МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

Тогда $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 12 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 14 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geqslant 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geqslant 20 \\ \beta_1 + \beta_3 \geqslant 21 \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geqslant 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 17 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 39 \end{cases}$

$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geqslant 34$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$

Пример $\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 9 \end{cases}$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geqslant \frac{55}{2}$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$

Пример: $\beta_1 = 7$
$\beta_2 = 7$
$\beta_3 = 14$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 34$

Но $\gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 39 > 34$,
тогда
$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geqslant 39$
$\gamma_1 + \gamma_3 \geqslant 39$

Пример: $\cancel{\gamma_2 = 0}$
$\begin{cases} \gamma_1 = 19 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 20 \end{cases}$

Тогда $\min(abc) = \min\left(2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\right) =$
$= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
		X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

Т.к. $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$, а $\arccos(\cos x) = x \in [0;\pi]$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x = \pi - 2x\ ;\ 4\pi = 8x\ ;\ x = \frac{\pi}{2} \\ x \in [0;\pi] \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

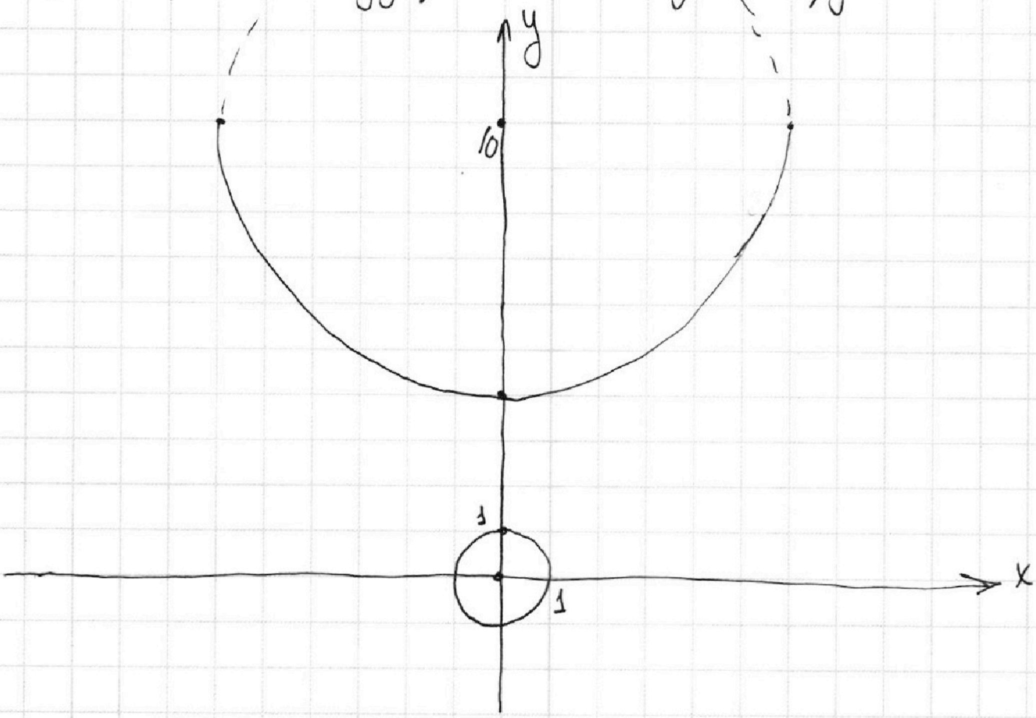
МФТИ

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-10)^2-36)=0 \quad (1) \end{cases}$$

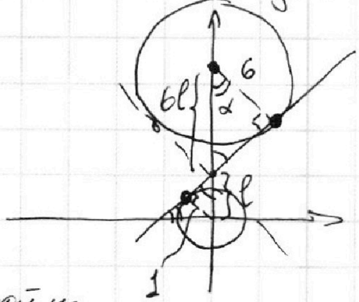
– прямая вращающаяся вокруг точки $A(0; \frac{4}{3}b)$

$a - ?$ $\exists b$ чрем.

