



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) П.к. $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$, то $ab \geq 2^9 3^{10} 5^{10}$. П.к. $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$, то $bc \geq 2^{14} 3^{13} 5^{13}$. П.к. $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$, то $ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30}$. И, м.к. $ab, bc, ac > 0$, то:

$$ab \times bc \times ac \geq 2^9 \times 3^{10} 5^{10} \times 2^{14} 3^{13} 5^{13} \times 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$(abc)^2 \geq 2^{42} \times 3^{41} \times 5^{53}, \text{ но м.к. } ab : 2^9 3^{10} 5^{10},$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13} \text{ и } ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}, \text{ то } (abc)^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}.$$

2) Заметим, что $(abc)^2$ - квадрат числа \Rightarrow при разложении на простые множители, каждый множитель будет иметь четную степень, а м.к. $(abc)^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}$, то $(abc)^2 :$

$$: 2^{42} 3^{42} 5^{54} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} 3^{42} 5^{54}$$

$$abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{27}, \text{ но } abc : 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}.$$

3) Проверим $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$; $ab = 2^9 3^{10} 5^{10}$; $bc =$

$$= 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$c = \frac{abc}{ab} = 2^{12} 3^{11} 5^{20}$$

$$a = \frac{abc}{bc} = 2^7 3^8 5^{17}$$

$$b = \frac{abc}{a} = 2^2 3^3 5^{13}$$

3) Заметим, что если $a = 2^7 3^8 5^{17}$; $b = 2^2 3^3 5^{13}$; $c = 2^{12} 3^{10} 5^{20}$,

$$\text{то } abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}, ab = 2^9 3^{10} 5^{10}; bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13}; 2^{19} 3^{18} 5^{30}.$$

$$ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30}; 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow \text{все условия выполняются} \Rightarrow \min(abc) = 2^{21} 3^{21} 5^{30}.$$

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \quad 5 \arcsin(\cos X) = X + \frac{\pi}{2}$$
$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - X)) = X + \frac{\pi}{2}$$

~~$\arcsin \sim \frac{X}{5} + \frac{\pi}{10}$~~

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - X)) = \frac{X}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - X = \frac{X}{5} + \frac{\pi}{10} \quad (I) \\ \frac{\pi}{2} - X = \pi - \frac{X}{5} - \frac{\pi}{10} \quad (II) \end{array} \right.$$

$$2) \quad (I) \quad \frac{2}{5}\pi = \frac{6}{5}X$$

$$\frac{\pi}{3} = X$$

$$(II) \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} - \pi = \frac{4}{5}X$$

$$\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{5}X$$

$$-\frac{4\pi}{10} = \frac{4}{5}X$$

$$X = -\frac{\pi}{2}$$

3) Проверим полученные значения:

$$(I) \quad 5 \arcsin(\cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$(II) \quad 5 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = 0$$

$$5 \arcsin 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Ответ: $X = \frac{\pi}{3}$; $X = -\frac{\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)
$$\begin{cases} ax+2y-3z=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$
 - ровно 4 решения.

2) Будем искать a , при которых шлется хотя бы одно b , что система имеет ровно 4 решения.

3)
$$\begin{cases} ax+2y-3z=0 & \text{- графиком ур-ия является прямая} \\ x^2+y^2=9 & \text{- графиком ур-ия является окр-ть с ц. (0,0) и R=3} \\ (x-6)^2+y^2=4 & \text{- графиком ур-ия является окр-ть с ц. (6,0) и R=2.} \end{cases}$$

4) Если прямая с двумя непересекающимися окр-ями имеет ровно 4 общие точки, то ун. коэф $a \in (-K; K)$, где K - условные коэффициенты внутренних касательных. Найдём эти коэффициенты. Если прямая касается окр-ми, то ρ (расстояние) от прямой до окр-ми равно радиусу R :

$$\begin{cases} \frac{|3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 3 \\ \frac{|6a-3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9b^2 = 9(a^2+4) \Rightarrow b^2 = a^2+4 \\ (6a-3b)^2 = 4(a^2+4) \Rightarrow (6a-3b)^2 = 4b^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a=5b \Rightarrow b=\frac{6}{5}a \Rightarrow \frac{36}{25}a^2 = a^2+4 \Rightarrow \frac{11}{25}a^2=4 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{\sqrt{11}}; b=\frac{12}{\sqrt{11}} \\ a=-\frac{10}{\sqrt{11}}; b=-\frac{12}{\sqrt{11}} \end{cases} \\ 6a=b \Rightarrow 36a^2-4a^2=4 \Rightarrow a^2=\frac{4}{35} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{\sqrt{35}}; b=\frac{12}{\sqrt{35}} \\ a=-\frac{2}{\sqrt{35}}; b=-\frac{12}{\sqrt{35}} \end{cases} \end{cases}$$

