



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- $a, b, c \in \mathbb{N}$; $abc = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $b < : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{-13}$; $ac = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$;
- $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$; $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$; $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$;
- $a_1 + b_1 \geq 3$; $b_1 + c_1 \geq 14$; $a_1 + c_1 \geq 18$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$; $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$.
раб - 60 при $a_1 = 7$; $b_1 = 2$; $c_1 = 12$;
- $a_2 + b_2 \geq 10$; $b_2 + c_2 \geq 13$; $a_2 + c_2 \geq 18$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$; $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$.
раб - 60 при $a_2 = 7$; $b_2 = 3$; $c_2 = 11$;
- $a_3 + b_3 \geq 10$; $b_3 + c_3 \geq 13$; $c_3 + a_3 \geq 30$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$; $a_3 + b_3 + c_3 \geq 27$.
раб - 60 не достичется так как $a_3 + c_3 \geq 30$;
тогда $a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$; раб - 60 при $a_3 = 15$;
 $b_3 = 0$; $c_3 = 15$;
- Тогда $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3}$.
- $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$; раб - 60 при $a = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{15}$;
- $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$;
- Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$;



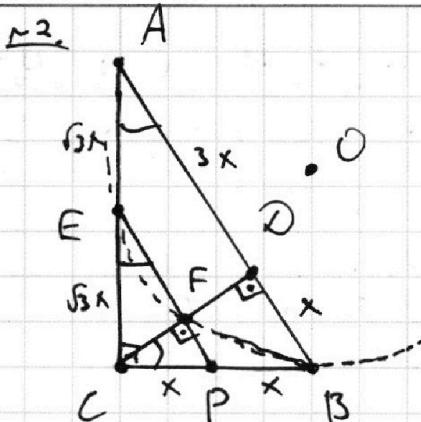
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.



$$AB \parallel EF; AD:DB = 3:1;$$

$$\bullet \text{ If } \angle QCB = x; \quad \underline{\angle ACD} = 3x;$$

$$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x;$$

$$BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x;$$

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3k^2} = 2\sqrt{3}x;$$

Danya $\angle CAB = 30^\circ$; EF

• PB - *caractensum* *soga*

$$CP = y; PB = 2x - y'; FP = \frac{y}{2}; PE = 2y;$$

$$\bullet \text{Dengan } PB^2 = PF \cdot PE; \quad (2x-y)^2 = \frac{x}{2} \cdot 2y; \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = y^2; \quad 4x^2 = 4xy; \quad x = y$$

$$\bullet \quad \mathbb{E}(C = \sqrt{3}x) ; \quad C^P = x ; \quad P(B = x) ; \quad CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x ; \quad EF = 2x - \frac{x - \frac{3}{2}x}{2}x.$$

$$S_{CEF} = \frac{3}{2} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} x^2$$

$$S_{A B C} = \sqrt{3} x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} x^2;$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{3\sqrt{6}} = \frac{16}{3}\text{ // :}$$

$$\text{Other: } \frac{16}{3} ;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3.

$$-\frac{1}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \leq 5\arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2};$$

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2};$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi;$$

• если $\pi < x \leq 2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x - \frac{5\pi}{2}$;

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; 4x = 8\pi; x = 2\pi;$$

• если $0 < x \leq \pi$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$;

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; 2\pi = 6x; x = \frac{\pi}{3};$$

• если $-\pi < x \leq 0$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$;

$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; 4x = -2\pi; x = -\frac{\pi}{2}.$$

• если $-2\pi < x \leq -\pi$, то $\arcsin(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} - x$;

$$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; -8\pi = 6x; x = -\frac{4}{3}\pi;$$

• если $-3\pi \leq x \leq -2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{5\pi}{2}$;

$$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; 4x = -12\pi; x = -3\pi;$$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