(1) Графиком будут являться две окружности:



Найдем уравнения общих внутренних касательных:



$10 = 7l$

$l = \frac{10}{7}$

$((\cdot)B(0; \frac{10}{7})$ – принадлежит касательным)

Пусть ур. одной из касательных $y = kx + b$ $(k>0)$, $y = kx + \frac{10}{7}$

$\cos\alpha = \frac{6}{6l} = \frac{7}{10}$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$

$k = tg\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$. Следовательно уравнение касательных имеет вид $y = \pm\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Изменяя $\frac{a}{3}=c$ от $-\infty$ до ∞ будем смотреть ~~...~~ кол-во решений

$c\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{51}}{7}\right)$ – ≤ 4 реш

~~$a\in$~~

~~$c\in\left\{-\frac{\sqrt{51}}{7}\right\}$ – 2 реш~~

~~$c\in\left(-\frac{\sqrt{51}}{7};\right.$~~

$c\in\left[-\frac{\sqrt{51}}{7};\frac{\sqrt{51}}{7}\right]$ – ≤ 2 реш

$c\in\left(\frac{\sqrt{51}}{7};\infty\right)$ – ≤ 4 реш

Ровно $\frac{a}{3}$ 4 реш ~~не~~ будут в случае $\frac{a}{3}\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{51}}{7};\infty\right)$

$a\in\left(-\infty;-\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{7};\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{7};\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3 \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $\log_5 2x = a$; $\log_5 y = b$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ 3a^5 - 9 = 4 - 9a \ ; \ 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 12 = -1 - 9b \ ; 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(g) = 3g^5 + 9g$ $(g \neq 0)$. Она нечетная, т.к $f(-g) = -(3g^5 + 9g) = -f(g)$.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ f(a) - 13 = 0 \\ f(b) + 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ f(a) + f(b) = 0 \rightarrow a = -b \ ; a + b = 0 \\ f(a) = 13 \rightarrow \end{cases}$$

точно сущ такое a, т.к $f(g)$ при $g \neq 0$ непрерывна $a f(0) = 0$

$2x \neq 1$

Т.к $a + b = \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy$ $(a \neq 0 ; b \neq 0)$

$x > 0$ $x \neq \frac{1}{2}$

$y > 0$ $y \neq 1$

$$xy = \frac{5^{a+b}}{2} = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

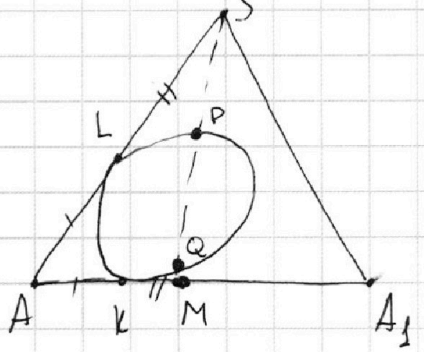
Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) Рассмотрим сечения пирамиды плоскостью:



$KM^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ+QP)$

$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP+PQ)$

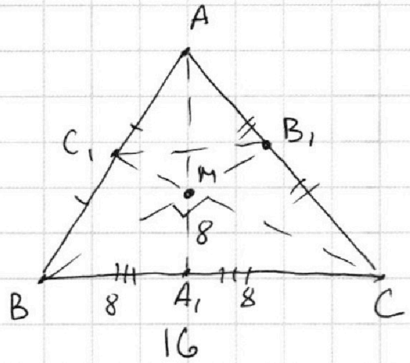
т.к $SP = MQ$ по условию, то

$KM = LS$

С учетом, что $AL = AK$ получаем, что $AS = AM$. $\triangle ASM$ - р/б

След $AM = AS = 16$

Рассмотрим основание ABC:



По св-ву $MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8 = BA_1 = A_1C$. След ~~∠AA'~~ $\triangle BMC$ - прям. по признаку

$S_{BC_1B_1C} = S_{ABC} - S_{AC_1B_1} = S_{ABC} - S_{ABC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} S_{ABC}$

$S_{BC_1B_1C} = \frac{1}{2} \sin\angle BMC \cdot BB_1 \cdot C_1C$

$\frac{1}{2} BB_1 \cdot C_1C = \frac{3}{4} \cdot 100$

$BB_1 \cdot C_1C = 150$

След $AA_1 \cdot BB_1 \cdot C_1C = 150 \cdot 24 = 3600$

Ответ: 3600

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Воспользуемся формулой $\begin{cases} V=\dfrac{2S_{ABC}\cdot S_{BSC}\cdot\sin\alpha}{3\cdot BC} \\ V=\dfrac{1}{3}h_a\cdot S_{BSC}\end{cases}$

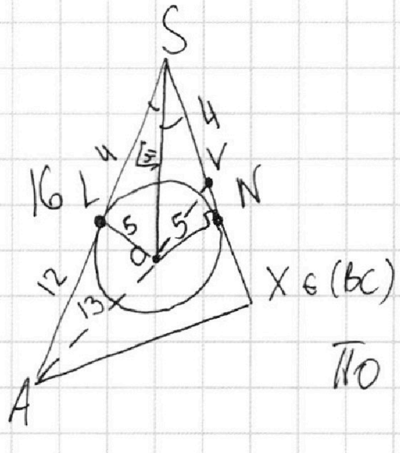
$$\frac{1}{\cancel{3}}ha\cdot \cancel{S_{BSC}}=\frac{2\cdot S_{ABC}\cdot \cancel{S_{BSC}}\cdot\sin\alpha}{\cancel{3}BC}$$

ha – высота из (·)A к плоскости SBC.

