



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}; \min(abc) = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} ab = \alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{a^2 b^2 \cdot c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \cdot \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} \end{aligned}$$

$$\& a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{a} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a = p^{2q}, \text{ где } p, a \in \mathbb{N}$$

$$abc = 2^{21} \cdot \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot \sqrt{3^{41} \cdot 5^{53}} \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{\alpha \beta \gamma} = \sqrt{3 \cdot 5} \quad (\text{чтобы степени 3 и 5 под корнем стали четными и чтобы } abc \text{ было минимальным})$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

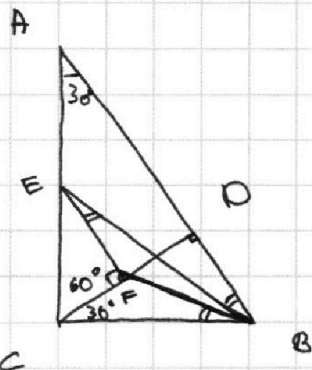
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (A1)



$EF \parallel AB$      $AD : DB = 2 : 1$

$$\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{AD}{CD}$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg} \angle ACD = \frac{CD}{DB}$$

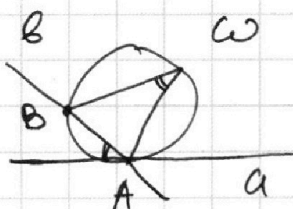
$$\operatorname{tg}^2 \angle ACD = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DB} = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \angle ACD = \sqrt{3} \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$$

$$\angle ACD = 60^\circ; \angle CAD = 30^\circ;$$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$ , т.к.  $CD \perp AB$  по усл.

$$\angle CFE = 30^\circ$$

По теореме о касательной к окружности:



$$\left. \begin{array}{l} a \cap \omega = A \\ a \cap \omega = B \\ b \cap \omega = A, B \end{array} \right\} \Rightarrow \angle a, b = \frac{1}{2} \cup AB$$

$\angle FBC = \angle FEB$ , (т.к.  $a = BC$ ,  $b = FB$ ),  $\cup AB = \cup BF$ ,  $\angle FEB = \frac{1}{2} \cup BF$ ,  
т.к.  $B, F, E$  лежат на окр по условию,  $FEB$  - вписанный угол.)

$FE \parallel AB \Rightarrow \angle FEB = \angle ABF \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle CFB$ , т.к.

$$\angle CBF = \angle EBA \text{ и } \angle EAB = \angle FCB = 30^\circ$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2} \text{ т.к. } \sin \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2 (12)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{CF}{AE} = \frac{1}{2} \\ \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sin \angle CEF = \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}$$

$$AE = CE = \frac{1}{2} AC$$

~~$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta CEF}} = k^2 = \left( \frac{AC}{CE} \right)^2 = 4, \text{ т.к. } \Delta CEF \sim \Delta CAD$$~~

Ответ: ~~4~~

$$\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{AC^2}{CE^2} = 4 \quad \left( \begin{array}{l} \Delta CAD \sim \Delta CEF \\ \Delta CAD \sim \Delta ABC \end{array} \right)$$

$$\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta ABC}} = \left( \frac{AC}{AB} \right)^2 = \cos^2 \angle CAB = \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$S_{\Delta CAD} = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC} \cdot \frac{3}{4}}{S_{\Delta CEF}} = 4 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}; \quad \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x = \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$x \in \left[-3\pi; 2\pi\right] !$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n & (1) \\ \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m & (2) \\ -\frac{3\pi}{2} + x + 2\pi k & (3) \\ -\frac{3\pi}{2} - x + 2\pi l & (4) \end{cases}$$

$$(1): \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n$$

$$-\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n = \frac{4}{10}\pi + 2\pi n = \frac{2}{5}\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi \end{cases}$$

$$(2): \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi m$$

$$6x = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 10\pi m = 2\pi + 10\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} = -3\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \end{cases}$$

$$(3): 2\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{3}{2}\pi \quad (3) \text{ и } (4) \text{ вытекают из } (1) \text{ и } (2) \text{ при } k, l = 1$$

