



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{N} ; \min(abc) - ?$$

$$\left. \begin{array}{l} ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} ab = \alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{a^2 b^2 \cdot c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot \gamma \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} = \\ &= \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \cdot \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{a} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a = p^{2k+1}, p, a \in \mathbb{N}$$

$$abc = 2^{21} \cdot \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot \sqrt{3^{41} \cdot 5^{53}} \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{\alpha \beta \gamma} = \sqrt{3 \cdot 5} \quad (\text{т.к. степени 3 и 5 под корнем стали минимальны и т.к. } abc \text{ было минимально})$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

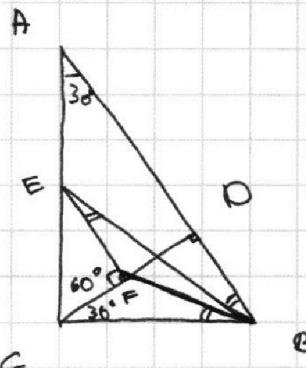
- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (A1)



$$EF \parallel AB \quad AD : DB = 4 : 3 : 1$$

$$\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD}$$

$$\tan \angle ABC = \tan \angle ACD = \frac{CD}{DB}$$

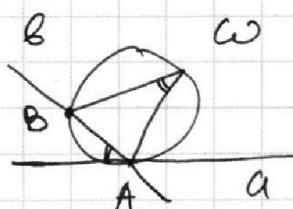
$$\tan^2 \angle ACD = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DB} = 3 \Rightarrow \tan \angle ACD = \sqrt{3} \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$$

$$\angle ACD = 60^\circ; \angle CAD = 30^\circ;$$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$ , т.к.  $CD \perp AB$  по усн.

$$\angle CDF = 30^\circ$$

По теореме о касательной к окружности:



$$\begin{aligned} a \cap \omega &= A \\ a \cap b &= A \\ b \cap \omega &= A, B \end{aligned} \Rightarrow \angle A, B = \frac{1}{2} \cup AB$$

$\angle FBC = \angle FEB$ , (т.к.  $a = (BC)$ ,  $b = (FB)$ ,  $\cup AB = \cup BF$ ,  $\angle FEB = \frac{1}{2} \cup BF$ ,  
т.к.  $B, F, E$  лежат на окр по условию,  $FEB$  - вписаный  
угол.)

$FE \parallel AB \Rightarrow \angle FEB = \angle ABE \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle CFB$ , т.к.

$$\angle CBF = \angle EBA \text{ и } \angle EAB = \angle FCB = 30^\circ$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sin \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (12)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{CF}{AE} = \frac{1}{2} \\ \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sin \angle CEF = \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$AE = CE = \frac{1}{2} AC$$

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = \left( \frac{AC}{CE} \right)^2 = , \text{ т.к. } \triangle CEF \sim \triangle CAD$$
$$= 2^2 = 4$$

Ответ: 4

$$\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{AC^2}{CE^2} = 4 \quad \left( \begin{array}{l} \triangle CAD \sim \triangle CEF \\ \triangle CAD \sim \triangle ABC \end{array} \right)$$

$$\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle ABC}} = \left( \frac{AC}{AB} \right)^2 = \cos^2 \angle CAB = \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$S_{\triangle CAD} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC} \cdot \frac{3}{4}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                               |                               |  |                               |                               |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1<br><input type="checkbox"/> | 2<br><input type="checkbox"/> | 3<br><input checked="" type="checkbox"/> | 4<br><input type="checkbox"/> | 5<br><input type="checkbox"/> | 6<br><input type="checkbox"/> | 7<br><input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}; \quad \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x = \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{\pi}{20}}{5} &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n & (1) \\ \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m & (2) \\ -\frac{3}{2}\pi + x + 2\pi k & (3) \\ -\frac{3}{2}\pi - x + 2\pi l & (4) \end{cases} \\ &\quad x \in [-3\pi; 2\pi] ! \end{aligned}$$

$$(1): \frac{x + \frac{\pi}{20}}{5} = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n$$

$$-\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} + 2\pi n = \frac{4}{10}\pi + 2\pi n = \frac{2}{5}\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -\frac{6}{2}\pi = -3\pi \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi$$

$$(2): \frac{x + \frac{\pi}{20}}{5} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi - 5x + 10\pi m$$

$$6x = \frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{2} + 10\pi m = \frac{9}{2}\pi + 10\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \end{cases}$$

$$(3): \frac{x + \frac{\pi}{20}}{5} = -\frac{3}{2}\pi \quad (3) \text{ и } (4) \text{ ведут к тому же решению при } k, l = 1$$