$$ha\cdot BC=2\cdot S_{ABC}\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{ha\cdot BC}{2\cdot S_{ABC}}=\frac{16h_a}{200}=\frac{2h_a}{25}$$

Рассмотрим плоскость



$$\frac{ON}{ha}=\frac{AO}{OV} \qquad \frac{ON}{ha}=\frac{OV}{AV}$$

$$\frac{5}{ha}=\frac{13}{OV} \qquad \frac{5}{ha}=\frac{OV}{AV}$$

По св-ву бис-сы $\frac{AS}{AO}=\frac{SN}{ON}$

$$\frac{16}{13}=\frac{4+VN}{ON}$$

$ON=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c $\quad ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ $\quad \min(a_4 b_4 c)$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$2^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} \cdot 3^{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} \cdot 5^{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}$

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 8$ $\quad \alpha_1 \geq 8-\alpha_2$

$\beta_1+\beta_2 \geq 14$ $\quad \alpha_2 \geq 8-\alpha_1$

$\gamma_1+\gamma_2 \geq 12$ $\quad \beta_2 \geq 14-\beta_1$

$\gamma_2 \geq 12-\gamma_1$

$\alpha_2+\alpha_3 \geq 12$

$\beta_2+\beta_3 \geq 20$ $\quad \alpha_3 \geq 4+\alpha_1$ $\quad \alpha_1+8-\alpha_1+4+\alpha_1 \leq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$\gamma_2+\gamma_3 \geq 17$ $\quad \beta_3 \geq 6+\beta_1$ $\quad 12+\alpha_1 \leq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$\alpha_1+\alpha_3 \geq 14$ $\quad \gamma_3 \geq 5+\gamma_1$ $\quad \alpha_1 = 5 \quad \gamma_1 = 17$

$\beta_1+\beta_3 \geq 21$ $\quad \alpha_1+4+\alpha_1 \geq 14$ $\quad \alpha_1 \geq 5$ $\quad \beta_1 = 11$

$\gamma_1+\gamma_3 \geq 39$ $\quad \beta_1+6+\beta_1 \geq 21$ $\quad 2\beta_1 \geq \frac{21}{2}$; $\beta_1 = 11$

$\gamma_1+5+\gamma_1 \geq 39$ $\quad 2\gamma_1 \geq 34$ $\quad \gamma_1 = 17$

$$\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_1+\gamma_3 \geq 39 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geq 17 \end{cases}$$

68

29

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 34$ $\quad 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 55$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$ $\quad \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 28$

$\gamma_1+\gamma_3 = 39$

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \geq 68$

$a^2b^2c^2 \vdots 2$ $\quad \gamma_1+\gamma_3 = 39$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 34$ $\quad \gamma_1 = 39-\gamma_3$

$39+29 = 68$ $\quad abc \vdots$

$\cancel{\gamma_1+\gamma_2}$ $\quad \cancel{\gamma_1 \geq 12-\gamma_2}$ $\quad 39-\gamma_3+\gamma_2 \geq 12$

$51 - 17$ $\quad 34$ $\quad \gamma_2+\gamma_3 \geq 17$

$$\begin{cases} \gamma_2 \geq 12-\gamma_1 \\ \gamma_3 \geq 39-\gamma_1 \\ 51-2\gamma_1 \geq 17 \end{cases}$$