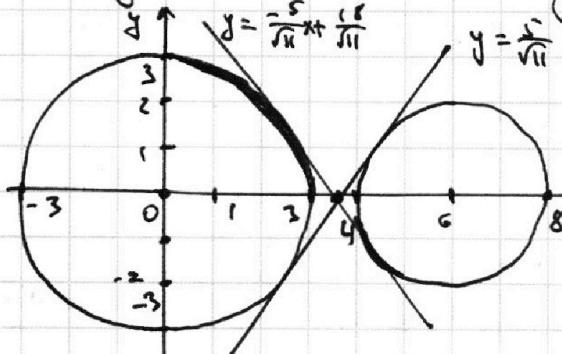
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

+ реш. при $a = 0, b = 0$

- $x^2 + y^2 = 3^2$; - окр. с центром $b(0; 0)$ и радиусом 3;
- $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$; $(x-6)^2 + y^2 = 4$; - окр. с центром $b(6; 0)$ и радиусом 2;
- $2y = -ax + 3b$; $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$.



$$\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}} = 3; \quad \frac{|6k+l|}{\sqrt{k^2+1}} = 2;$$

- в одном случае $l > 0$; $6k+l > 0$;

$$l = 3\sqrt{k^2+1}; \quad 6k+l = 2\sqrt{k^2+1}; \quad 18k+3l = 2l; \quad -l = 18k; \\ -6k = \sqrt{k^2+1}; \quad 36k^2 = k^2+1; \quad 35k^2 = 1; \quad k = \frac{1}{\sqrt{35}};$$

но это внешн. касат.

- $6k+l < 0$; $k < 0$

$$l = 3\sqrt{k^2+1}; \quad -6k-l = 2\sqrt{k^2+1}; \quad -18k-3l = 2l; \quad 5l = -18k; \\ -\frac{6k}{5} = \frac{18k}{5}\sqrt{k^2+1}; \quad \frac{36k^2}{25} = \sqrt{k^2+1}; \quad 36k^2 = 25k^2 + 25; \\ 11k^2 = 25; \quad k = -\frac{5}{\sqrt{11}}; \quad l = -\frac{18}{5} \cdot \frac{-5}{\sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}};$$

- $l < 0$; $6k+l > 0$

$$-l = 3\sqrt{k^2+1}; \quad 6k+l = 2\sqrt{k^2+1}; \quad 18k+3l = -2l; \\ 18k = -5l; \quad l = -\frac{18}{5}k; \quad -\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}; \\ k = \frac{5}{\sqrt{11}}; \quad l = -\frac{18}{\sqrt{11}};$$

где касательные (внешние);

$$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}; \quad y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}};$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Всегда } -\frac{\alpha}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}}; \quad \alpha = \frac{10}{\sqrt{11}}; \quad \text{или } \alpha = \frac{-10}{\sqrt{11}};$$

$$-\frac{\alpha}{2} \leq \frac{-5}{\sqrt{11}}; \quad \alpha \geq \frac{10}{\sqrt{11}}; \quad -\frac{\alpha}{2} \geq \frac{10}{\sqrt{11}}; \quad \alpha \leq \frac{-10}{\sqrt{11}};$$

при касании током пересечение прямой с окружностью будет две, поэтому при $\alpha = \frac{10}{\sqrt{11}}$ или $\alpha = \frac{-10}{\sqrt{11}}$ касание системы имеет максимум 2 решений при касании.

при $\alpha < \frac{-10}{\sqrt{11}}$ или $\alpha > \frac{10}{\sqrt{11}}$ находитась такая b , что решение будет 4, то есть прямая будет пересекать окружность одну окружность, значит ≤ 2 решения;

при $-\frac{10}{\sqrt{11}} < \alpha < \frac{10}{\sqrt{11}}$ всегда находитась такая b , что прямая будет иметь 4 пересечения с окружностью, достаточно провести её через точку пересечения двух окружностей касательных; через точку

$$(3, 6; 0), \quad 0 = -1,8\alpha + \frac{3}{2}b; \quad 1,5b = 1,8\alpha;$$

$$b = \frac{18}{15}\alpha; \quad b = \frac{6}{5}\alpha; \quad b = 1,2\alpha;$$

при таком b будет 4 решения синусов;