Ответ:  $x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4 (12)

$r_1$  и  $r_2$  — это грая крайних супер

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{6-x} = \frac{R_1}{x}, \quad x - \text{координата на } Ox \text{ точки пересечения } r_1 \text{ и } Ox$$

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{6-x} = \frac{3}{x}$$

$$2x = 18 - 3x$$

$$5x = 18$$

$$x = \frac{18}{5}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \frac{3 \cdot 5}{6 \sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \\ &= \frac{5}{6 \sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{5}{6 \sqrt{\frac{16-9}{25}}} = \frac{5}{6 \sqrt{\frac{7}{25}}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow a_1 = -2 \tan \alpha = -\frac{10}{\sqrt{14}}$$

$$a \in (-ka_1; ka_1) = \left(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{10}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{10}{\sqrt{14}}\right)$$

Две прямые  $r_1$  и  $r_2$  и решения движущимся быть не может, ведь уменьшает  $R$ , что будет лишь отдаляться от  $W_2$ , а уменьшает, удаляясь от  $W_1$ , где 4 решения или получено кроме того пересечение  $W_1$  и  $W_2$ .  
Похожим образом можно рассуждать и для прямых, проходящих через точку  $(\frac{18}{5}; 0)$  и имеющих наклон  $\neq$  от  $\alpha$  до  $\pi - \alpha$ .

Уменьшает или уменьшает  $R$ , что будет лишь отдаляться от  $W_1$  или  $W_2$ , таким образом 4 решения у таких прямых быть не может.  
Все остальные прямые ~~имеют одинаковую~~ имеют 4 решения и  $R$ .  
проходящие через  $(\frac{18}{5}; 0)$

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

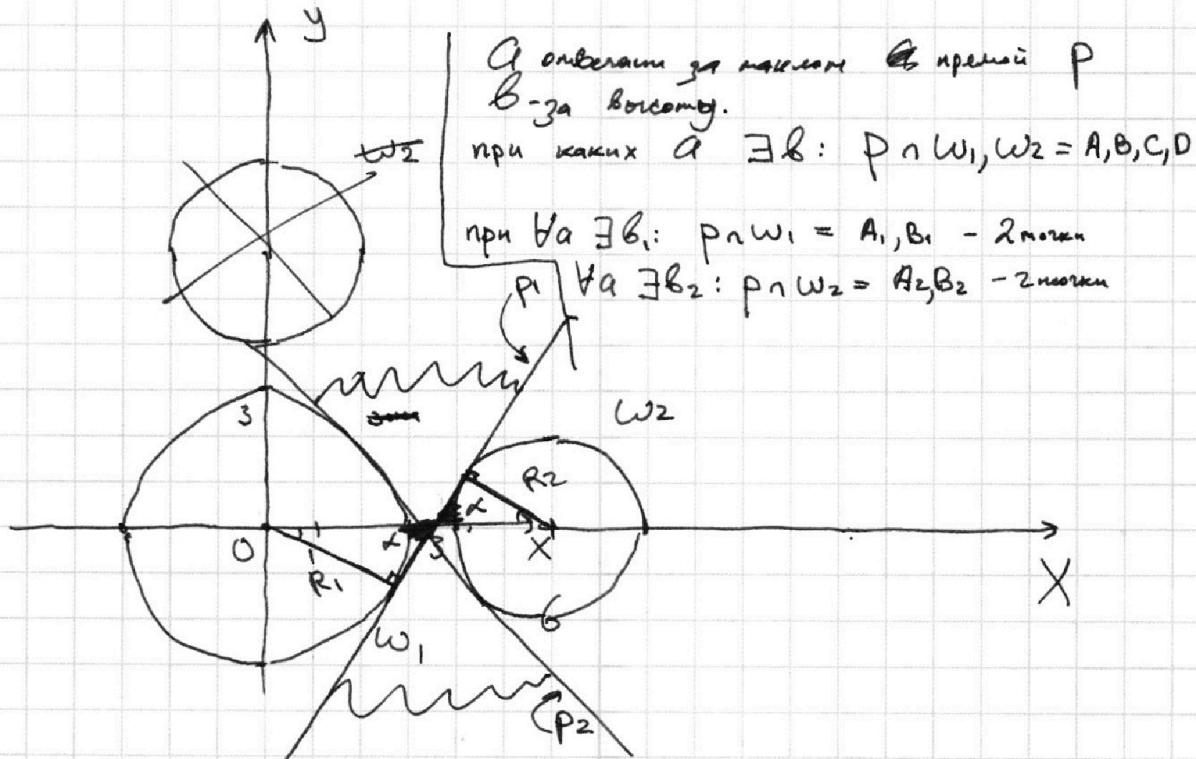
Задача №4 (A1)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \text{ - прямая } P$$