Ответ:  $x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (12)

$r_1$  и  $r_2$  — это два крайних случая

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{6-x} = \frac{R_1}{x}, \quad x - \text{пересечение координата на } O_x \\ \text{точки пересечения } r_1 \text{ и } O_x$$

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{6-x} = \frac{3}{x}$$

$$2x = 18 - 3x$$

$$5x = 18$$

$$x = \frac{18}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \frac{3 \cdot 5}{6 \sqrt{1 - \frac{9}{8^2 \cdot 2^2}}} =$$

$$= \frac{5}{6 \sqrt{1 - \frac{9}{64}}} = \frac{5}{6 \sqrt{\frac{64-9}{64}}} = \frac{5}{6 \sqrt{\frac{55}{64}}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 = -2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{-10}{\sqrt{11}}$$

$$a \in (-|a_1|; |a_1|) = \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Ответ:  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

Для прямых  $r_1$  и  $r_2$  4 решения действительно быть не может, ведь увеличивая  $b$ , мы будем лишь отдаваться от  $\omega_2$ , а уменьшая, удаляться от  $\omega_1$ , где 4 решения как минимум хотя бы пересекают  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Похожим образом можно рассуждать и для прямых, проходящих через точку  $\left(\frac{18}{5}; 0\right)$  и имеющих наклон: от  $\alpha$  до  $\pi - \alpha$ .

Увеличивая или уменьшая  $b$ , мы будем лишь отдаваться от  $\omega_1$  или  $\omega_2$ , таким образом 4 решения у таких прямых быть не может.

Все остальные прямые ~~кроме вертикальной~~ имеют 4 решения и  $b$ .  
проходящие через  $\left(\frac{18}{5}; 0\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (М1)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \end{cases}$$

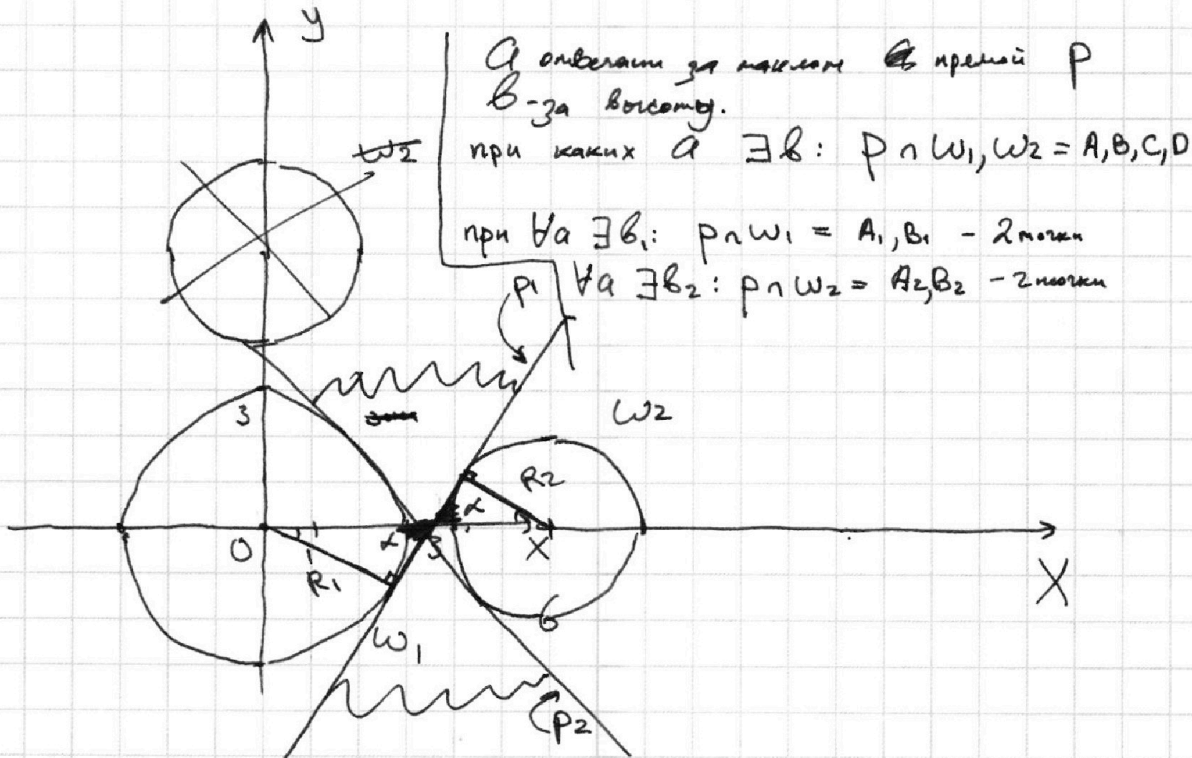
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1):  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$  - прямая  $\mathbb{P}$

