



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

в/1.

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}$$

$$ab \cdot bc \cdot ca : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}, \text{ но так как } ab \cdot bc \cdot ca$$

полный квадрат, то он должен делиться на все степени
своих простых множителей $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ca : 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \quad abc : ac : 5^{30}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Пусть $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$

$$b = 2^2 \cdot 3^2$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

и условия выполняются и abc минимально

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

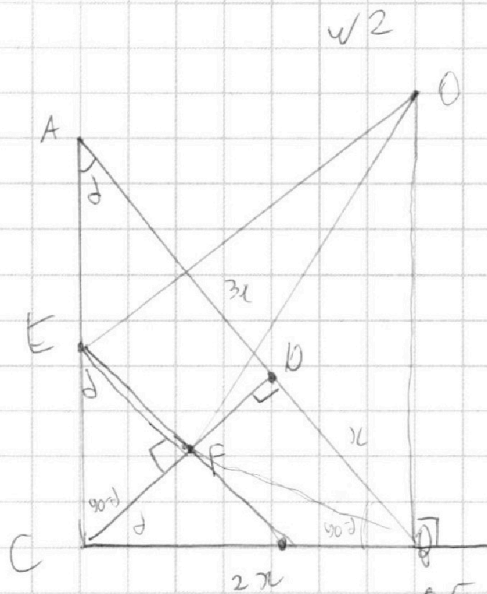
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O - центр окружности

$$OB = x \quad AO:OB = 3:1$$

$$AB = 3x$$

$$CB^2 = AO \cdot OB \quad (\text{теорема Пифагора})$$

$$CB = \sqrt{AO \cdot OB} = \sqrt{3}x$$

$$AC = \sqrt{CB^2 + AB^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$CE = \sqrt{OB^2 + CB^2} = 2x$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAB$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x} = 2$$

$OE = OF$ как радиусы, $EF \parallel AB$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{2}$$

1) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ $x \in [0, \pi]$

2) $\arcsin(\cos x) = x - \frac{3\pi}{2}$ $x \in [2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi]$

1) $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi]$ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

2) $x \in [2\pi k + \pi; 2\pi k + 2\pi]$ $\arcsin(\cos x) = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$ (к угловое)

1) $5 \arcsin(\cos x) = \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = 2 + \frac{\pi}{2}$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \quad 2\pi k \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + \pi k \leq \frac{\pi}{3} & k \leq 0 \\ -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}k & -\frac{1}{2} \leq k \leq 1 \end{cases}$$

k целое $\Rightarrow k = 0$ $x = \frac{\pi}{3}$
 $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$

2) $5 \arcsin(\cos x) = 5x - \frac{15\pi}{2} - 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$$4x = 16\pi + 10\pi k \quad x = 2\pi + \frac{5\pi k}{2}$$

$$2\pi k + \pi \leq 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \leq 2\pi k + 2\pi$$

$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi k}{2} - 2 \leq k \\ \frac{\pi k}{2} \leq 0 & k \leq 0 \end{cases} \quad k \in \{-2, -1, 0\}$$

$$x \in \{-3\pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi\}$$

Ответ: $x = -3\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = 2\pi$; $x = \frac{\pi}{3}$;

$x = -\frac{4}{3}\pi$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

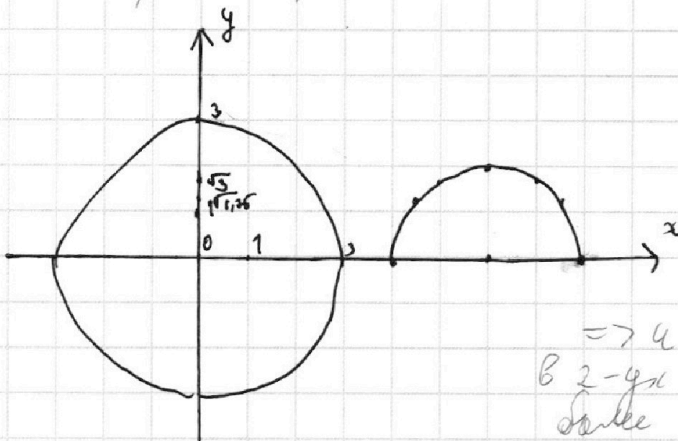


$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \quad \text{н/ч.} \quad y = \frac{3b-ax}{2}$$