$\cancel{\gamma_2 - \gamma_3 \geq}$ $\quad \gamma_2 \geq 17-\gamma_3$

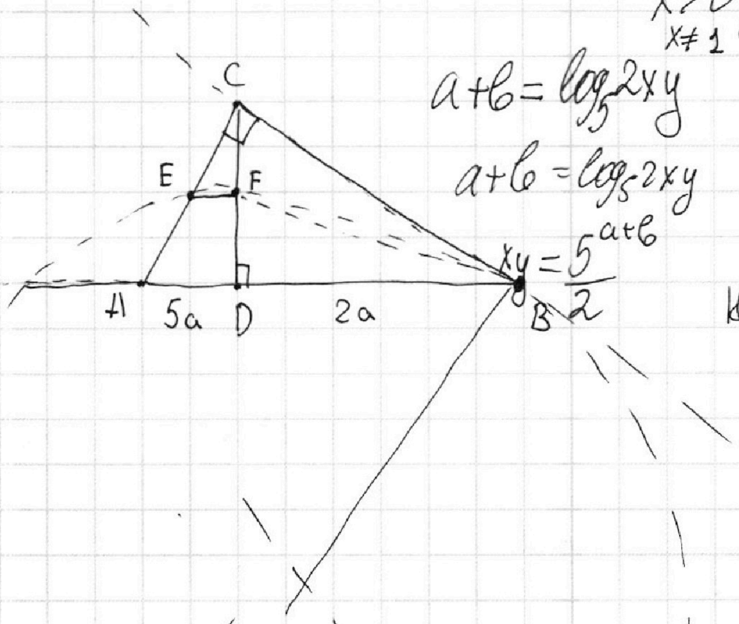
$34 \geq 2\gamma_1$; $\gamma_1 \leq 17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

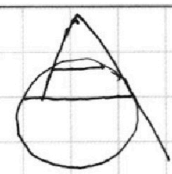
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$x>0 \quad y>0$
$x\neq 1 \quad y\neq 1$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$



$a+b=\log_5 2xy$

$a+b=\log_5 2xy$

$xy=\frac{5^{a+b}}{2}$

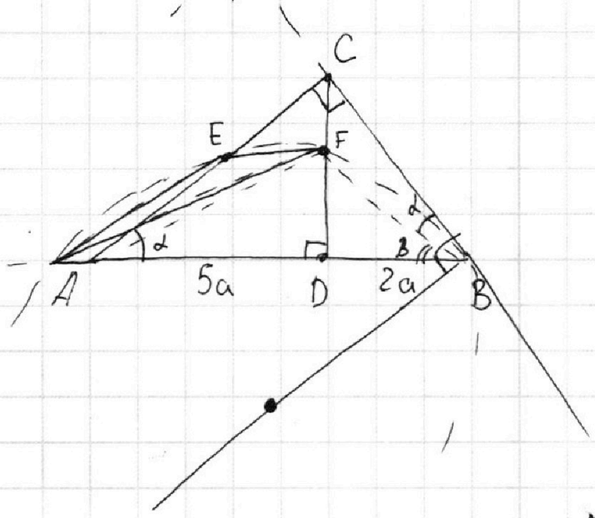
$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$10\arcsin(\cos x)=2\left(\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)\right)$

$\cos x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)$

$x\in[0;\pi]$



$5\pi-10x=\pi-2x$

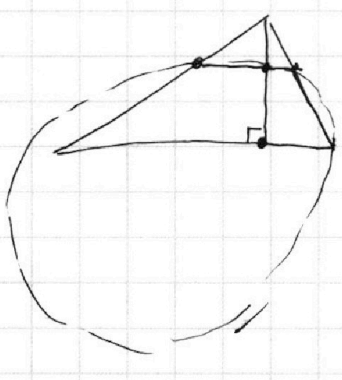
$\cos x\in[-1;1]$

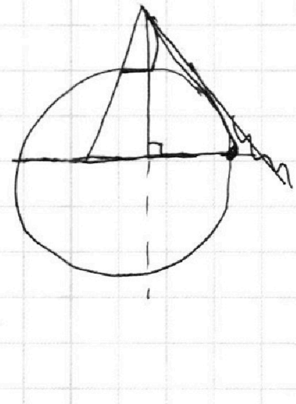
$4\pi=8x$

$x=\frac{4\pi}{8};\frac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x)=x$

$x\in[$





$\log_5 2=a$

$\log_5\frac{1}{2}=a$

$b=\log_5 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a - ? $\exists b$ Чреш.