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

• $\log_3^x + 6 \log_{5y} 3 = \log_{x^2} 243 - 8; \quad x \neq 1; \quad y \neq 0, \frac{1}{5}$
 $\log_3^x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2,5}{\log_3 x} + 8 = 0; \quad \log_3^x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0;$
 $\log_3^x (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3'') - 8;$
 $\log_3^x (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} - \frac{5,5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0; \quad \log_3^x (5y) - \frac{3,5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0;$

• Заметим, если $u = \log_3 x; v = \log_3 (5y)$,
то $u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0$; если u - решение
 $v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0$; v - решения
и находит v -реш. $2-10; -\sqrt{5}$ первого;
т.к. $u \neq 0$, то $u^4 + 8u + 3,5 = 0$
и $v \neq 0$, то $v^4 + 8v - 3,5 = 0$
заметим, что эти функции строго
возрастательные \Rightarrow имеют ровно 1
корень, т.к. если представить допуски
 $10^{00} u = -10^{00}$, то будут разные значения
и неподходящих решений; 0 - ее
корень, функции не пересекаются (из
математической точки зрения), тогда ровно 1 решение;
 $\log_3 x = -\log_3 (5y); \log_3 (5xy) = (\log_3 1);$
 $5xy = 1; xy = \frac{1}{5}; xy = 0,2;$

Ответ: 0,2;



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{всех } O(0;0); P(-14;42); Q(6;42); R(20;0);$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33; (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33;$$

• заметим, что на прямых вида

$y = -3x + b$, где $b \in \mathbb{Z}$ значение
существует $f(x_2) = 3x + y$, постоянного,

$$y + 3a = -3(x-1) + b; 3(x-a) + y + 3a = 3x + y;$$

$$\text{тогда } f(x_2; y_2) - f(x_1; y_1) = 33;$$

Всего таких прямых включая параллельные 60 , достигается все значения от 0 до 60 ;

• Тогда A может быть с единицей, где $f(x; y) = 0$,
продолжением прямые от 0 до 60 ;

$$A < 0; B < 33; \quad A < 27; B < 60;$$

на прямых, нет каскада; из всего 15
найденных точек с единицами каскады
нет, то есть, на оставшихся линиях 14 ;

тогда всего способов сократить $A+B$

$$10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2 = 5778;$$

(т.к. можно выбрать любую точку на первой
прямой и любую на другой)

Ответ: 5778;

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|

МФТИ.

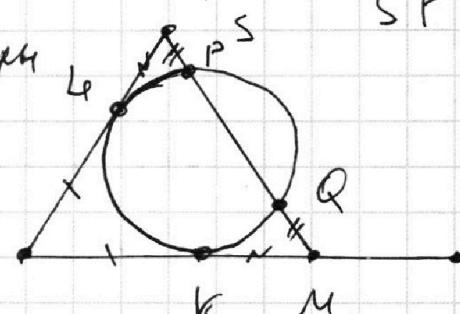
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

-7.

$$AS = BC = 12; SA + BC = 90;$$

a) рассмотрим сечение SAA_1 :

вокругность - сечение сферы

 ω касается AS в L ; ω касается AM в K ;тогда $AL = AK$ (все сферы
касаются одинаково) A_1

$$\cdot MK \text{ - касательная} \Rightarrow MK^2 = MQ \cdot MP. \quad \left. \begin{array}{l} \cdot SL \text{ - касательная} \Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ; \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MK = SL \Rightarrow AM = SA = 12; \text{ т.к. } AA_1 = 18;$$

$$\cdot BC = 12; AH = \frac{SA \cdot BC}{BC} \cdot 2 = \frac{180}{12} = 15; AH \text{ - высота} \triangle ABC;$$

$$\sqrt{AA_1^2 - AH^2} = A_1H = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11};$$

всегда выполняется $BH = 6 + 3\sqrt{11}$; $CH = 6 - 3\sqrt{11}$;