$x^2+y^2=9$ - окружность с центром 0,0, радиусом 3

$$x^2+y^2-12x+32=0 \quad y = \sqrt{12x-x^2-32} = \sqrt{4-(x-6)^2}$$

Построим графики:



$y = \sqrt{4-(x-6)^2}$ построим по точкам $x \in [4, 8]$ линейно-сплошная аппроксимация

x	4	6	5	4,5	5,5	7	x=6
y	0	2	√3	√1,75	√1,75	√3	

прямая $y = \frac{3b-ax}{2}$ должна пересекать график $\sqrt{\dots}$ в 4 точки \Rightarrow 4 точки пересечения первой и второй графиков в 2-х точках (с каждой окружностью по 2-ух пересечениям)

для удобства $k = \frac{-a}{2}$, $p = \frac{3b}{2}$
прямая $y = kx + p$

$$y = kx + p \quad x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad x^2 + (kx+p)^2 - 9 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + 2kpx + p^2 - 9 = 0 \quad D = 4k^2p^2 - 4k^2p^2 - 4p^2 + 36 + 36k^2 = 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad x^2 + (kx+p)^2 - 12x + 32 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + (2kp-12)x + p^2 + 32 = 0$$

$$D = 4k^2p^2 + 144 - 48kp - 4k^2p^2 - 4p^2 - 4 \cdot 32 - 4 \cdot 32k^2 = 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0$$

$$\begin{cases} 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0 \\ 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9k^2 - p^2 + 9 > 0 \\ 8 - 6kp - p^2 - 23k^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p^2 < 9 + 9k^2 \\ p^2 < 9 + 9k^2 \end{cases}$$

$$p^2 < 9 + 9k^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 9 + 9k^2 \\ 0 < \frac{8 - 23k^2}{6k + 1} = \frac{(k - \sqrt{\frac{8}{23}})(k + \sqrt{\frac{8}{23}})}{6k + 1} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0 & 9k^2 - p^2 + 9 > 0 \\ 16 - 4kp - 4p^2 - 28k^2 > 0 & 4 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0 \\ 9k^2 + 9 > p^2 & p \in (-3\sqrt{k^2+1}, 3\sqrt{k^2+1}) \\ 4 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0 \\ p^2 + 6kp + 32k^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x \neq 1, x > 0 \quad 5y \neq 1 \quad y > 0 \quad \sqrt{5} \quad t = 5y$
 $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log x^2 243 - 8 \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$
 $\log_3^4 x + \frac{6}{5} \log_3 x = 2 \log_3 x - 8 \quad \log_3^4(t) + \frac{2}{\log_3 t} = 2 \log_3 x - 8$
 $\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -3,5 \quad \log_3^5 t + 8 \log_3 t = 3,5$
 $\log_3^5 x + \log_3^5 t + 8 \log_3 x + 8 \log_3 t = 0$

Положим как обычно видя $a^5 + b^5$ мы ищем **симметричные** корни $a = -b$, и со знаком b наоборот со знаком $a + b$, так что $a^5 + b^5$ можно представить как $(a+b)P(a,b)$, где $P(a,b) \geq 0$ *

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t = (\log_3 x + \log_3 t) (P(\log_3 x, \log_3 t))$$

$$(\log_3 x + \log_3 t) (P(\log_3 x, \log_3 t) + 8) = 0$$

$$P(\log_3 x, \log_3 t) + 8 > 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0$$

$$\log_3(xt) = 0 \quad xt = 1 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$

$$* a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - b^3a + b^4) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Посмотрим на точку $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$
 $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

Рассмотрим прямую $y = -3x + C$

Пусть $y_1 = -3x_1 + C_1$, $y_2 = -3x_2 + C_2$

Тогда $3x_2 + y_2 = C_2$, $3x_1 + y_1 = C_1$, $33 = C_2 - C_1$

Значит A и B лежат на параллельных прямых

$y = -3x + C_1$, $y = -3x + C_2$ где $C_2 - C_1 = 33$

Прямая PQ - $y = -3x$, прямая QR $y = -3x + 60$

Значит через $OPQR$ проходят прямые вида $y = -3x + C$
 $C \in [0; 60]$

Посмотрим сколько точек может лежать внутри $OPQR$ и на
прямой $y = -3x + C$.

