МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①

1) $ab \vdots 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

2) $bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

3) $ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\varphi_1} \cdot 3^{\varphi_2} \cdot 5^{\varphi_3}$

перемножим все

$(abc)^2 \vdots 2^{\overset{34}{(7+13+14)}} \cdot 3^{\overset{43}{(11+15+17)}} \cdot 5^{\overset{75}{(14+18+43)}}$

Из 1) $\alpha_1 + \beta_1 \geq 7$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14$

2) $\beta_1 + \varphi_1 \geq 13$

$\beta_2 + \varphi_2 \geq 15$

$\beta_3 + \varphi_3 \geq 18$

3) $\alpha_1 + \varphi_1 \geq 14$

$\alpha_2 + \varphi_2 \geq 17$

$\alpha_3 + \varphi_3 \geq 43$

Тогда abc как минимум

$2^{17} \cdot 3^{43/2} \cdot 5^{75/2}$

то есть $\alpha_1 + \beta_1 + \varphi_1 \geq 17$

$\alpha_2 + \beta_2 + \varphi_2 > 21{,}5$

$\alpha_3 + \beta_3 + \varphi_3 > 37{,}5$

Подберем $\alpha_1, \beta_1, \varphi_1$
$= 4 \quad = 3 \quad 10$

удовлетв. нер-вам и сумма $=17$, значит меньше невозможно

Подберем $\alpha_2, \beta_2, \varphi_2$
$= 7 \quad = 4 \quad = 11$

сумма 22, т.к это на 0,5 ~~≥ 21,5~~ больше 21,5 и удовлетв. нера-вам, то меньше взять не получится

Подберем $\alpha_3, \beta_3, \varphi_3$
$= 21 \quad = 0 \quad = 22$

они удовлетв. всем нер-вам

сумма $43 > 37{,}5$, меньше подобрать не получится т.к из последн нер-ва $\alpha_3 + \varphi_3 \geq 43$

тогда сумма $\alpha_3 + \beta_3 + \varphi_3 \geq 43$

Т.к мы

Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\varphi_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\varphi_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\varphi_3} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(y)$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x$

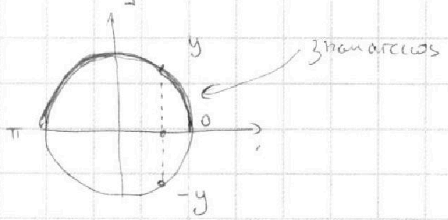
тогда урав примет вид $\quad x = \frac{\pi}{2} - y$

$5\arccos(\cos y) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - y = 2\pi - y$

1) $\arccos(\cos y) = y - 2\pi k$ при $y \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $\arccos(\cos y) = -(y - 2\pi k) = 2\pi k - y$ при $y \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

Т.к $\arccos$ принимает значения от 0 до π, а $\cos(y) = \cos(-y)$



1) Тогда при $y \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

$5\arccos(\cos y) = 2\pi - y$

$5(y - 2\pi k) = 2\pi - y$

$5y - 10\pi k = 2\pi - y$

$6y = 10\pi k + 2\pi$

$y = \frac{10\pi k + 2\pi}{6}$

Заменим $y = \frac{\pi}{2} - x$

$6\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 10\pi k + 2\pi$

$3\pi - 6x = 10\pi k + 2\pi$

$6x = \pi - 10\pi k$

$x = \frac{\pi - 10\pi k}{6}$ ~~при~~ $k \in \mathbb{Z}$

При $2\pi k \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$2\pi k - \frac{\pi}{2} \le -x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{2} - 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} - 2\pi k$

2) При $y \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$

$5\arccos(\sin y) = 2\pi - y$

$5(2\pi k - y) = 2\pi - y$

$10\pi k - 5y = 2\pi - y$

$4y = 10\pi k - 2\pi$

$4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 10\pi k - 2\pi$

$2\pi - 4x = 10\pi k - 2\pi$

$x = \frac{4\pi - 10\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

При $-\pi + 2\pi k \le \frac{\pi}{2} - x \le 2\pi k$

$-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k \le -x \le -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\frac{\pi}{2} - 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi - 10\pi k}{6}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2} - 2\pi k; \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{4\pi - 10\pi k}{4}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2} - 2\pi k; \frac{3\pi}{2} - 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