5) По замечанию, что $\frac{10}{\sqrt{11}} > \frac{2}{\sqrt{35}} \Rightarrow \frac{10}{11} < \frac{10}{11}$ - коэф. внутренних касательных.
Тогда $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$.
Ответ: $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \begin{cases} \log_3^4 X + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 & (I) \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 & (II) \end{cases}$$

$$2) (I) \log_3^4 X + \frac{6}{\log_3 X} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{\log_3 X} - 8 \quad \left| \times \log_3 X, \log_3 X \neq 0, \right.$$

м.к. $X \neq 1$, а
 $X \neq 1$, м.к. если
 $X=1$, то $\log_x 3$ не опре-
делен.

$$\log_3^5 X + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 X \quad | \times 2$$

$$2 \log_3^5 X + 16 \log_3 X + 7 = 0$$

$$(II) \log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \quad \left| \times \log_3 5y \text{ (аналогично} \right.$$

м.к., как мы делаем
на $\log_3 X$ в (I).

$$\log_3^5 5y + 2 - \frac{11}{2} + 8 \log_3 5y = 0 \quad | \times 2$$

$$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0$$

3) ^{III} Пусть $f(t) = 2t^5 + 16t$. Заметим, что $f(-t) = -f(t)$,
м.к. $f(-t) = 2(-t)^5 + 16(-t) = -(2t^5 + 16t) = -f(t)$. Также $f(t) \in \mathbb{R}$

Тогда заметим, что $f(\log_3 X) = -f(\log_3 5y)$

$$f(\log_3 X) = f(-\log_3 5y)$$

$$\log_3 X + \log_3 5y = 0$$

$$\begin{cases} \log_3 (5yx) = 0 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5yx = 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{5} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\frac{9}{10} \pi - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - x$$

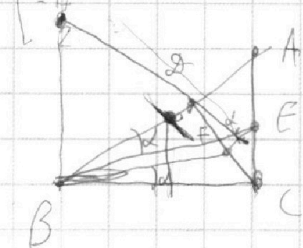
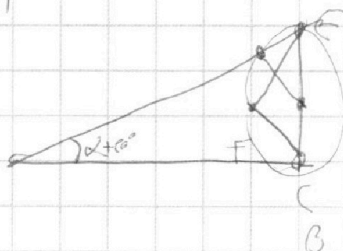
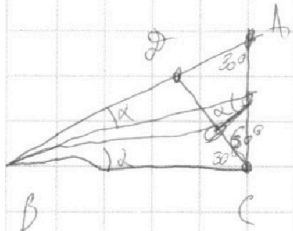
$$x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{9}{10} \pi$$

$$\frac{4}{5} x = -\frac{4}{10} \pi$$

$$\frac{1}{5} x = -\frac{\pi}{10}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$3a \times 2 \quad 2(x \times 2)$$



n5

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ (x-a)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\frac{ax-3b}{-2} = y$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} = y$$

$$4a^2+16=36a^2-36ab+36b^2$$

$$b^2=a^2+4$$

$$4b^2=36a^2-36ab+36b^2$$

$$b^2=a^2+4$$

$$(2b)^2 = (6a-3b)^2$$

$$2b=6a-3b$$

$$2b=3b-6a$$

$$6a=b$$

$$36a^2=4$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{35}}; b = \frac{12}{\sqrt{35}}$$

$$a = -\frac{2}{\sqrt{35}}; b = -\frac{12}{\sqrt{35}}$$

$$c^2 = 3a^2 + 3b^2$$

$$(6a+c)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$c^2 = 3a^2 + 3b^2$$

$$36a^2 + 12ac + c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$a^2 + b^2 + 36a^2 + 12ac = 0$$

$$\frac{36}{25} a^2 = a^2 + 4$$

$$\frac{11}{25} a^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{11}}; b = \frac{12}{\sqrt{11}}$$