$$(2): x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \text{ - окружность } \omega_1; O(0;0), R_1 = 3$$

$$(3): x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \text{ - окр. } \omega_2; O_2(6;0), R_2 = 2$$



$$P_1, P_2 \cap \omega_1, \omega_2 = A_1, B_1, A_2, B_2 \quad (P_1 \cup P_2 \text{ касаются } \omega_1 \text{ и } \omega_2)$$

Если  $P$  имеет наклон  $(-\alpha; \alpha)$ ,  $\alpha$  - наклон  $P_1$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_1}{2}, \quad \alpha - \text{наклон } P_1$$



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Zagora 5 (11)

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

ОДЗ:  $x, y > 0$   
 $x \neq 1$   
 $y \neq \frac{1}{5}$

Преобразуем выражение: пусть  $z = 5y$

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \log_x (3^5) - 8 \\ \log_3^4(z) + \frac{2}{\log_3 z} z = \frac{1}{2} \log_z (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4(x) + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8 \\ \log_3^4(z) + \frac{2}{\log_3 z} z = \frac{11}{2 \log_3 z} - 8 \end{cases}$$

Пусть  $f = \log_3 x$ ,  $w = \log_3 z$ ,  $\omega = \log_3 5$

$$f+w = \log_3 x + \log_3 z = \log_3(x \cdot 5y) = \log_3(xy) + \log_3 5$$

$$\log_3(xy) = (f+w) - \log_3 5$$

$$xy = 3$$

$$\begin{cases} f^4 + \frac{6}{f} = \frac{5}{2f} - 8 & f, w \neq 0 \\ w^4 + \frac{2}{w} = \frac{11}{2w} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases} \quad \oplus \rightarrow$$

$$\rightarrow f^5 + w^5 + 8 = 8 - 8(f+w) \Rightarrow f^5 + w^5 = -8(f+w)$$

$$(f^5 + w^5) = (w+f)(f^4 - f^3w^2 + f^2w^4 - f^1w^3 + w^5)$$

$$(f+w)(...) = -8(f+w) \rightarrow (f+w = 0)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

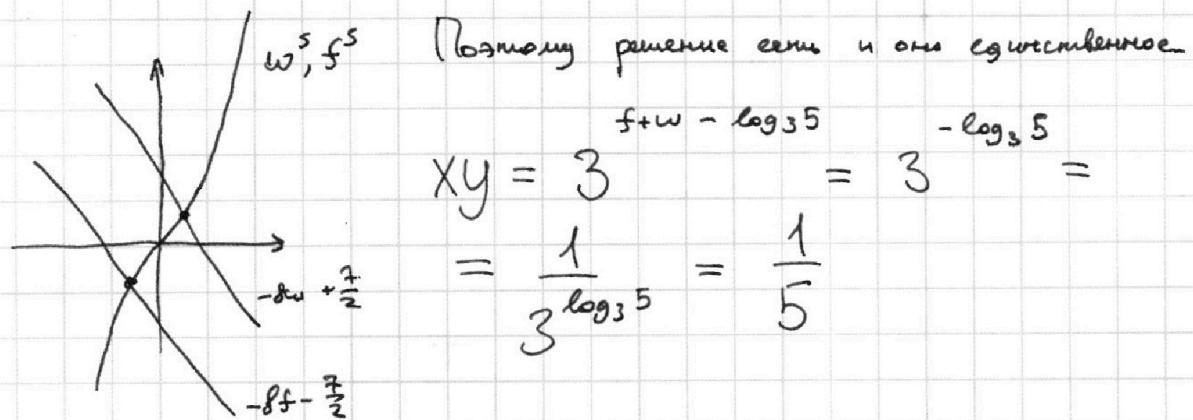
Задача 5 (12)

$f+w=0$  - единственное общее решение  $f$  и  $w$ , так как  
уравнения:

$$f^5 = -8f - \frac{7}{2} \text{ и } w^5 = -8w + \frac{7}{2}$$

имеют единственное решение, ведь  $f^5$  и  $w^5$  - монотонны  
~~Это~~ потому что возрастущие функции, а