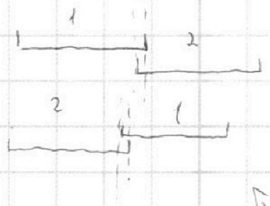
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) Продолжение

$$\begin{cases} 7|b+1| < 2c \\ 7|b| < 3c \end{cases}, \quad c \geqslant 1$$

$$\begin{cases} |b+1| < \frac{2c}{7} \\ |b| < \frac{3c}{7} \end{cases}$$

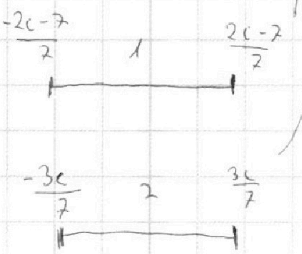
, чтобы существ. b удовлетв. пер-ву, надо, чтобы



, то есть

$$\begin{cases} \frac{-2c}{7} < b+1 < \frac{2c}{7} \\ \frac{-3c}{7} < b < \frac{3c}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) \ \frac{-2c-7}{7} < b < \frac{2c-7}{7} \\ 2) \ \frac{-3c}{7} < b < \frac{3c}{7} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{2c-7}{7} \geqslant -\frac{3c}{7} \\ \frac{3c}{7} \geqslant \frac{-2c-7}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c-7 \geqslant -3c \\ 3c \geqslant -2c-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5c \geqslant 7 \\ 5c \geqslant -7 \end{cases}$$

$$c \geqslant \frac{7}{5}$$

$$\sqrt{9a^2+1} \geqslant \frac{7}{5}$$

$$9a^2+1 \geqslant \frac{49}{25}$$

$$9a^2 \geqslant \frac{24}{25}$$

$$a^2 \geqslant \frac{24}{9\cdot 25}$$

$$a^2 \geqslant \frac{8}{75}$$

$$\left[\begin{array}{l} a \geqslant \sqrt{\frac{8}{75}} \\ a \leq -\sqrt{\frac{8}{75}} \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{8}{75}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{8}{75}}; +\infty\right)$

(4)

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \underset{(1)}{(x^2+14x+y^2+45)}\underset{(2)}{(x^2+y^2-9)} = 0 \end{cases}$$

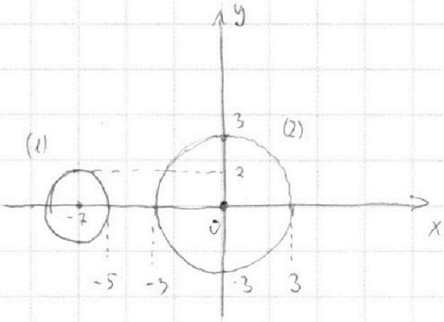
$$\begin{cases} x + 3y - 7b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

(1) $x^2+14x+y^2+45=0$

$x^2+14x+49+y^2-4=0$

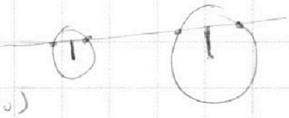
$(x+7)^2+y^2=4$ – окружность с центром в точке $(-7;0)$ и радиусом 2

(2) $x^2+y^2=9$ – окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом 3



$x+3ay-7b=0$ – прямая

чтобы прямая с двумя окружн. имела 4 пересечения (то есть у системы было 4 реш.) надо чтобы расстояние от этой прямой до центров обеих окр. было меньше их радиусов (*)



Расстояние от точки с коорд $(x_0;y_0)$ до прямой $nx+ty+c=0$ равно:

$$\rho = \frac{|nx_0+ty_0+c|}{\sqrt{n^2+t^2}}$$, тогда расст. от прямой $x+3ay-7b=0$ до центра (1) окр. $(-7;0)$ равно: $\frac{|-7\cdot1+3a\cdot0-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} = \frac{|7b+7|}{\sqrt{9a^2+1}}$