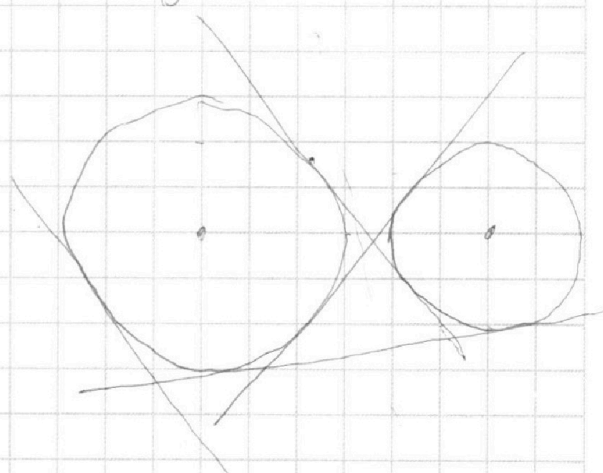
$$a = -\frac{10}{\sqrt{11}}; b = -\frac{12}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \quad \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = -3$$

$$\frac{|6a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \quad \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{|3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 3; \frac{|6a-3b|}{\sqrt{a^2+4}} = 2$$

$$9b^2 = 9a^2 + 36 \quad 4a^2 + 16 = 36a^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

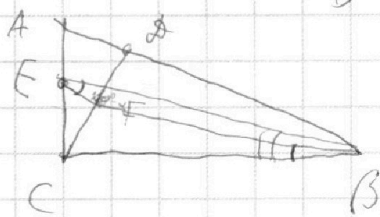
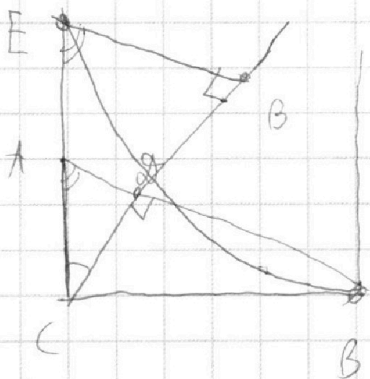


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$
 $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
 $ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$c = 2^{12} 3^{11} 5^{17}$
 $a = 2^7 3^8 5^{14}$
 $b = 2^2 3^3$



11

$ab \times bc \times ac = 2^{42} 3^{41} 5^{53}$
 $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

$2^{21} 3^{21} 5^{27}$

$c = 2^{12} 3^{10} 5^{13}$

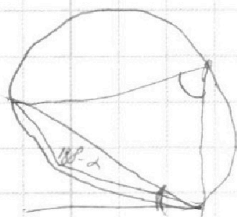
$a = 2^7 3^8 5^{17}$

$b = 2^2 3^3$

$2^{21} 3^{22} 5^{37}$

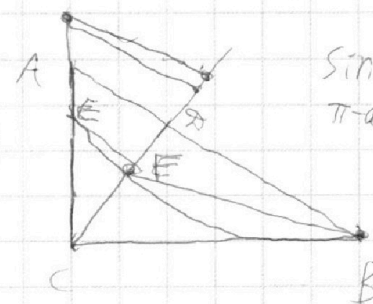
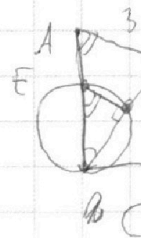
12

$\frac{DB}{BC} =$



$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{CB}$

$k \times (AD) = AD \times BC$



$\sin X = a$
 $\arcsin(\sin X) =$

$= X$

$5\left(\frac{\pi}{2} - X\right) =$

$= X + \pi$

$\frac{4\pi}{2} = 6x$

$2\pi = 6x$

$x = \frac{\pi}{3}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = \frac{x + \pi}{2}$



$\sin\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = X$

$\sin X = a$
 $\pi - \arcsin a$

$\frac{\pi}{2} - \pi = \arcsin(\cos X) = \frac{X + \pi}{2}$

$\cos X = \sin \frac{X + \pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - X = \pi - \frac{X + \pi}{2} + 2\pi K$ $\frac{\pi}{2} - X = \frac{X + \pi}{2} + 2\pi K$

$\sin \frac{\pi}{2} - X$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = \sin\left(\frac{X + \pi}{2}\right)$

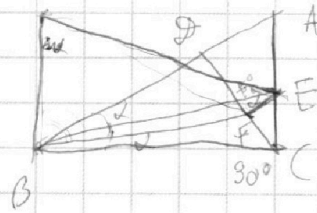
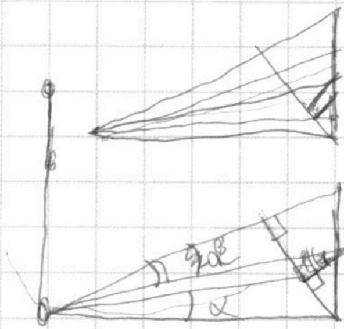
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$60^\circ - 2$
 $30^\circ + \alpha$