(2):  $x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$  - окружность  $\omega_1$ ;  $O_1(0;0)$ ;  $R_1=3$

(3):  $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$

$(x-6)^2 + y^2 = 4$  - окр.  $\omega_2$ ;  $O_2(6;0)$ ,  $R_2=2$



$\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \cap \omega_1, \omega_2 = A_1, B_1, A_2, B_2$  ( $\mathbb{P}_1$  и  $\mathbb{P}_2$  касаются  $\omega_1$  и  $\omega_2$ )

Если  $\mathbb{P}$  имеет наклон  $(-\alpha; \alpha)$ , ~~тогда~~ <sup>есть</sup> 4 решения

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_1}{2}$ ,  $\alpha$  - наклон  $\mathbb{P}_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Задача 5 (11)

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{отз. } x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Преобразуем выражения: пусть  $z = 5y$

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \log_x (3^5) - 8 \\ \log_3^4(z) + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{1}{2} \log_z (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8 \\ \log_3^4(z) + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{11}{2 \log_3 z} - 8 \end{cases}$$

Пусть  $f = \log_3 x$ ,  $w = \log_3 z$ , тогда

$$f + w = \log_3 x + \log_3 z = \log_3 (x \cdot 5y) = \log_3 (xy) + \log_3 5$$

$$\log_3 (xy) = \frac{(f+w) - \log_3 5}{(f+w) - \log_3 5}$$

$$xy = 3$$

$$\begin{cases} f^4 + \frac{6}{f} = \frac{5}{2f} - 8 \\ w^4 + \frac{2}{w} = \frac{11}{2w} - 8 \end{cases} \quad f, w \neq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases} \quad (+) \rightarrow$$

$$\rightarrow f^5 + w^5 + 8 = 8 - 8(f+w) \Rightarrow f^5 + w^5 = -8(f+w)$$

$$(f^5 + w^5 = (w+f)(f^4 - f^3w + f^2w^2 - fw^3 + w^4))$$

$$(f+w)(\dots) = -8(f+w) \rightarrow \boxed{f+w=0}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (A2)

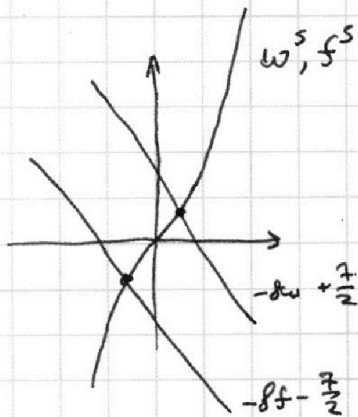
$f+w=0$  - единственно возможная сумма  $f$  и  $w$ , так как

уравнения:  $f^5 = -8f - \frac{7}{2}$  и  $w^5 = -8w + \frac{7}{2}$

имеют единственное решение, ведь  $f^5$  и  $w^5$  - монотонно

~~и это так, потому что~~ возрастающие функции, а

$-8f - \frac{7}{2}$  и  $-8w + \frac{7}{2}$  - монотонно убывающие ф-ии.