Если C нецелое, то y и x нецелые (0 точек)

Если $C \equiv 0 \pmod 3$, тогда $y \equiv 0 \pmod 3$, $y \in [0; 42] \Rightarrow (15 \text{ точек})$

~~Если $C \equiv 1 \pmod 3$, то $y \equiv 1 \pmod 3$, $y \in [0; 42] \Rightarrow (14 \text{ точек})$~~

Если $C \equiv 2 \pmod 3$, то $y \equiv 2 \pmod 3$, $y \in [0; 42] (14 \text{ точек})$

$C_2 - C_1 = 33$, $C_2 = C_1 + 33 \Rightarrow C_1 \equiv C_2 \pmod 3$,

Если $C_2 \equiv 0 \pmod 3$, то $y \in [33; 60]$ есть парочки C_1 , в
прямых $C \in [C_1, C_2]$ по 15 точек $\Rightarrow \frac{(60-33+1) \cdot 15 \cdot 15}{3}$ способов

Если $C_2 \equiv 1 \pmod 3$, $C_2 \in [34; 56]$, по 14 точек
 $\frac{(56-34+1)}{3} \cdot 14^2$ способов

$C_2 \equiv 2 \pmod 3$, $C_2 \in [35; 59]$, по 14 точек $\frac{(59-35+1)}{3} \cdot 14^2$ способов

$$10 \cdot 15^2 + 9 \cdot 14^2 + 9 \cdot 14^2 = 5778$$

Ответ: 5778

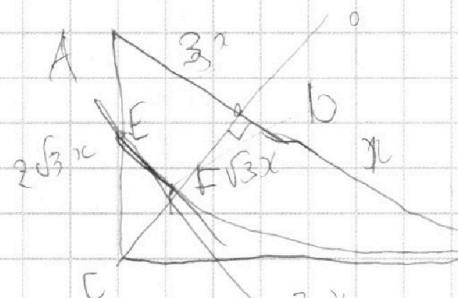
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

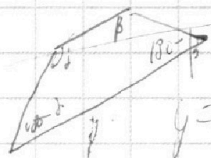
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8 \quad \begin{aligned} & 9k^2 \sqrt{p-3}(p+3) \\ & k^2 \rightarrow \frac{(p-3)(p+3)}{9} \quad p \in (-3, 3) \end{aligned}$$

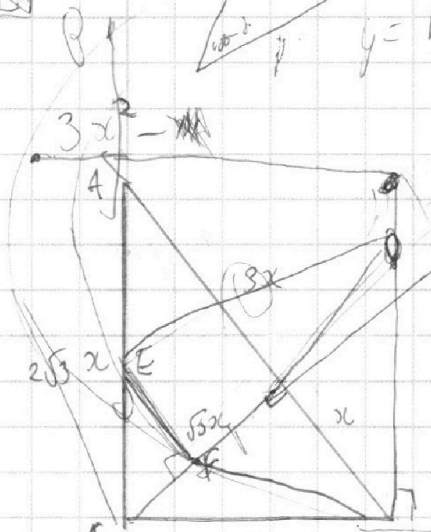
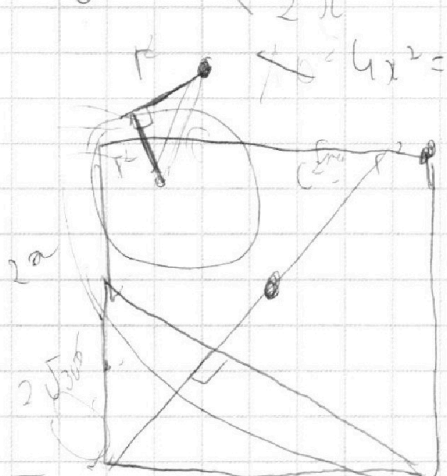


