МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}$

$ab \cdot bc \cdot ca \,\vdots\, 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, но так как $ab \cdot bc \cdot ca$

полный квадрат, то он должен делиться на чётные степени

своих простых множителей $\Rightarrow$ $ab \cdot bc \cdot ca \,\vdots\, 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{59}$

$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} \,\vdots\, 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ $\quad abc \,\vdots\, ac \,\vdots\, 5^{30}$

$\Rightarrow \quad abc \geqslant 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

При $\quad a = 2^{7} \cdot 3^{8} \cdot 5^{10}$

$b = 2^{2} \cdot 3^{2} \cdot$

$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

а Условия выполняются и abc наименьшее

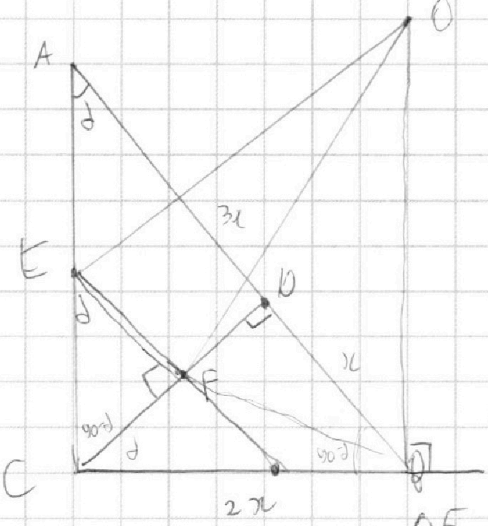
Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



O – центр окружности

$DB = x$ $\quad AD:DB = 3:1$

$AD = 3x$

$CD^2 = AD \cdot DB$ (квадрат высоты)

$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{3}x$

$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}x$

$CB = \sqrt{DB^2 + CD^2} = 2x$

$EF \parallel AB \Rightarrow CEF \sim CAD$

$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CD} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x} = 2$

$OE = OF$ как радиусы, $EF \parallel AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

~~$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ при $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$~~ $x \in [0; \pi]$

~~2) $\arcsin(\cos x)$~~

1) $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi]$ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

2) $x \in [2\pi k + \pi; 2\pi k + 2\pi]$ $\arcsin(\cos x) = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$ (k целое)

1) $5\arcsin(\cos x) = \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$2\pi + 10\pi k = 6x$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k$ $\qquad 2\pi k \le \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi k + \pi$

$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi k \le \frac{\pi}{3} & k \le 1 \\ -\frac{2\pi}{3} \le \frac{1}{3}\pi k & -2 \le k \end{cases}$

k целое $\Rightarrow$ ~~$k = 0$ $x = \frac{\pi}{3}$~~

$k \in \{-2; -1; 0; 1\}$

2) $5\arcsin(\cos x) = 5x - \frac{15\pi}{2} - 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$4x = 8\pi + 10\pi k$ $\qquad x = 2\pi + \frac{5\pi k}{2}$

$2\pi k + \pi \le 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \le 2\pi k + 2\pi$

$\begin{cases} -\pi \le \frac{\pi k}{2} & -2 \le k \\ \frac{\pi k}{2} \le 0 & k \le 0 \end{cases}$ $\qquad k \in \{-2; -1; 0\}$

$x \in \{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\}$

Ответ: $x = -3\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = 2\pi$; $x = \frac{\pi}{3}$;
$x = -\frac{4}{3}\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \qquad y=\frac{3b-ax}{2}$$

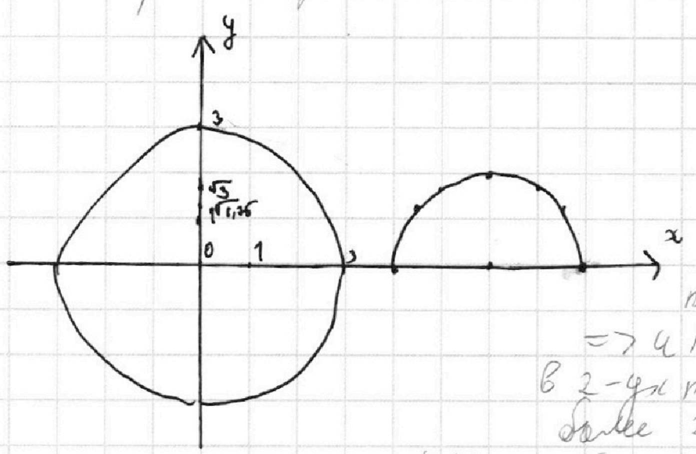
$x^2+y^2=9$ — окружность центр 0,0, радиус 3

