



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

14 13

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

20 2 14 16

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1.

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}$$

$ab \cdot bc \cdot ca : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, то так как $ab \cdot bc \cdot ca$

натуральный квадрат, то он должен делиться на первые степени
своих простых делителей $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ca : 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \quad abc : ac : 5^{30}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{При } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

Условие выполняется и abc кратно

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$



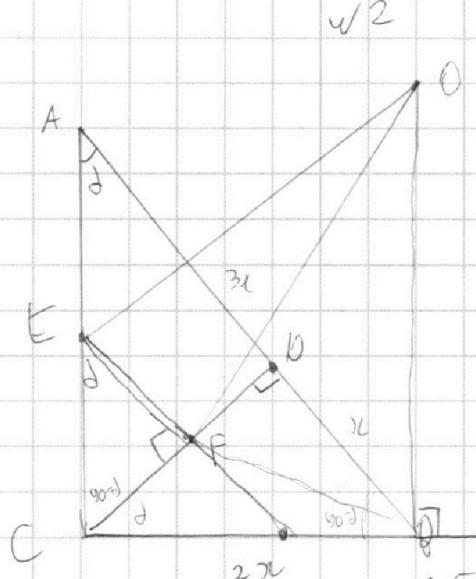
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



w2

0 - член журнальной

$$DB = x \quad AD : DB = 3 : 1$$

$$AB = 3x$$

$$CB^2 = AD \cdot DB \quad (\text{изогрж фасони})$$

$$CB = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3} x$$

$$AC = \sqrt{CB^2 + AB^2} = 2\sqrt{3} x$$

$$CB = \sqrt{DB^2 + CB^2} = 2 x$$

$EF \parallel AB \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAB$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB} = \frac{2\sqrt{3}x}{2x} = 2$$

$OE = OF$ как радиусы, $EF \parallel AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

1) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ при $x \in [0; \pi]$
 $x \in [0; \pi] \subset [0; \frac{\pi}{2}]$

2) $\arcsin(\cos x) = \pi - x$

1) $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi]$ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

2) $x \in [2\pi k + \pi; 2\pi k + 2\pi]$ $\arcsin(\cos x) = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$ (нужное)

1) $5 \arcsin(\cos x) = \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = \pi + \frac{\pi}{2}$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \quad 2\pi k \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{3}\pi k \leq \frac{\pi}{3} & k \leq -1 \\ -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}\pi k & -3 \leq k \end{cases}$$

k целое $\Rightarrow K = 0 \quad x = \frac{\pi}{3}$
 $K \in \{-2, -1, 0, 1\}$

2) $5 \arcsin(\cos x) = 5x - \frac{15\pi}{2} - 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$$4x = 8\pi + 10\pi k \quad x = 2\pi + \frac{5\pi k}{2}$$

$$2\pi k + \pi \leq 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \leq 2\pi k + 2\pi$$

$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{5\pi k}{2} - 2 \leq \pi & K \in \{-2, -1, 0\} \\ \frac{5\pi k}{2} \leq 0 & K \leq 0 \quad x \in \{-3\pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi\} \end{cases}$$

Ответы: $x = -3\pi; x = -\frac{\pi}{2}; x = 2\pi; x = \frac{\pi}{3};$

$$x = -\frac{4}{3}\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



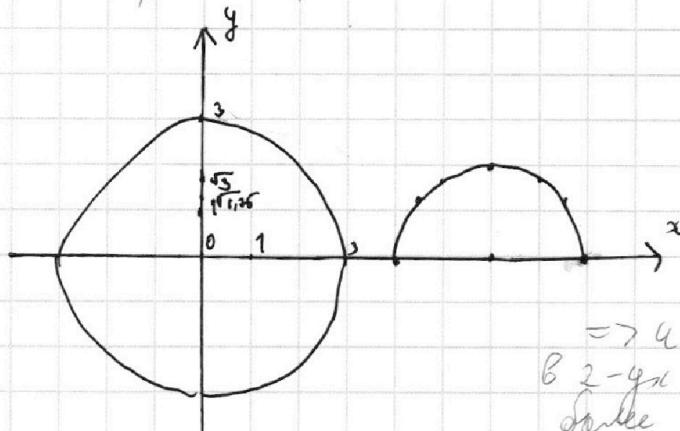
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{1/4.} \\ \left\{ \begin{array}{l} ax+2y-36=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{array} \right. \\ & x^2+y^2=9 \quad -\text{окружность центр } 0,0, \text{ радиус } 3 \\ & x^2+y^2-12x+32=0 \quad y = \sqrt{92x-x^2-32} = \sqrt{4-(x-6)^2} \end{aligned}$$