$120^\circ + \alpha$

$A E \cdot B F = B E \cdot A F$
 2

$\log_3 x = 1$
 $\log_3 5y = m$

$f(t) = f(-m) \quad x > 0$

$y > 0$

$t = -m$

$f(t) = 7$

$f(x) = -7$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$

$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2 (3^{11}) - 8$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \log_x 243$
 $P(-14, 12)$

$Q(6, 12)$

$4t^5 + 16t$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \frac{5}{\log_3 x} - 8 \quad | \cdot 2 \log_3 x$
 $O(0, 0)$

$f(x) = 7$

$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

$2 \log_3^5 5y + 16 = 7$

$2 \log_3^5 x + 12 - 5 + 8 \log_3 x = 0$

$f(5y) = 7$

$2 \log_3^5 x + 18 \log_3 x + 7 = 0$

$2t^5 + 16t = 7 \quad / \cdot \log R$

$8 + 7 = 15$

mississ

log

$\log_3^4 x + \frac{6 \log_3 x}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{\log_3 243}{\log_3 x} - 8$

$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 -$

$-\frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$

$2 \log_3^4 x + 12 - 5 + 18 \log_3 x = 0$

$2 \log_3^5 5y + (4 - 11) +$

$2 \log_3^5 x + 18 \log_3 x + 7 = 0$

$+ 16 \log_3 5y = 0$

$f(x) = 7$

$f(t) = f(\frac{1}{t})$

$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5

$$1) \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2 (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$t = x \log_3 x$$

$$m = \log_3 5y$$

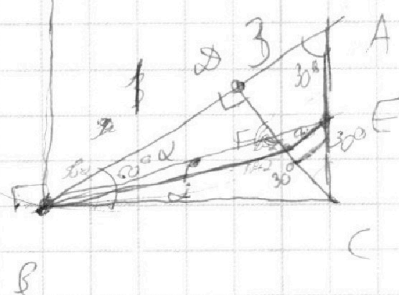
$$\begin{cases} t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} t - 8 \quad | \cdot t \\ m^4 + \frac{2}{m} = \frac{11}{2} m - 8 \quad | \cdot m \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - \frac{5}{2} t^2 + 8t + 6 = 0 \\ m^5 - \frac{11}{2} m^2 + 8m + 2 = 0 \end{cases}$$

$$m^5 - \frac{11}{2} m^2 + 8m + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t^5 - m^5 + 3(m^2 - t^2) + 8(t - m) + 2 = 0 \end{cases}$$

$180^\circ - 60^\circ - 2$
 $60^\circ - 2$
 $180^\circ - \alpha + \beta$
 $120^\circ + 2$
 $140^\circ + 2$



$60^\circ - 2$
 60°
 $60^\circ - 2$
 30°
 $30^\circ + 2$

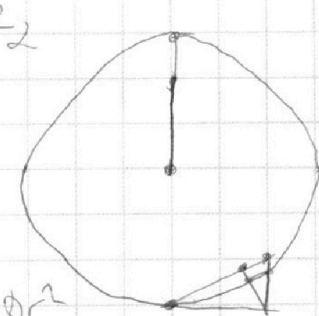
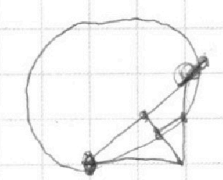
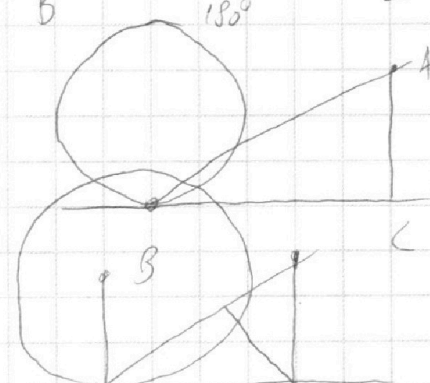
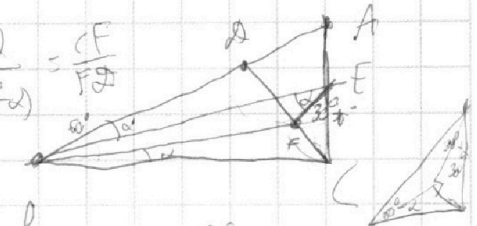
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\begin{aligned} BD \cdot AD &= DC^2 \\ 3DB^2 &= DC^2 \\ \sqrt{3} &= \frac{DC}{DB} \end{aligned}$$