$x^2+y^2-12x+32=0 \qquad y=\sqrt{12x-x^2-32}=\sqrt{4-(x-6)^2}$

Построим графика:

$y=\sqrt{4-(x-6)^2}$ построим по точкам $x\in[4,8]$ симметрично относительно $x=6$

x	4	6	5	4,5	5,5	7
y	0	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{1,75}$	$\sqrt{1,75}$	$\sqrt{3}$



прямая $y=\frac{3b-ax}{2}$ должна пересекать графики в 4 точках $\Rightarrow$ 4 ~~окруж~~ первый и второй графики в 2-ух точках (с каждым отдельно не более 2-ух пересечений)

Для удобства $k=-\frac{a}{2}$, $p=\frac{3b}{2}$

прямая $y=kx+p$

$y=kx+p \qquad x^2+y^2-9=0 \qquad x^2+(kx+p)^2-9=0$

$x^2(1+k^2)+2kpx+p^2-9=0 \qquad D=4k^2p^2-4k^2p^2-4p^2+36+36k^2=$
$=36k^2-4p^2+36>0$

$x^2+y^2-12x+32=0 \qquad x^2(1+k^2)+(2kp-12)x+p^2+32=0$

$D=4k^2p^2+144-48kp-4k^2p^2-4p^2-4\cdot 32-4\cdot 32k^2=$
$=16-48kp-4p^2-128k^2>0$

$$\begin{cases} 36k^2-4p^2+36>0 \\ 16-48kp-4p^2-128k^2>0 \end{cases}$$

~~$9k^2-p^2+9>0 \qquad p^2<9+9k^2$~~

~~$8-6kp-p^2-23k^2>0$~~

~~$p^2<\frac{8-23k^2}{6k+1} \qquad p^2>0$~~ $\Rightarrow$ ~~$\begin{cases} 0<8+9k^2 \text{ всегда верно} \\ 0<\frac{8-23k^2}{6k+1}=\frac{\left(k-\sqrt{\frac{8}{23}}\right)\left(k+\sqrt{\frac{8}{23}}\right)}{8k+1} \end{cases}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} 36k^2-4p^2+36>0 \\ 16-48kp-4p^2-128k^2>0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &9k^2-p^2+9>0 \\ &4-6kp-p^2-32k^2>0 \end{aligned}$$

$9k^2+9>p^2 \qquad p\in\left(-3\sqrt{k^2+1},\ 3\sqrt{k^2+1}\right)$

$4-6kp-p^2-32k^2>0$

$p^2+6kp+32k^2-4>0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x \neq 1,\ x > 0 \quad 5y \neq 1 \quad y > 0$ $\sqrt{5}$ $t = 5y$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2\log_3 x} - 8$ $\log_3^4(t) + \frac{2}{\log_3 t} = \frac{11}{2\log_3 x} - 8$

$\log_3^5 x + 8\log_3 x = -3{,}5$ $\log_3^5 t + 8\log_3 t = 3{,}5$

Сложим

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t + 8\log_3 x + 8\log_3 t = 0$$

Посмотрим на многочлен вида $a^5 + b^5$ он имеет единственный корень $a = -b$, и его знак совпадает со знаком $a+b$, так что $a^5 + b^5$ можно представить как $(a+b)P(a,b)$, где $P(a,b) \geq 0$ *

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t = (\log_3 x + \log_3 t)(P(\log_3 x, \log_3 t))$$

$$(\log_3 x + \log_3 t)(P(\log_3 x, \log_3 t) + 8) = 0$$

$$P(\log_3 x, \log_3 t) + 8 > 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0$$

$\log_3(xt) = 0 \quad xt = 1 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$

* $a^5 + b^5 = (a+b)(\overset{\geq 0}{a^4 - a^3b + a^2b^2 - b^3a + b^4})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Посмотрим на пару $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

Рассмотрим прямую $y = -3x + C$

Пусть $y_1 = -3x_1 + C_1$ $y_2 = -3x_2 + C_2$

Тогда $3x_2 + y_2 = C_2$ $3x_1 + y_1 = C_1$ $33 = C_2 - C_1$

Значит A и B лежат на параллельных прямых

$y = -3x + C_1$, $y = -3x + C_2$ где $C_2 - C_1 = 33$

Прямая PQ - $y = -3x$, прямая QR $y = -3x + 60$

Значит через $OPQR$ проходят прямые вида $y = -3x + C$ с $C \in [0; 60]$

Посмотрим сколько целых точек лежит внутри $ORQP$ и на прямой $y = -3x + C$.