Построим эллипса:



$$y = \sqrt{4-(x-6)^2} \quad \text{построена по точкам}$$

x	4	6	5	4.5	5.5	7	x=6
y	0	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{3}$	

предметы $y = 36 - ax$ даются
пересекают кривые в 2 точках
 \Rightarrow в 1 окружности и 2 второй прямой
в 2-й же точкой (с направлением отрицательно)
Более 2-х прямых нет

Более удобно $k = -\frac{a}{2}$, $p = \frac{36}{2}$
прямая $y = kx + p$

$$y = kx + p \quad x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad x + (kx+p)^2 - 9 = 0$$

$$x^2 (1+k^2) + 2kp x + p^2 - 9 = 0 \quad D = 4k^2 p^2 - 4kp^2 - 4p^2 + 36 + 36k^2 =$$

$$= 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad x^2 + (kx+p)^2 - 12x + p^2 + 32 = 0$$

$$D = 4k^2 p^2 + 144 - 98kp - 4k^2 p^2 - 4p^2 - 4 \cdot 32 =$$

$$= 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0 \\ 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0 \end{array} \right. \quad 8kp - p^2 + 9 > 0 \quad p^2 < 9 + 9k^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0 \\ 8kp - p^2 + 9 > 0 \end{array} \right. \quad 8 - 6kp - p^2 - 9 + 23k^2 > 0$$

$$p^2 < \frac{8 - 6kp + 9 + 23k^2}{6k+1}$$

$$\text{решение} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < 8 + 9k^2 \\ 0 < \frac{8 - 6kp + 9 + 23k^2}{6k+1} \end{array} \right. \quad \text{Ваша формула} \\ = \sqrt{\frac{(-6k+1)(6k+1)}{8k+1}} \quad \sqrt{\frac{8 + 9k^2}{8k+1}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} 36k^2 - 4p^2 + 36 > 0 \\ 16 - 48kp - 4p^2 - 128k^2 > 0 \\ 9k^2 + 9 > p^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sqrt{4} \\ 9k^2 - p^2 + 9 > 0 \\ 4 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0 \\ p \in (-3\sqrt{k+1}, 3\sqrt{k+1}) \end{array}$$
$$4 - 6kp - p^2 - 32k^2 > 0$$
$$p^2 + 6kp + 32k^2 - 4 > 0 \quad \text{из зарядка из зарядка}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq 1, x > 0, 5y \neq 1, y > 0 \quad \sqrt{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \quad \log_2 3 = \log_2 2 \cdot 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = 2 \log_3 x - 8$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -3,5$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t + 8 \log_3 x + 8 \log_3 t = 0$$

$$t = 5y$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y^2}(3'') - 8$$

$$\log_3^4(t) + \frac{2}{\log_3 t} = 2 \log_5 x - 8$$

$$\log_3^5 t + 8 \log_3 t = 3,5$$

сложить

Посмотрим на логарифмы вида $a^5 + b^5$ они имеют единственную корень $a = -b$, и это значение совпадает со знаком $a+b$,
так что $a^5 + b^5$ можно представить как $(a+b)P(a,b)$, где
 $P(a,b) \geq 0$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 t = (\log_3 x + \log_3 t)(P(\log_3 x, \log_3 t))$$

$$(\log_3 x + \log_3 t)(P(\log_3 x, \log_3 t) + 8) = 0$$

$$P(\log_3 x, \log_3 t) + 8 > 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0$$

$$\log_3(xt) = 0 \quad xt = 1 \quad 5xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Одн.р.: } xy = \frac{1}{5}$$

$$* a^5 + b^5 - (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \stackrel{> 0}{\approx}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{6}$