Расст от этой же прямой до центра (2) окр равно: $\frac{|1\cdot0+3a\cdot0-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} = \frac{|7b|}{\sqrt{9a^2+1}}$

Из утвержд. (*) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{7|b+1|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2 \\ \frac{|7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 3 \end{cases}$$ $|\cdot\sqrt{9a^2+1}$, т.к. $\sqrt{9a^2+1} \geq 1$

, Пусть $\sqrt{9a^2+1} = c$, тогда $c \geq 1$

$$\begin{cases} 7|b+1| < 2c \\ 7|b| < 3c \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5 Продолжение

Получили, что корень(у) (1) и (2) - единств. и $t_0 + n_0 = 0$

значит другого знач $t+n$ принимать не может

~~Тогда обратн. замена~~

Тогда обр. замена

$\log_7 6x + \log_7 y = 0$

$\log_7 6xy = 0$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Так же убедимся что корень (1) и (2) ~~это~~ это не $x = \frac{1}{6}$ и $y = 0$, значит наши корни под ОДЗ

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(5) $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$ ОДЗ: $x>0$, $x \neq \frac{1}{6}$

С учетом ОДЗ $\Updownarrow$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} - 4$, Пусть $\log_7 6x = t$, тогда

т.к $x \neq \frac{1}{6}$, то $t \neq 0$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t$, т.к $t \neq 0$

(1) $t^5 + 4t - 3,5 = 0$ $g(t) = t^5 + 4t - 3,5$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$ ОДЗ: $y>0$, $y \neq 1$

С учетом ОДЗ $\Updownarrow$

$\log_7^4 y + \frac{6\cdot 1}{\log_7 y} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 y} - 4$ пусть $\log_7 y = n$, тогда $n \neq 0$, т.к $y \neq 1$

$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{n} - 4 \quad | \cdot n$, т.к $n \neq 0$

$n^5 + 6 - 2,5 + 4n = 0$

(2) $n^5 + 4n + 3,5 = 0$ Пусть $f(n) = n^5 + 4n + 3,5$ $f'(n) = 5n^4 + 4 > 0$

т.к $f'(n)$ всегда >0, то $f(n)$ - монотонно возраст.

значит $f(n) = 0$ - имеет один корень

Аналогично с $g(t)$, $g'(t) = 5t^4 + 4$, значит $g(t) = 0$ - монотонна и имеет 1 корен

Заметим, что (1) $t^5 + 4t = 3,5$, т.к функц. имеют вид $x^5 + 4x$ и

(2) $n^5 + 4n = -3,5$ ~~из этого~~ $x^5 + 4x = -((-x)^5 + 4(-x))$

значит, если корень первого равен t_0, то корень второго ~~n_0~~ ~~t_0~~ $n_0 = -t_0$

Сложим (1) и (2), получим: $t^5 + n^5 + 4(t+n) = 0$

$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$

$(t+n)(\underbrace{t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4}_{a}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+n=0 \\ a=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=-n \\ a=0 \end{array}\right.$

Из доказанного урав (1) и (2) имеют по одному корню и $t_0 = -n_0$, значит

~~[illegible]~~ $t_0 + n_0 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$7b+7-2\sqrt{9a^2+1}<0$

$7b\quad -3\sqrt{9a^2+1}<0$

$21b+21<c$

$14b<c$

$7b+21<0$

$2<3$

$1<2$

$b\geqslant 0$

$ab: 2^{7}3^{11}5^{14}$

$ac: 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$

$bc: 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$

$a=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}$

$b=2^{\beta_1}3^{\beta_2}5^{\beta_3}$

$c=2^{\varphi_1}3^{\varphi_2}5^{\varphi_3}$

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1\geqslant 7\\ \alpha_2+\beta_2\geqslant 11\\ \alpha_3+\beta_3\geqslant 14\end{cases}$$