Если C нецелое, то y и x нецелые (0 точек)

Если $C \equiv_3 0$, тогда $y \equiv_3 0$, $y \in [0; 42] \Rightarrow$ (15 точек)

~~прямая~~ Если $C \equiv_3 1$, то $y \equiv_3 1$ $y \in [0; 42] \Rightarrow$ (14 точек)

Если $C \equiv_3 2$, то $y \equiv_3 2$ $y \in [0; 42]$ (14 точек)

$C_2 - C_1 = 33$ $C_2 = C_1 + 33 \Rightarrow C_1 \equiv_3 C_2$,

Если $C_2 \equiv 0$, то у $C_2 \in [33; 60]$ есть парный C_1, в прямых с C_1 и C_2 по 15 точек $\Rightarrow \left(\frac{60-33}{3}+1\right) \cdot 15 \cdot 15$ способов

Если $C_2 \equiv_3 1$ $C_2 \in [34; 58]$, по 14 точек $\left(\frac{58-34}{3}+1\right) \cdot 14^2$ способов

$C_2 \equiv_3 2$ $C_2 \in [35; 59]$, по 14 точек $\left(\frac{59-35}{3}+1\right) \cdot 14^2$ способов

$10 \cdot 15^2 + 9 \cdot 14^2 + 9 \cdot 14^2 = 5778$

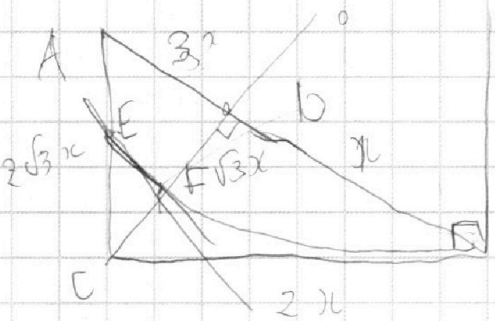
Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				

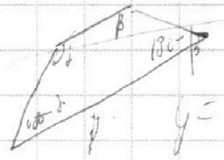
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$8 \quad 9k^2 > (p-3)(p+3)$