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC \times \sin \alpha}{BD \times \sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{CF}{FD}$$

$$\frac{2 \sin \alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{CF}{FD}$$



$$90^\circ + 2 + 30^\circ + 2$$



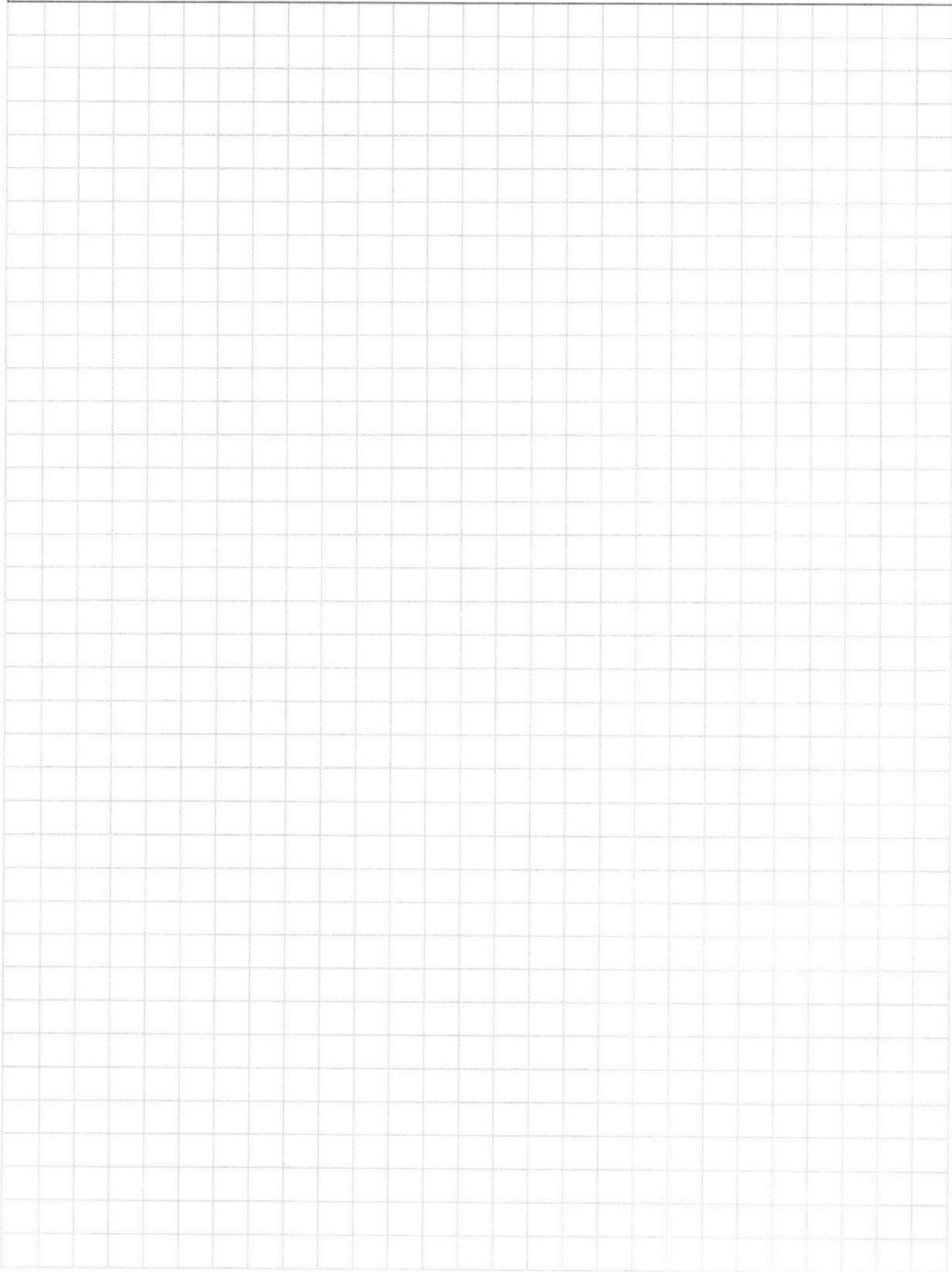
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!