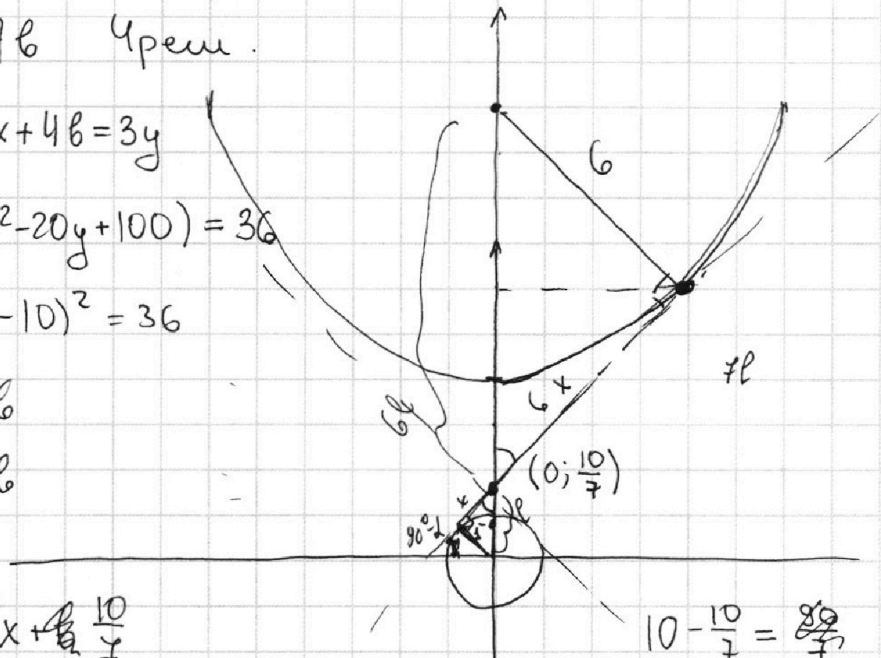
$ax + 4b = 3y$

$x^2 + (y^2 - 20y + 100) = 36$

$x^2 + (y-10)^2 = 36$

$3y = ax + 4b$

$y = \frac{a}{3}x + 4b$



$y = \cancel{a}kx + \cancel{b}\frac{10}{7}$

$10 - \frac{10}{7} = \cancel{\frac{80}{7}}$

$\frac{70}{7} - \frac{10}{7} = \frac{60}{7}$

$\sin(90^\circ - \alpha) =$
$= \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{6 \cdot 7}{60} = \frac{7}{10}$

$x^2 + y^2 = 1$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cancel{1\cos\alpha}\ \cos\alpha$

$\cancel{x^2 + k^2x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{100}{49} = 1}$

$\cancel{(k^2+1)x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{51}{49} = 0}$

$\frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$x^2 + y^2 = 1$

$y^2 \Rightarrow$

$tg(90^\circ - \alpha) = ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

150

$y = \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$

$x^2 + y^2 = 1$

25.

$x^2 + \frac{51}{49}x^2 + \frac{20\sqrt{51}}{49}x + \frac{100}{49} = 1$ k

$3 \cdot 2^2$

75

$y =$

75
2
24
$\times 150$
120
+24
3600

$100x^2 + 20\sqrt{51} + 51 = 0$

$(10x + \sqrt{51})^2 = 0$

150
$\times$ 24
60
+30
3600

$3 \cdot 2^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$a=-b$

$f(a)+f(b)=0$

$\frac{1}{5}$ 5^4

$\log_5^4(2x) - 3\frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cdot\log_{2x}5 - 3$

$f(b)+13=0$

$\log_5^4 y + 4\log_{5y}4\frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$a=\log_5 2x$

$b=\log_5 y$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$

$\frac{4}{\log_y 5}$

$\log_5 y \neq 0$

$y \neq 1$

$f(a)-13=0$

$f(b)+13=0$

$a\neq 0$

$b\neq 0$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3\log_5 y} + 3 = 0$

$3a^5 - 9 = 4 - 9a$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$a=-b$

$ab=\log_5 xy > 0$

$3b^5 + 9b = -13$

$\cancel{3b^5 + 12 + 1 + 9b = 0}$

$3b^5 + 13 + 9b = 0$

$a+b = \log_5 2xy$

$3\log_5^5 y + 12 + 1 + 9\log_5 y = 0$

$3(a^5+b^5) + 9(a+b) = 0$

$\frac{5^{a+b}}{2} = xy$

$3\log_5^5 y + 9\log_5 y + 13 = 0$

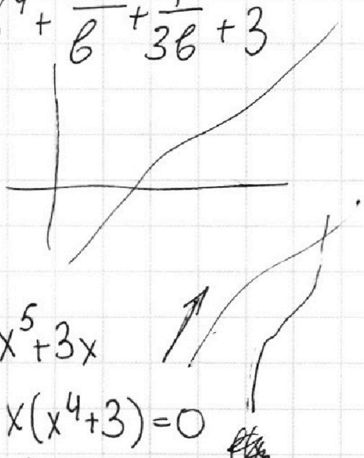
$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$(a^5+b^5) + 3(a+b) = 0$

$\log_5^5 y$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3b} + 3$



$a=-b$

$a^5 + 3a + b^5 + 3b = 0$

$5^0 = \frac{1}{2}$

$a(a^4+3) = -b(b^4+3)$

$\log_5 2x$

$a=b$

$f(a) = -f(b)$

$f(x) = x(x^4+3) = x^5 + 3x$

$x(x^4+3) = 0$

$a^5 + b^5 + 3(a+b)$

$f(a) + f(b) = 0$

$f(a) = -f(b)$

x и $-x$

$f(x) = x^5 + 3x$

$f(-x) = -x^5 - 3x = -(x^5+3x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$ $abc = 2^{14}$ min(abc) abc