$k^2 > \frac{(p-3)(p+3)}{9} \quad p \in (-3; 3)$

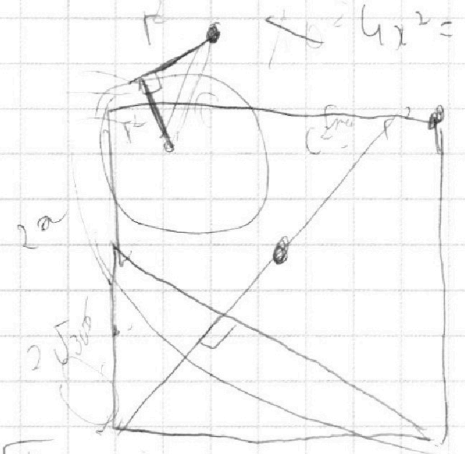


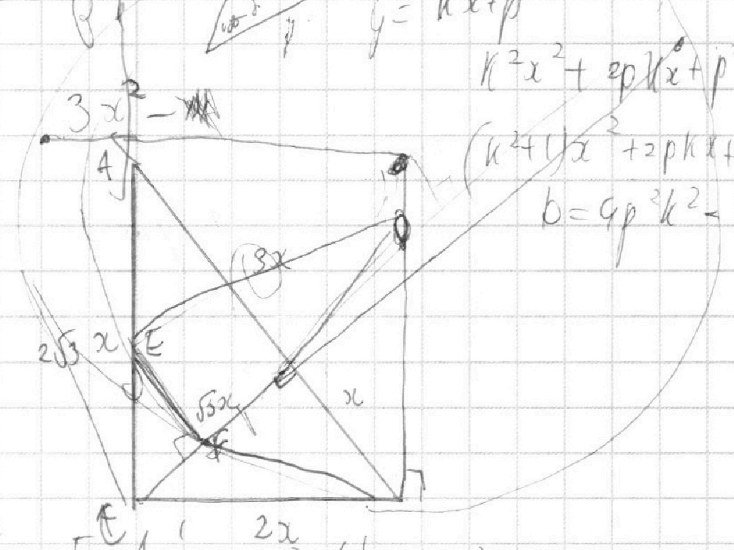
$y = kx + p$

$k^2x^2 + 2pkx + p^2$

$(k^2+1)x^2 + 2pkx + p^2 - 9 = 0$

$D = 4p^2k^2 - 4p^2k^2$





$2\sqrt{10}$

$64+9=73$

$\frac{CE}{CF} = 2 \quad CE \cdot EA' \quad EA' = 4y^2$

$CE \cdot \quad = 4x^2$

$ax + 2y - 3b = 0 \quad y = \frac{3b - ax}{2} \quad \left(\frac{3b-ax}{2}\right)^2 = \frac{9b^2 + a^2x^2 - 6abx}{4}$

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

$x^2 + \left(\frac{3b - ax}{2}\right)^2 - 9 = 0$

$\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)x - \frac{6ab}{4}x - 9 + \frac{9b^2}{4} = 0$

в точке 8

$D = \frac{36 \cdot 9a^2b^2}{4} - (4 + a^2)\left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) =$

$8k + p > 0 \quad p > -8k$

$(8 - 23k^2) \quad \frac{\left(k - \sqrt{\frac{8}{23}}\right)\left(k + \sqrt{\frac{8}{23}}\right)}{6k+1}$

$4k + p > 0$

$p > -4k$

$\sqrt{32}k + \frac{3}{\sqrt{32}}p$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab \vdots 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$ $\quad bc \vdots 2^{14}3^{13}5^{13}$ $\quad ac \vdots 2^{19}3^{18}5^{30}$

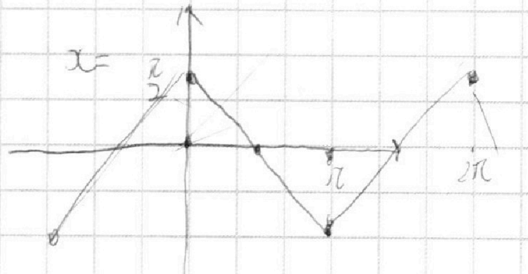
$abc \geq$ НОК(ab, bc, ac) $\quad (abc \vdots ab, abc \vdots bc, abc \vdots ac)$

НОК$(ab, bc, ac) \geq 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

При $a = 2^{7}\cdot 3^{6}\cdot 5^{\cancel{15}\,17}$

$b = 2^{6}\cdot 3^{6}\cdot \cancel{5^{13}}$

$c =$ 13



$x = \frac{\pi}{2}$

$\frac{9+14+19}{2} = 42$ 21 3 3·3

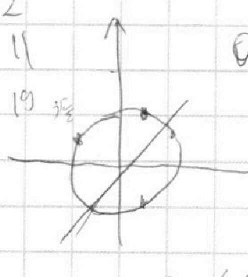
$x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$\cos x < 0$



$\arcsin(\cos$

$x + y = 10$

$y + z = 13$

$z + x = 18$

$y = x$: $x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$

$x = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k$

$x \in [2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi]$

$x = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$

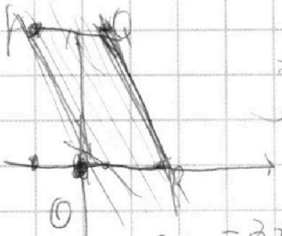
$\frac{\pi}{2} - x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 \cdot 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2}\log_x 243 \cdot 8 =$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3x_1 - y_1 + C = 0$

$y_1 = -3x_1 + C \qquad y_1 = -3x_1 + C$

$y = -3x + C_1$

$C_2 - C_1 = 33$

$OP = \frac{42}{14}$

$= -3x$

2250

$60 - 33$

1764

$x^5 - x^4 y + x^3 y^2 - x^2 y^3 + x y^4 - y^5$