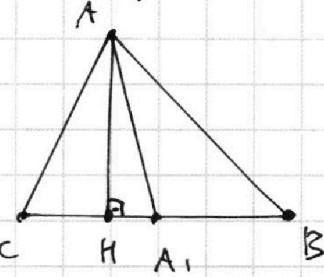
$$AB^2 = 15^2 + (6 + 3\sqrt{11})^2; \quad m = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}};$$

$$AC^2 = 15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2;$$

$$m_c = \sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 - 36\sqrt{11}) \cdot 2 - (15^2 - 135 - 36\sqrt{11})^2};$$

$$= \sqrt{\frac{1008 - 108\sqrt{11} - 15^2 - 135^2}{2}} = \sqrt{\frac{648 - 108\sqrt{11}}{2}}.$$

$$m_b = \sqrt{\frac{(12^2 + 15^2 + 135 + 36\sqrt{11}) \cdot 2 - (15^2 + 135 + 36\sqrt{11})^2}{2}} = \sqrt{\frac{648 + 108\sqrt{11}}{2}}.$$



$$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11} = \sqrt{(62^2 - 27^2 \cdot 11)} =$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 81^2 - 27^2 \cdot 11} = \sqrt{2^2 \cdot 3^8 - 3^2 \cdot 11} = 3^3 \sqrt{36 - 11} =$$

$$= 3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135;$$

$$\cdot AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 135 \cdot 18 = 2430.$$

б) \odot касается BCS в точке N ; $SN = 4$;

$$R = 5; \quad SN = 4; \quad O \text{-центр} \odot; \quad ON = 5; \quad SO = \sqrt{41};$$

• так как $AS = AM$, то дуги SuM рав-

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

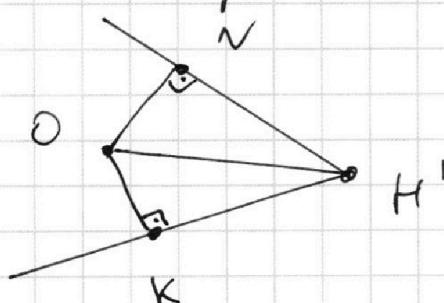
коудаленны, относительно $O \rightarrow$

$$\Rightarrow OK = 5; OM = OS = \sqrt{41}; KM = 4;$$

$$AK = 12 - 4 = 8;$$

Тогда $KH' = 15 \cdot \frac{10}{18} = \frac{15 \cdot 5}{9} = \frac{25}{3}$;
~~KH'~~ — ~~последн.~~ на BC;

• рассмотрим ~~случай~~ $\bullet NKH'$:



$$ON = OK = 5;$$

$$KH' = \frac{25}{3} = H'N \quad (\text{адк ослег.})$$

~~$OK' = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{34};$~~

$$\sin \angle OH'N = \frac{8}{\frac{8}{3} \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}};$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\cos \angle KH'N = 1 - 2 \cdot \frac{9}{34} = \frac{34 - 18}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17};$$

$$\angle KH'N = \arccos \frac{8}{17};$$

Ответ: а) 2430° ; б) $\arccos \frac{8}{17}$;



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

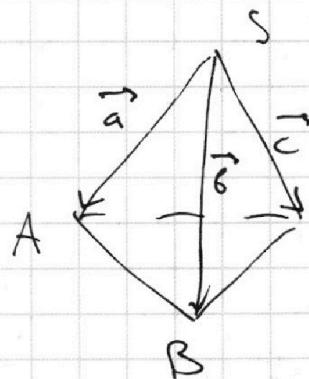
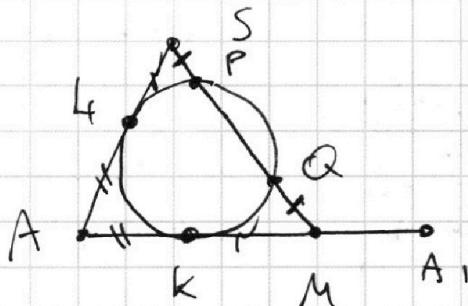
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\triangle}^2 = S_P \cdot S_Q;$$

$$KM^2 = MA \cdot MP;$$

$$+ a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle = c^2;$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \cos \angle = m^2$$

$$\frac{2(a^2 + b^2)}{c^2 + (m^2)} = \frac{c^2}{c^2 + (m^2)}$$

$$a^2 = 15^2 + 36 - 36\sqrt{11} + 99$$

$$b^2 = 15^2 + 36 + 36\sqrt{11} + 99$$

$$m^2 = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$S_{\triangle} = 90; \quad S_A = BC = 12.$$