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ $abc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ 20

$8+12+14=34$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ 3^{28} 17 5^{39} $a=19$ $c=20$

$14+20+21=55 \to \frac{55}{2}=28$

$a^2b^2c^2 \vdots 2$ 2^{17}

$abc =$ $abc = 2^{17}$ $12+17+39=29+39=68$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$2^{17} 3^{28} 5^{39}$ 34

ac 5^{39} 2^{14}

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$abc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ 2^{14} $a=5^{19}$

a abc=

14

$ap = \sqrt{3Kpq} \cdot 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17}$

$$\begin{cases} ab = K \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = p \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = q \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{cases}$$

$bc = 12$

$cK = \sqrt{3Kpq} \cdot 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{22}$

K, p, q

$a^2b^2c^2 = Kpq \cdot 2^{17} \cdot 5^{34}$

$Kpq \cdot 3$

$abc = \sqrt{Kpq} \cdot 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{27}$ $\sqrt{3Kpq}$

$bq \cdot \cancel{2^{14}} \cdot \cancel{3^{21}} \cdot \cancel{5^{39}} = \sqrt{3Kpq} \cdot \cancel{2^{17}} \cdot \cancel{5^{34}} \cdot \cancel{3^{27}}$

$bq\,5^5 = \sqrt{3Kpq} \cdot 2^3 \cdot 3^6$ $a = 5^{19}$

$b =$

$c = 5^{20}$

$b = \frac{\sqrt{3Kpq} \cdot 2^3 \cdot 3^6}{q \cdot 5^5}$ $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = k$

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 8$

$\alpha_2+\alpha_3 \geq 12$

$\alpha_1+\alpha_3 \geq 14$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$

Пример:

$\alpha_1=5$

$\alpha_2=3$

$\alpha_3=9$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{55}{2} = 27{,}5$

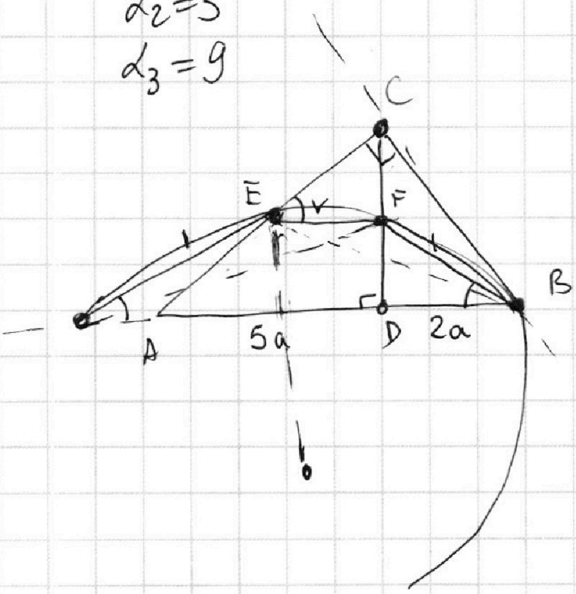
$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 28$

Пример. 7 7 14 29

~~$B_1 =$ 4~~ 7+7 68

7+1~~3~~

1~~3~~+7 =21

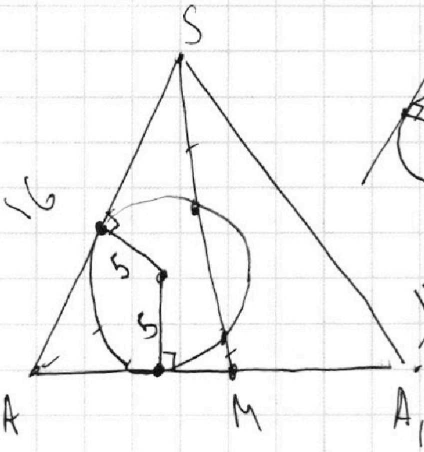


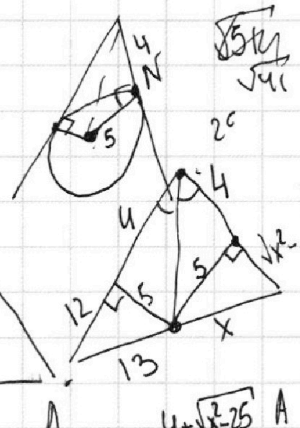
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