$-8f - \frac{7}{2}$  и  $-8w + \frac{7}{2}$  - монотонно убывающие ф-ии.



$$\begin{aligned} f+w &= \log_3 5 \\ XY &= 3 = \frac{1}{3^{\log_3 5}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n3

$$\operatorname{arc}\sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc}\sin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\cos x = \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\cos x - \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = 0$$

$$\cancel{\cos x} \quad \cancel{\sin} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \cdot \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \right.$$

$$\left. \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\left( \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} =$$

$$\cos x = \sin \left( \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \right)$$

$$x = \left( \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \right) * \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + 2\pi \cdot n \quad (1)$$

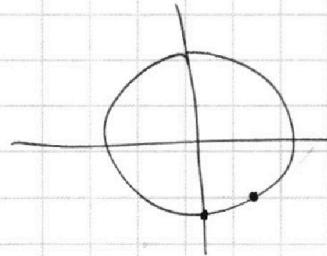
$$\cancel{\frac{x}{5}} + \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + 2\pi n = x = -\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3}\pi + x = -\left( \frac{2}{3}\pi + x \right) + 2\pi \cdot n \quad (3)$$

$$n) \quad \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi n = -\frac{2}{5}\pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$ab = \alpha \cdot \gamma \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = \delta \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{\alpha \cdot \gamma \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot \beta \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot \delta \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}}$$

$$= \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot \sqrt{2^{43} \cdot 3^{41} \cdot 5^{55}} \in \mathbb{N}$$

$$24+19 = 43$$

$$23+18 = 41$$

$$25+30 = 55$$

$$\alpha \beta \gamma = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$ab = \sqrt{2^{44} \cdot 3^{42} \cdot 5^{56}} = 2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$$

$$23+19 = 42 \quad \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - p$$

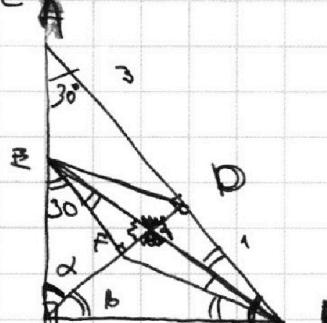
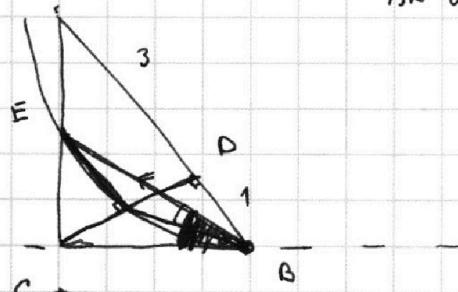
$$23+18 = 41$$

$$23+30 = 53$$

A

$$AB \parallel EF \quad AP:PB = 3:1$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ? = k^2 = \left(\frac{CE}{CA}\right)^2 = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$$



$$\frac{CA}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \tan \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{DB}{CD}$$

$$\tan \alpha = \frac{CD}{DB}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{AD}{DB} = 3$$

$$\text{as } \angle CFE + \angle EFB = \angle EFB \cdot \frac{1}{2} = \tan^2 \alpha = \frac{AD}{DB} = 3 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow 60^\circ = \alpha$$

$$\angle FEB + 30^\circ + \angle CBE = 90^\circ$$

I-

$$\begin{aligned}
 & \frac{m^3 f}{m^3 - f m^2} = \\
 & \frac{m^3 + f m^2 - f^2 m^2}{m^3 + f m^2 - f^2 m^2} = \\
 & \frac{m^3 + f m^2 - f^2 m^2}{m^3 - f^2 m^2} = \\
 & \frac{m^3 + f m^2 - f^2 m^2 + f^2 m^2 - f^2 m^2}{m^3 + f m^2 - f^2 m^2} = \\
 & \frac{m^3 + f m^2 - f^2 m^2 + f^2 m^2}{m^3 + f m^2} = \\
 & \frac{m^3 + f m^2}{m^3 + f m^2} = 1
 \end{aligned}$$

Čtvrhina čísla je například  $\frac{1}{4}$ . Jejich součet je 1.

Přesněji řečeno, čtvrtina čísla je vždy jeho polovina.

Odečte z čísla samotného svou čtvrtinu.

Ha odtáhlo čtvrtinu, zbytek je třetina čísla.