$$(1; 2); (2; 1)$$

~~$$x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2$$~~

$$x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2$$

$$\frac{4-1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$m^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$h = \sqrt{15^2 - \frac{10^2 \cdot 15^2}{18}} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

$$AS = AM = 12$$

$$AA_1 = 18$$

$$\frac{1910}{1000} = \frac{191}{100}$$

$$\frac{191}{100} \times \frac{360}{144} = \frac{191}{250} = 0.764$$

$$\frac{191}{250} = 0.764$$

$$\frac{191}{2$$

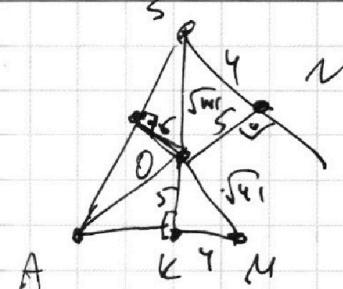
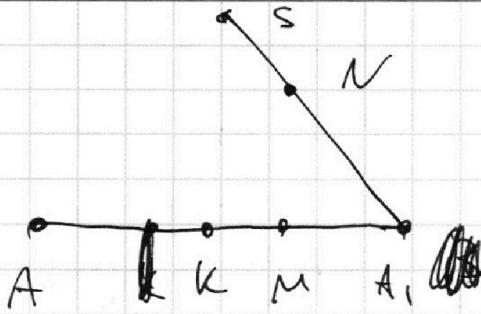


На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

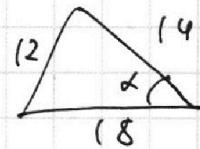
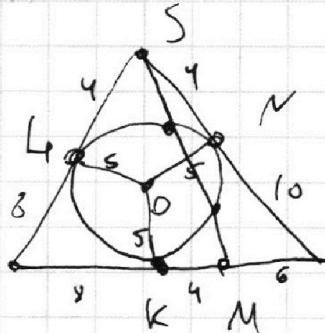
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16 + 25 = 41$$

$$MO = SO = \sqrt{91};$$

$$KM = 4;$$

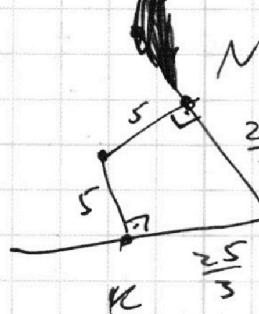


$$\begin{array}{r} 50+80 \\ \hline -130 \\ \hline 85 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$36 = r^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot r \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{57}{63}; \quad \frac{g}{57}$$

$$\cos \alpha = \frac{15}{21};$$



$$5 \frac{25}{3} \rightarrow 1 \frac{5}{3}$$

$$5\sqrt{3}y$$

$$\left(\frac{50}{\sqrt{34}}\right)^2 = \cancel{12.5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{11}} x - \frac{18}{\sqrt{11}} = y \quad \sqrt{1 + \frac{25}{9}} = h = \frac{\frac{125}{3}}{\frac{5 \cdot \sqrt{34}}{3}} = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ x^2 + (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11} &= 9 \quad y^2 = (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11} \\ 11x^2 + 25x^2 - 180x + 18^2 &= 99 \end{aligned}$$

$$36x^2 - 180x + 18^2 = (6x - 15)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{6}.$$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$a^6 : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$$

$$2 + 7 \geq 9$$

$$2 + 12 \geq 14$$

$$2 + 12 \geq 18$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$a_2 + b_2 \geq 10$$

