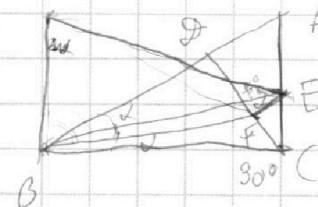
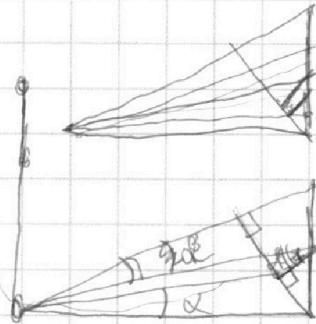
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_3)^4 x + 6(\log_x 3) = (\log_x 243) - 8$$

$$(\log_3)^4 5y + 2(\log_{5y} 3) = (\log_{25y^2} (3^{11})) - 8$$

$$(\log_3)^4 x + 6(\log_x 3) = \frac{1}{2} \log_x 243$$

$$(\log_3)^4 x + \frac{6}{(\log_3 x)} = \frac{1}{2} \log_x 243 - 8$$

$$(\log_3)^4$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$2 \log_3 5y + 6 = 7$$

$$2(\log_3)^5 x + 12 - 5 + 8(\log_3 x) = 0$$

$$2(\log_3)^5 x + 18(\log_3 x) + 7 = 0$$

$$8t^7 + 7t^5 + t^3$$

решение

$$(\log_3)^4 x + \frac{6}{(\log_3 x)} = \frac{1}{2} \times 5 \times (\log_x 18) - 8$$

$$2(\log_3)^4 x + 12 - 5 + 18(\log_3 x) = 0$$

$$2(\log_3)^5 x + 18(\log_3 x) + 7 = 0$$

$$f_1(x) = 7$$

$$f_1(t) = f_1(t + 4\pi)$$

\log

$$(\log_3)^4 5y + 2(\log_{5y} 3) -$$

$$- \frac{1}{2} (\log_{5y} 3) + 8 = 0$$

$$2(\log_3)^5 5y + (4 - 11) +$$

$$+ 16(\log_{5y} 5) = 0$$

$$2(\log_3)^5 5y + 16(\log_{5y} 5) - 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N5$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^3} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$t = \log_3 x$$

$$m = \log_3 5y$$

$$\begin{cases} t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} t - 8 \\ m^4 + \frac{2}{m} = \frac{11}{2} m - 8 \end{cases} \quad | \times t \quad | \times m$$

$$\begin{cases} t^5 - \frac{5}{2} t^2 + 8t + 6 = 0 \\ m^5 - \frac{11}{2} m^2 + 8m + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - m^5 + 3(m^2 - t^2) + 8(t - m) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$180^\circ - 60^\circ - 2$$

$$60^\circ - 2 \quad 180^\circ - 7\beta \quad 120^\circ - 2$$

$$60^\circ - 2 \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ$$

$$60^\circ - 2$$

$$30^\circ \quad 30^\circ + 2$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AB}$$

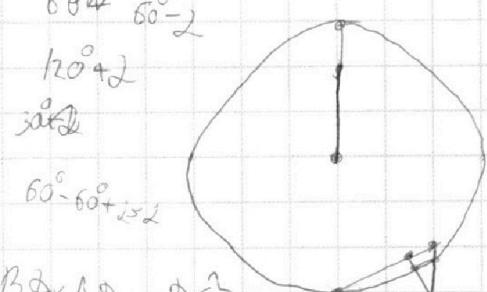
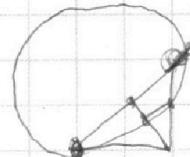
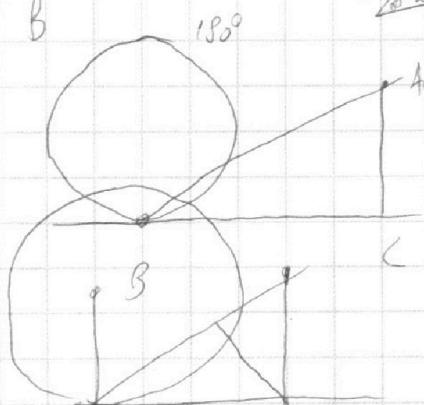
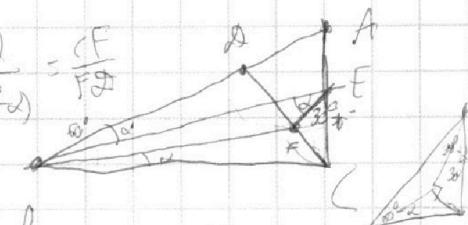
$$BD \cdot AD = DC^2$$

$$3D \cdot B^2 = DC^2$$

$$\sqrt{3} = \frac{DC}{DB}$$

$$\frac{BC}{BD} \approx \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC \times \sin 120^\circ}{BD \times \sin(60^\circ - 2)} = \frac{CF}{FD}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!