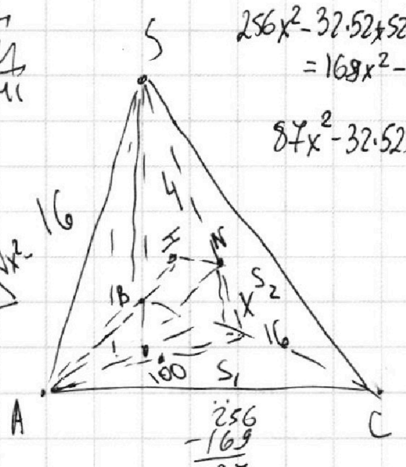
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







$256x^2-32\cdot52x+52^2=$
$=169x^2-169\cdot25$

$87x^2-32\cdot52x$

$\frac{16}{13}=\frac{4+\sqrt{x^2-25}}{x}$

$256-169=87$

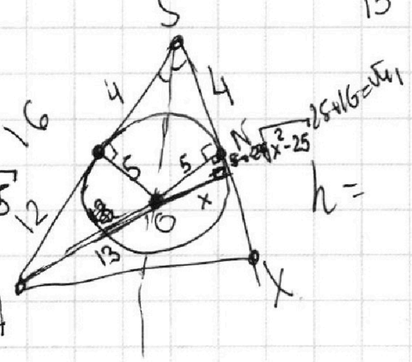
$\cancel{V=\frac{2S_{ABC}S_{BBC}\sin\alpha}{3}}$

$\cancel{\frac{2S_{ABC}S_{BBC}\sin}{3}}$

$\frac{16}{4+\sqrt{x^2-25}}=\frac{13}{x}$

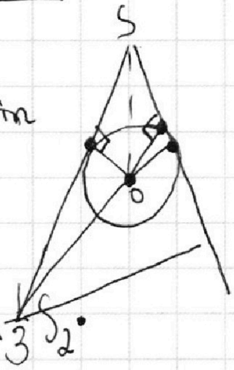
$16x=52+13\sqrt{x^2-25}$

$256x^2-16\cdot2\cdot52+52^2=$
$=169x^2-169$

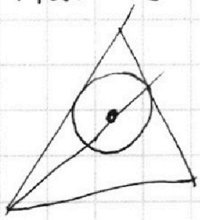


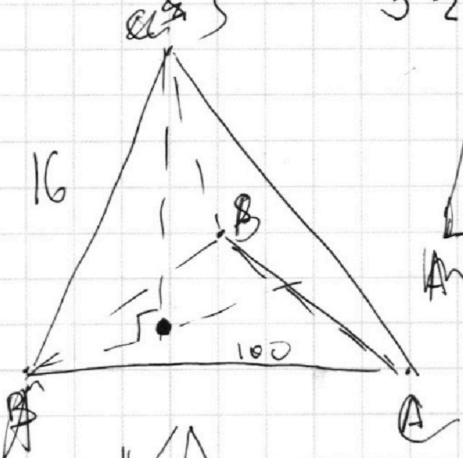
$h=$

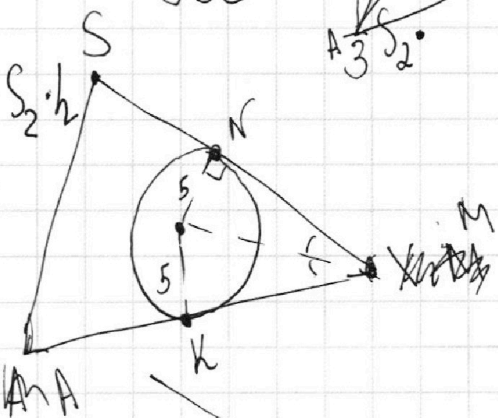
$V=\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3BC}$