$7|b+1|<2\cdot c\quad c\geqslant 1$

$7|b|<3$

$|b+1|<\frac{2}{7}$

$|b|<\frac{3}{7}$

$-\frac{2}{7}<b+1<\frac{2}{7}$

$-\frac{9}{7}<b<\frac{-5}{7}$

26+12

17

106

32+43

75

$|b+1|<\frac{2c}{7}\qquad -\frac{2c}{7}<b+1<\frac{2c}{7}$

$|b|<\frac{3c}{7}\qquad -\frac{3c}{7}<b<\frac{3c}{7}$

$-\frac{2c}{7}<-1$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{-2c-7}{7}<b<\frac{2c-7}{7}\\ \frac{-3c}{7}<b<\frac{3c}{7}\end{gathered}}$$

$-\frac{9}{7}\quad -\frac{5}{7}\quad -\frac{3}{7}\quad \frac{3}{7}$

0

$\frac{-3c}{7}\leq\frac{2c-7}{7}$

$\frac{2c-7}{7}$

$\alpha\quad\beta\geqslant 11\qquad 65$

$\beta\cdot\varphi\geqslant 15\qquad 80$

$\varphi\quad\alpha\geqslant 17\qquad 7\ 4\ 11$

$\alpha\quad\beta\geqslant 14\qquad 7\quad 7$

$\beta\quad\varphi\geqslant 18\qquad \alpha\ \ 11\ \varphi\ \ \beta$

$\alpha\quad\varphi\geqslant 43\qquad 22\ \ 21\ \ 0$

$\alpha_1+\beta_1\geqslant 7$

$\beta_1+\varphi_1\geqslant 13$

$\alpha_1+\varphi_1\geqslant 14$

$\left.\begin{matrix}\alpha_1=7\\ \beta_1=0\\ \varphi_1=13\end{matrix}\right\}20$

$\varphi\quad 3$

$3\quad 10$

$\alpha_1\quad\beta_1\quad\varphi_1$

$3\quad 4$

$4\quad 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

① $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

$\log_{36x^2}343 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x}$

ОДЗ:
$\begin{cases} x>0 \\ x\neq\frac{1}{6}\end{cases}$

$\begin{cases} y\neq 1 \\ y>0\end{cases}$

$-2\frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\frac{1}{\log_7 6x}$

$\log_7 6x = t$, тогда $t\neq 0$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$

$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0$

$t^5 + 4t - 3{,}5 = 0$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$\log_7 y = n$

$\log_7 6x = t$

$t^4+n^4 - tn(t^2+n^2) + t^2n^2 + 4$

$(t^2+n^2)^2 - tn(t^2+n^2) - t^2n^2 + 4$

$a^2 \quad b \quad a \quad b^2$

$t^2+n^2 = (t+n)^2 - 2tn$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 + \frac{4}{b^2} = 0$

$1+4$

$n^4 - \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4$

$n^5 + 6 - 2{,}5 + 4n = 0$

$n^5 + 4n + 3{,}5 = 0$

$n^4 + 4$

$t^5 + 4t - 3{,}5 = 0$

$t^n + n^5 + 4(n+t) = 0$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0$

$(t^4+n^4 - tn(t^2+n^2) + t^2n^2 + 4) = 0$

$-tn(\underbrace{t^2+tn+n^2}_{>0})$

a^2+a+1

$t^4+n^4+t^2n^2 \overset{>0}{>} tn(t^2+n^2) - 4$

$\underbrace{\left(\frac{t^4}{n}\right) + \left(\frac{t}{n}\right)^2 + 1}_{\geq 1} \geq 1$