Поэтому решение есть и оно единственное.

$$\begin{aligned} xy &= 3 & f+w &= \log_3 5 & -\log_3 5 &= \\ &= \frac{1}{3^{\log_3 5}} & &= 3 & &= \\ &= \frac{1}{5} & & & & \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\cos x = \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\cos x - \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = 0$$

$$\cos \alpha - \sin \beta = 0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$$\left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \cdot \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} - \right.$$

$$\left. \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta-\alpha}{2} = 0$$

$$\left( \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left( \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} =$$

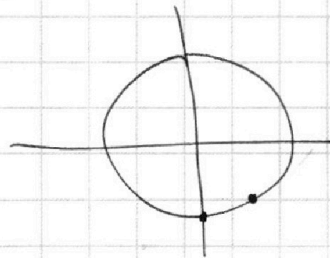
$$\cos x = \sin \left( \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \right)$$

$$x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + 2\pi \cdot n \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3}\pi + x = -\left( \frac{2}{3}\pi - x \right) + 2\pi \cdot k \quad (2) \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{2}{3}\pi - x = -\left( \frac{2}{3}\pi + x \right) + 2\pi \cdot l \quad (3)$$



$$a) \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi n = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$ab = \alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{\alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}}$$

$$= \sqrt{\alpha\beta\gamma} \cdot \sqrt{2^{43} \cdot 3^{41} \cdot 5^{55}} \in \mathbb{N}$$

$$14+19 = 43$$

$$23+18 = 41$$

$$25+30 = 55$$

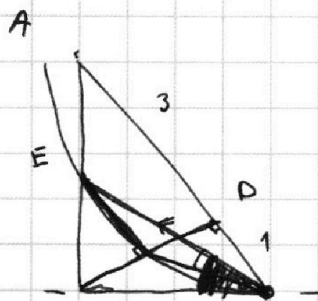
$$\alpha\beta\gamma = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$abc = \sqrt{2^{44} \cdot 3^{42} \cdot 5^{56}} = 2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$$

$$23+19 = 42 \quad \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 6$$

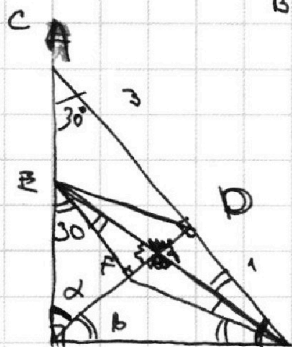
$$23+18 = 41$$

$$27+30 = 57$$



$AB \parallel EF$      $AD:DB = 3:1$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \left(\frac{CE}{CA}\right)^2 = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$$



$$\frac{CA}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \tan \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{DB}{CD}$$

$$\tan \alpha = \frac{CD}{DB}$$

$$\angle FEB + \angle EBF = \angle FEB \cdot \frac{1}{2} = \tan^2 \alpha = \frac{AD}{DB} = 3$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow 60^\circ = \alpha$$

$$\angle FEB + 30^\circ + \angle CBE = 90^\circ$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода нелюбимый!



$$\begin{array}{r} f^5 + w^5 \\ f^5 + f^4w \\ \hline f^5 + f^4w + w^5 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 \\ \hline f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 + f^2w^2 \\ \hline f^5 + w^5 = (f+w)(f^4 + w^4 - f^3w - fw^3 + f^2w^2) \end{array}$$
$$\begin{array}{r} f^5 + w^5 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 \\ \hline f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 + f^2w^2 \\ \hline f^5 + w^5 = (f+w)(f^4 + w^4 - f^3w - fw^3 + f^2w^2) \end{array}$$
$$\begin{array}{r} f^5 + w^5 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 \\ \hline f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 + f^2w^2 \\ \hline f^5 + w^5 = (f+w)(f^4 + w^4 - f^3w - fw^3 + f^2w^2) \end{array}$$
$$\begin{array}{r} f^5 + w^5 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 \\ \hline f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 \\ f^5 + f^4w + f^3w^2 + f^2w^3 + f^2w^2 \\ \hline f^5 + w^5 = (f+w)(f^4 + w^4 - f^3w - fw^3 + f^2w^2) \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_3(x))^4 + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 & \begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix} \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y}(3) = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - 6 &= \frac{5-12}{2} = \frac{-7}{2} \\ \frac{11}{2} - 2 &= \frac{11-4}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \log_3^4(x) + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y}(3) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4(xz) + 2 \log_{xz} 3 = \frac{11}{2} \log_{xz} 3 - 8$$