$$y = kx + p$$

$$k^2 x^2 + epkx + p^2$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 2pkx + p^2 - 9 = 0$$

$$b = 4p^2 k^2 = 4p^2 k^2$$



$$2\sqrt{10}$$

$$\frac{CE}{CF} = 2$$

$$CE \cdot EA' = 2x \cdot EA' = 4x^2$$

$$CE \cdot \frac{36 - ax}{12x} = 4x^2$$

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$y = \frac{36 - ax}{2} \quad \left(\frac{36 - ax}{2}\right)^2 = \frac{96^2 + a^2 x^2 - 6abx}{4}$$

$$ax + \frac{36 - ax}{2} = 2 \quad x^2 + \left(\frac{36 - ax}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

$$(1 + \frac{a^2}{4})x + \frac{36 - ax}{2} - 9 = 0$$

$$b = \frac{36}{4} \frac{9a^2 b^2}{4} + (y + a^2) \left(\frac{96^2}{4} - 9\right) =$$

$$- \frac{144}{32} \frac{93}{32} (8 - 23k^2) \left(k - \sqrt{\frac{8}{23}}\right) \left(k + \sqrt{\frac{8}{23}}\right)$$

$$\sqrt{32k + \frac{3}{\sqrt{32}p}} \quad 6k + 1$$

$$\begin{aligned} & bk + p > 0 \\ & k > \frac{p}{b} \quad p > -bk \\ & 4k + p > 0 \\ & p > -4k \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{1}$
 $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
 $bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$
 $ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

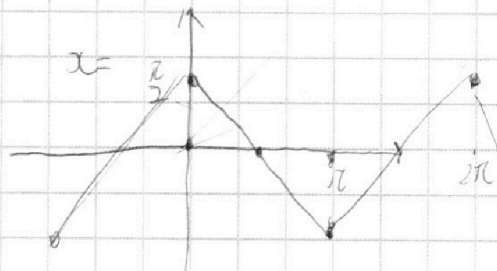
$abc \Rightarrow \text{НОК}(ab, bc, ac)$ ($abc : ab, abc : bc, abc : ac$)

$\text{НОК}(ab, bc, ac) \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Прим $a = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{17}$

$b = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^{13}$

$c =$
 $9+14+19 = 42$
 21
 3
 $3 \cdot 3$

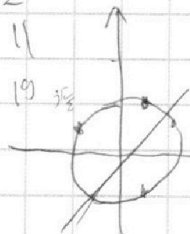


$x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) \neq \frac{\pi}{2} - x$
 $\cos x < 0$



$\arcsin(\cos x)$

$5 \cdot 5 = 25$
 $2 + 11 = 13$
 $19 + 12 = 31$
 $2 + 2 = 4$

$7 \cdot 2 = 14$
 12
 $1 \cdot 9 = 9$
 13
 12
 27
 3
 $4 \cdot 13 = 52$
 30
 26
 27
 10
 13
 17
 $\frac{\pi}{2} - x$

$y = x \cdot x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$
 $x = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k$

$x \in [2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi]$

$x = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several problems and solutions:

- Top Left:** A coordinate system with a shaded region. The equations $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = -33$ and $3x_1 - y_1 + C = 0$ are written. Below them, $y_1 = 3x_1 + C$ and $y_2 = -3x_2 + C$ are derived. The difference $C_2 - C_1 = 33$ is noted.
- Top Right:** Logarithmic equations: $\log_3^5 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ and $\log_3^4 x + \log_3 x = \frac{1}{2} \log_{x^2} 243 - 8$. The solution $x = 2$ is reached.
- Middle:** A system of equations $\log_3^5 x + \log_3^5 t = \log_3^5 t + \log_3^5 t$ is simplified to $x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 + 2y^4x^2 + y^5 = 0$. This is factored as $(x+y)(x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) = 0$.
- Bottom Left:** A polynomial equation $x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 6x^2 + 9x + 6 = 0$ is shown, along with a root $x = -1$.
- Bottom Right:** A circle is drawn with equation $x^2 + y^2 - 2x - 32 = 0$. The center is at $(1, 0)$ and the radius is $\sqrt{33}$.