Построим на посы $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

Построим прямую $y = -3x + C$

Пусть $y_1 = -3x_1 + C_1$, $y_2 = -3x_2 + C_2$

$$\text{тогда } 3x_2 + y_2 = C_2 \quad 3x_1 + y_1 = C_1 \quad 33 = C_2 - C_1$$

Значит A и B лежат на прямой $y = -3x + C$

$$y = -3x + C_1, \quad y = -3x + C_2 \quad \text{т.е. } C_2 - C_1 = 33$$

Крайняя PQ — $y = -3x$, крайняя QR $y = -3x + 60$

Значит через $OPQR$ проходит прямая $y = -3x + C$

$$C \in [0, 60]$$

Построим сколько целых может быть единиц $OPQR$ на прямой $y = -3x + C$.

Если C нечетное, то y и x нечетные (0 таких)

Если $C \equiv 0 \pmod{3}$, тогда $y \equiv 0 \pmod{3}$, $y \in [0, 60] \Rightarrow (15 \text{ таких})$

~~Если $C \equiv 1 \pmod{3}$, то $y \equiv 1 \pmod{3}$, $y \in [0, 60] \Rightarrow (14 \text{ таких})$~~

~~Если $C \equiv 2 \pmod{3}$, то $y \equiv 2 \pmod{3}$, $y \in [0, 60] \Rightarrow (14 \text{ таких})$~~

$$C_2 - C_1 = 33 \quad C_2 = C_1 + 33 \Rightarrow C_1 \equiv C_2 \pmod{3}$$

Если $C_2 \equiv 0 \pmod{3}$, то $C_2 \in [33, 60]$ есть 15 таких C_1 , и C_2 19 таких $\Rightarrow \frac{(60-33+1) \cdot 15}{3} = 150$ способов

Если $C_2 \equiv 1 \pmod{3}$, $C_2 \in [34, 58]$, то 14 таких

$$\left(\frac{58-34}{3} + 1\right) \cdot 14^2 = 14^2 \text{ способов}$$

~~$C_2 \equiv 2 \pmod{3}$, $C_2 \in [35, 59]$, то 14 таких $\left(\frac{59-35}{3} + 1\right) \cdot 14^2 = 14^2 \text{ способов}$~~

$$10 \cdot 15^2 + 9 \cdot 14^2 + 9 \cdot 14^2 = 5778$$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