$$\log_3 x = f \quad \log_3 z = g \quad \log_3 3 = 1$$

$$f^4 + 6 \cdot \frac{1}{f} = \frac{5}{2} \frac{1}{f} - 8$$

$$\begin{array}{r|l} f^5 + w^5 & f+w \\ \hline f^5 + w^5 & f^4 + w^4 - wf^3 \\ \hline w^5 - wf^4 & \end{array}$$

$$8g^4 + \frac{2}{g} = \frac{11}{2g} - 8$$

$$\begin{array}{r|l} w^5 + fw^4 & \\ \hline -wf^4 - fw^4 & \\ \hline -wf(f^3 - w^3) & = \\ \hline = -wf(f+w)(f^2 + wf + w^2) & \end{array}$$

$$\begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases}$$

$$(f^4 + w^4)(f^5 + w^5)$$

$$\begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases}$$

$$f+w = \log_3 x + \log_3 z = \log_3(xz) = \log_3(xy \cdot 5)$$

$$f^5 + w^5 + 8 = 8 - 8(f+w)$$

$$f^5 + w^5 = -8(f+w)$$

$$f+w = \log_3 x + \log_3 5y = \log_3(5xy) = \log_3 5 + \log_3(xy) = 0$$

$$\log_3(xy) = -\log_3 5$$

$$xy = 3^{-\log_3 5} = \frac{1}{5^{\log_3 5}} = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

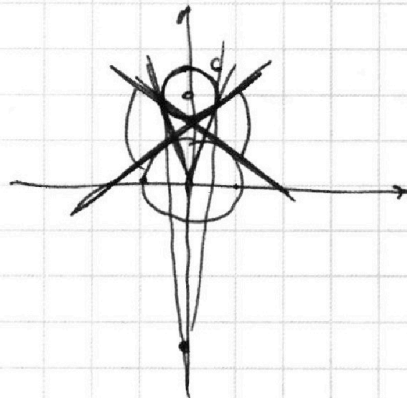
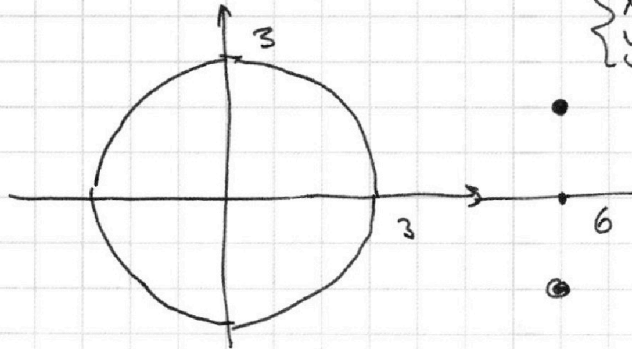
№4

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = (x - 6)^2 + (y - 2)(y + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2; -2 \end{cases}$$



$$2y = 36 - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}6$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

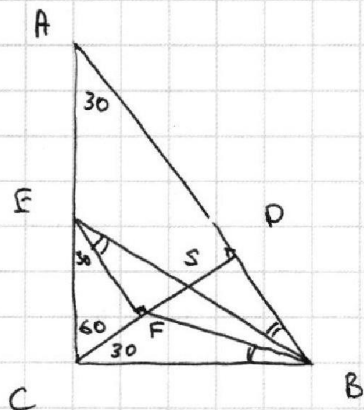
1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle FEB + 30^\circ + \angle FEB + \angle AEF = 90^\circ$$

$$2\angle FEB + \angle EBF = 60^\circ$$



$$\triangle ABE \sim \triangle EBF$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CE = EA$$

$$(2) \cdot \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} + 2\pi m = \frac{24}{5}\pi + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m$$

$$(3) \cdot \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{2}{3}\pi + x + 2\pi k$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{20} + 2\pi k = -\frac{23}{30}\pi + 2\pi k$$

$$x = -\frac{23 \cdot 5}{6 \cdot 4}\pi + \frac{25}{42}\pi k = -\frac{23}{24}\pi + \frac{5}{2}\pi k$$

$$(4) \cdot \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{2}{3}\pi - x + 2\pi l$$

$$\frac{6}{5}x = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{20} + 2\pi l = -\frac{23}{30}\pi + 2\pi l$$

$$x = -\frac{23}{36}\pi + \frac{5}{3}\pi l$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