$t^2n^2+n^2 \geq n^2$

$t^3n + tn^3 - 4$

$t^4 > t^3 + t - 4$

$\underbrace{t^4+n^4+4}_{\geq 4} > tn(\underbrace{t^2+tn+n^2}_{>0})$

$3t^3 - t^3 - t + 4$

$3t^3 - 2t - 1$

$t^4+n^4 = (t^2+n^2)^2 - 2t^2n^2$

t^4

центр 1) $(-7;0)$

2) $(0;0)$

расст $x + 3ay - 7b = 0$

$ax+by+c=0$

$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a=1$

$b=3a$

$c=-7b$

$7|b+1| \geq 0$

$7|b| \geq 0$

$\sqrt{9a^2+1} \geq 1$

$\frac{|-7-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2$

$7|b+1| - 2\sqrt{9a^2+1} < 0$

$7|b| - 3\sqrt{9a^2+1} < 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

10 23 нон

б 4545556   17 $2 \geq 42$ $3 \geq 43$ $4 \geq 75$

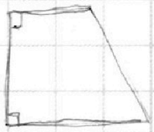
$ab: 2^2 3^{11} 5^{14}$ $abc - ? = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

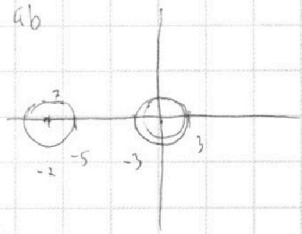
$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$ $11+15+17=43$ $14+13+43$

$ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$ 26 $32 - 75$

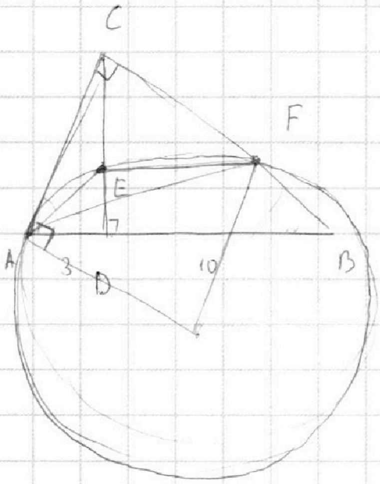
$(abc)^2 = 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

$2^{17} 3^{21,5} 5^{32,5}$





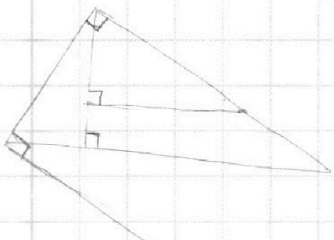
$y + 3ay - 7b$

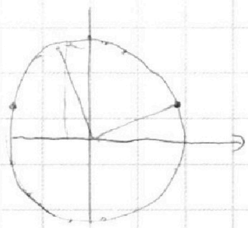


$\frac{AB}{BD} = 1,3$ $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h$

$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4$

$(x+7)^2 + y^2 = 4$





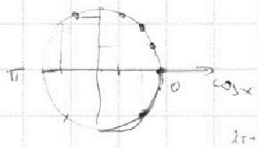
a

$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$a = 2^7 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$b = 3^1 \cdot 5^4 \Rightarrow c = 2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$

$abc = 2^{20}$



$2\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$ при $\frac{\pi}{2} - x \in (0; \pi)$

$x - \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} - x \in (-\pi; 0)$

$5(x - 2\pi k)$ при $\frac{\pi}{2} - 2\pi k \geq x \geq -\frac{\pi}{2} - 2\pi k$

$-\frac{\pi}{2} - 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi k$

$\arccos(\cos(x)) = x$ при $x \in [0; \pi]$

$5x - 10\pi k = \frac{3\pi}{2} + x$ $= -x$ при $x \in [-\pi; 0]$

$4x = \frac{3\pi}{2} + 10\pi k$ $= x - 2\pi$ при $x \in [2\pi; 3\pi]$

$y = \frac{3\pi}{8} + \frac{10}{4}\pi k$ при $y \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$

при $x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k] = \arccos(\cos x) = x - 2\pi k$

$y = \frac{\pi}{2} - x$ $0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$[-\pi; 0]$ $-\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$

$x - \pi + \; -\frac{\pi}{2} + 2\pi$

$-(x - 2\pi k)$