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 13$$

$$b_3 + c_3 \geq 13$$

$$a_1 + c_1 \geq 13$$

$$a_2 + c_2 \geq 18$$

$$a_3 + c_3 \geq 30$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0$$

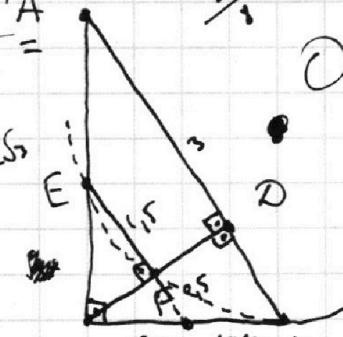
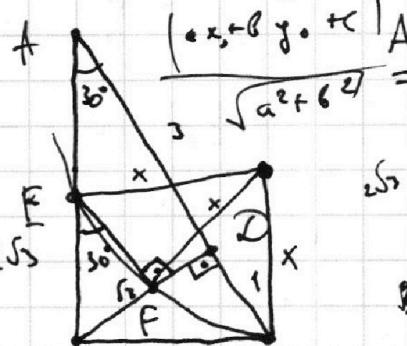
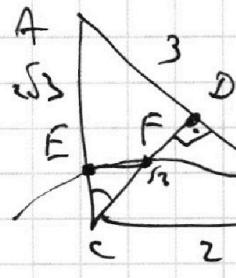
$$a_2 + b_2 + c_2 = 41$$

$$a_3 + b_3 + c_3 = 41$$

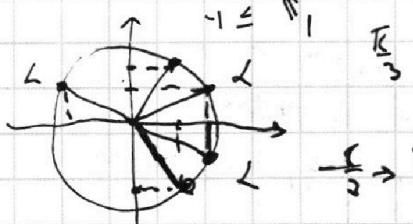
$$\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3},$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3},$$



$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$C \left(\frac{1}{2} - x \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$PE = 2x; PF = \frac{x}{2};$$

$$PF - PE = PB^2;$$

$$(2-x)^2 = \frac{x}{2} - 2x$$

$$x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{5\pi}{6}; \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$y = x$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$k = \frac{\pi}{6};$$

$$\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - x$$

$$36k^2 = 25k^2 + 25$$

$$y = kx + b; b = -3,6k$$

$$y - kx - b = 0$$

$$k = \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{9}$$

$$-3,6k = 3,6k$$

$$\frac{6}{9}k = \sqrt{25}$$

$$k = \sqrt{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3 x + 6 \log_3 x^3 = \log_3 x^2 243 - 8 \quad (\log_3 24 = \log_2 4 \cdot 2)$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 x^3 - 8$$

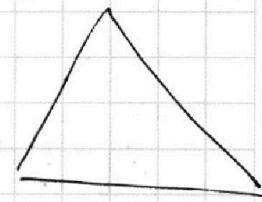
$$\left[t = \log_3 x; \quad t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0; \quad [t] \right]$$

$$\log_2 (\log_3 y) + 2 \log_5 y^3 = \log_{25y^2} 3^{11} - 8$$

$$2 \log_5 y = \frac{11}{2} \cdot \log_5 y^3 - 8$$

$$\left[v = \log_3 5y; \quad v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0 \quad [-t] \right]$$

$$2 - 5,5 = -3,5$$



$$\log_3 x = -\log_3 5y; \quad (\log_3 5xy)^2 = 0$$

$$x^5 + 8x + 3,5 = 0$$

~~$$2x^5 + 16x + 7 = 0$$~~

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

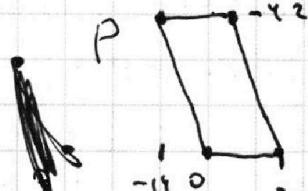
~~$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$~~

$$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5;$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33; \quad 60 - x = 33$$

$$(y_2 + 3x_2) - (y_1 + 3x_1) = 33; \quad x = 60 - 33$$

$$27$$



$$\begin{array}{r} 2250 \\ + 3528 \\ \hline 5778 \end{array}$$

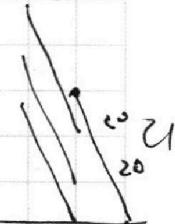
$$\frac{x^4}{5^4}$$

$$\frac{1474}{196}$$

$$\frac{x^1 96}{18}$$

$$\frac{1568}{196}$$

$$\frac{+ 196}{28}$$



$$20 \cdot 3 + 1 = 615$$

$$60$$

$$15 \cdot 20 + 40 = 560 + 315 = 875$$

$$3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 9$$

$$15 \cdot 20 + 40 = 615$$

$$60$$

$$15 \cdot 20 + 40 = 615$$