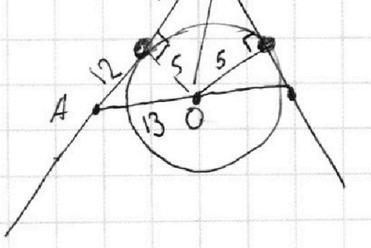


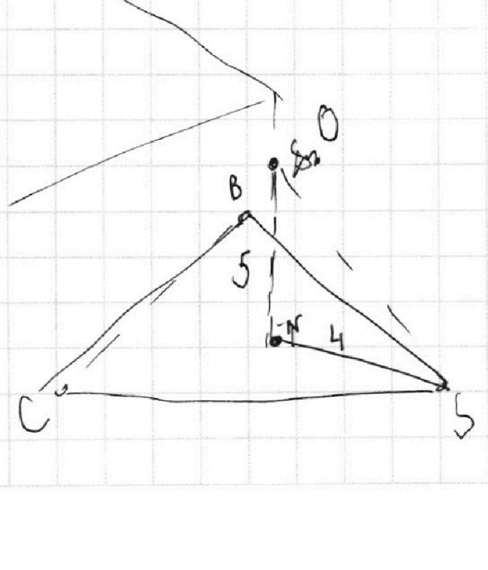
$\frac{1}{3}S_2\cdot h$









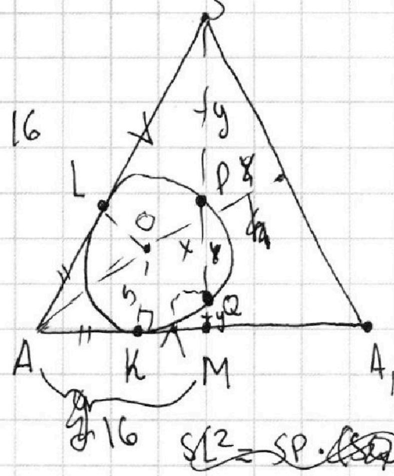


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

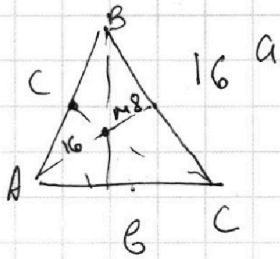
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$S_{ABC}=100$



$m_a \cdot m_b \cdot m_c =$

$\frac{a+b+c}{2}$

$\frac{1}{8}\sqrt{\cancel{(2a^2+2c^2+2b^2-a^2)}}$

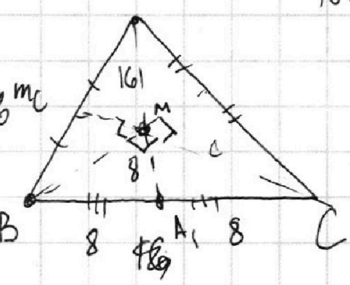
$\cancel{SL^2 = SP \cdot (SP+x)}$

$SL^2 = y\cdot(y+x)$

$KM^2 = y\cdot(y+x)$

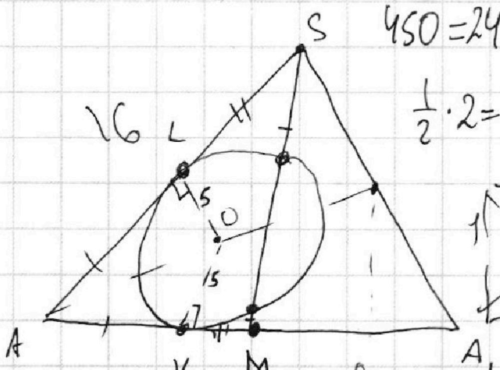
$p(p-a)(p-b)\cancel{(p-c)}=100$

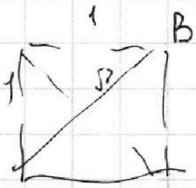
$(a+b+c)\cancel{(a+b)(b+c)}-a)$



$450 = 24(m_c+m_b)+m_b m_c$

$\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$



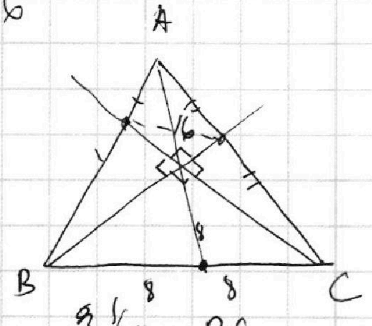


$50 = \frac{1}{2}$

$S=100$ $\frac{100}{6}$

$m_a = 24$

$\cancel{\frac{2}{3} m_c \cdot m_b}$



$\frac{3}{4} S = \frac{1}{2} m_b m_c$

$m_b m_c =$

$\cancel{\frac{1}{3} m_a \cdot BC}$

$\frac{100}{6}$ $\cancel{\frac{1}{6} m_b \cdot c} = \frac{100}{6}$ $m_b m_c = k$

$\cancel{m_b \cdot c = 50}$

$\frac{1}{2} c\cdot m_b = 50$

$450 = 24m_c + 24m_b + m_b m_c$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_b\cdot\frac{2}{3}m_c + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_a\cdot\frac{2}{3}m_c + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_a\cdot\frac{2}{3}m_b = 100$

$\frac{2}{9}(m_b m_c + m_a m_c + m_a m_b) = 100$ $\frac{2}{9}(m_b m_c + 24m_c + 24m_b) = 100$