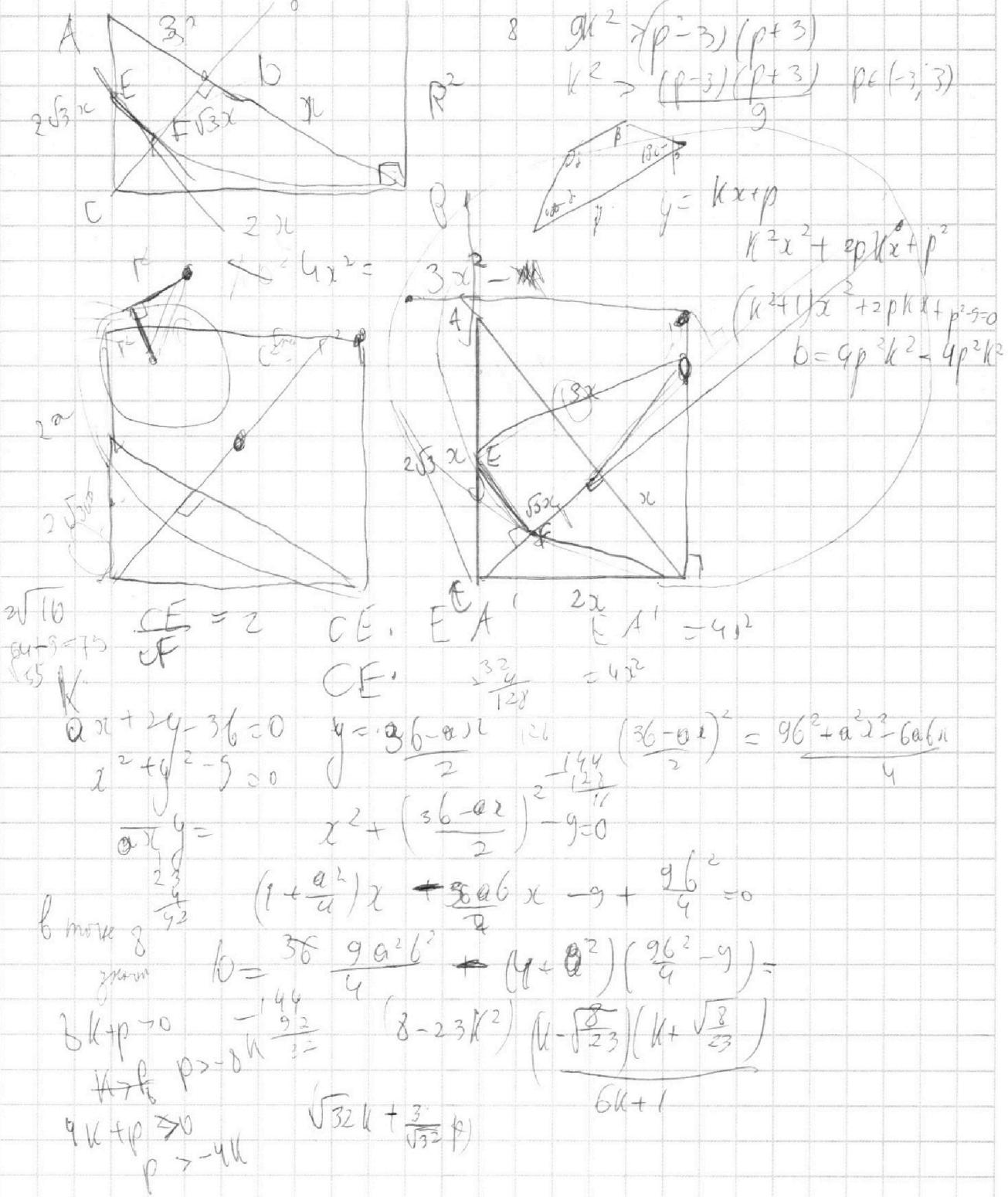
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1.

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$abc \geq \text{НОК}(ab, bc, ac) \quad (abc : ab, abc : bc,$$

$$\text{НОК}(ab, bc, ac) \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \quad abc : ac)$$

При $a = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{17}$

$$b = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^{15}$$

$$c = 3$$

$$9+14+15 = 42 \quad 21 \quad 3 \quad 3 \cdot 3$$

$$2^3 \quad 3^3 \quad 5^1$$

$$\log_3 10 + 13 + 10 = 13 \quad 10 \quad 27$$

$$2^8 \quad 3^8 \quad 4^1 \quad 10 \quad 21$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$2^5 \quad 3^5 \quad 4^1 \quad 10 \quad 21$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

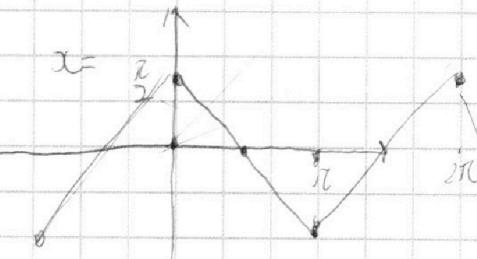
$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

$$12 \quad 5 \quad 5 \quad 8 \quad 2$$

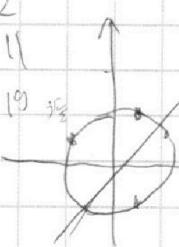


$$x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \quad \cos x < 0$$



$\arcsin(\cos x)$

$$y = x \quad x \in [2\pi k, 2\pi k + \pi]$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$x \in [2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi]$$

$$x = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