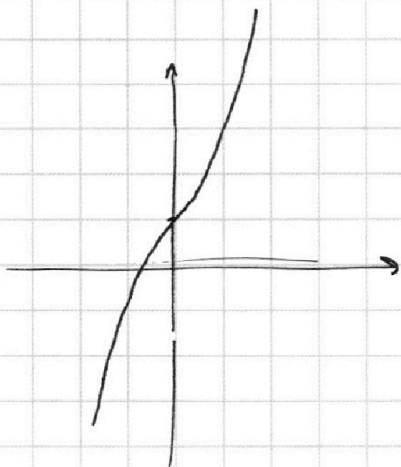
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$f^s = -df -$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

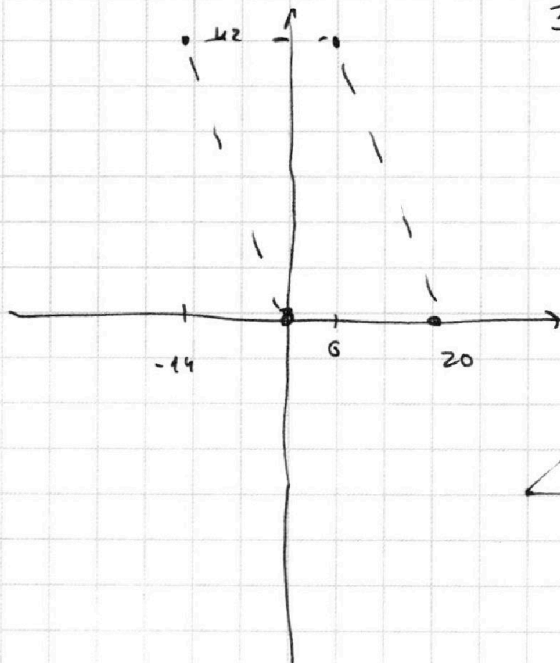
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

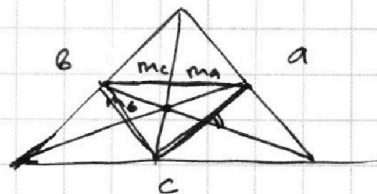
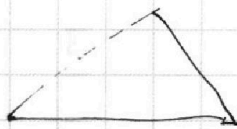


$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$



$$+\frac{D}{4} \cdot \frac{c^4}{4} \cdot \frac{a^2}{2} +$$

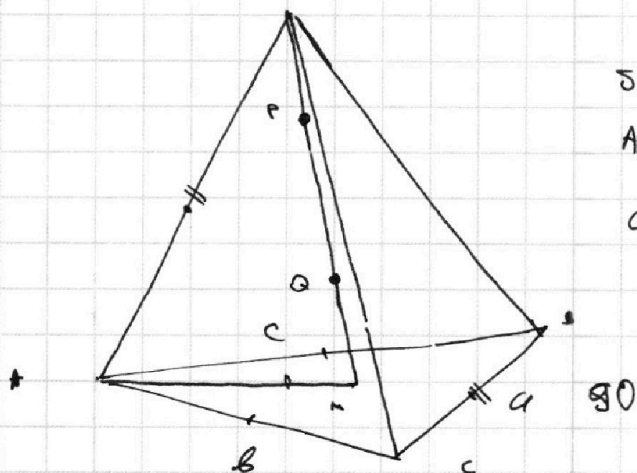
$$+\frac{c^4}{4} \cdot \frac{b^2}{2}$$



$$SA \neq BC$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$$a = 12$$



$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{a^6}{16} - \frac{b^6}{16} - \frac{c^6}{16}}$$

$$S =$$