**MFTN**

<input type="checkbox"/>						
1	2	3	4	5	6	7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_3(x))^4 + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y}(3) = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3^4 = 3^5 \quad \frac{5}{2} - 6 = \frac{5-12}{2} = \frac{-7}{2}$$

$$\frac{11}{2} - 2 = \frac{11-4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\bullet \log_3^4(x) + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log x \cdot 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y}(3) = \frac{11}{2} \log_2 3 - 8$$

$$\log_3^4 xz + 2 \log_z 3 = \frac{11}{2} \log_2 3 - 8$$

$$\log_3 x = f \quad \log_3 z = g \quad ? \quad (\omega)$$

$$f^4 + 6 \cdot \frac{1}{f} = \frac{5}{2} \frac{1}{f} - 8 \quad - \frac{f^5 + w^5}{f^5 + wf^4} \mid \frac{f^5 + w^5}{f^5 + w^5 - wf^3}$$

$$5g^4 + \frac{2}{g^5} = \frac{11}{2} - 8 \quad - \frac{w^5 + fw^4}{-wf^4 - fw^4}$$

$$-wf(f^3 - w^3) =$$

$$= -wf(f - w)(f^2 + wf + w^2)$$

$$\begin{cases} f^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8f \\ w^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8w \end{cases} \quad (f^4 + w^4)(f^5 + w^5)$$

$$f + w = \log_3 x + \log_3 z = \log_3(xz) = \log_3(xy \cdot 5)$$

$$f^5 + w^5 + 8 = 8 - 8(f + w)$$

$$f^5 + w^5 = -8(f + w)$$

$$f + w = \log_3 x + \log_3 5y = \log_3(5xy) = \log_3 5 + \log_3(xy) = 0$$

$$\log_3(xy) = -\log_3 5 \quad xy = 3^{-\log_3 5} = \frac{1}{5^{\log_3 5}} = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

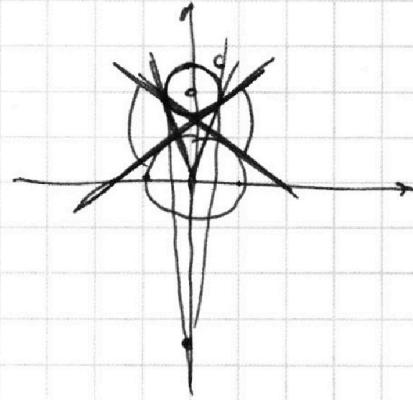
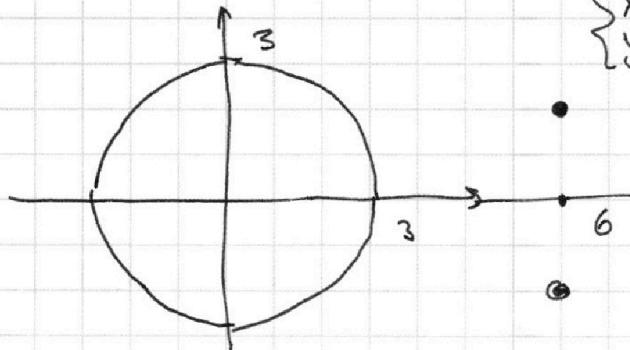
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = (x-6)^2 + (y-2)(y+2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=2; -2 \end{cases}$$



$$2y = 36 - ax$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

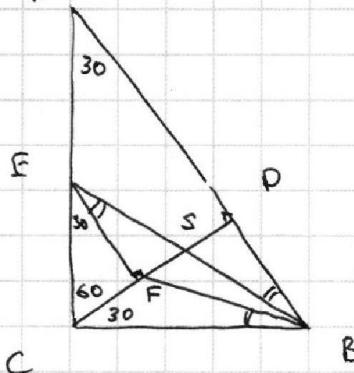
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle FEB + 30^\circ + \angle FEB + \angle EBF = 90^\circ$$

$$2\angle FEB + \angle EBF = 60^\circ$$

A



$$\triangle ABE \sim \triangle EBF$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CE = EA$$

$$(2) : \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi m$$

$$\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} + 2\pi m = \frac{29}{5} \frac{\pi}{20} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m$$

$$(3) : \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{2}{3}\pi - x + 2\pi k$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{20} + 2\pi k = -\frac{23}{30}\pi + 2\pi k$$

$$x = -\frac{23 \cdot 5}{6 \cdot 80 \cdot 4} \pi + \frac{25}{42} \pi k = -\frac{23}{24} \pi + \frac{5}{2} \pi k$$

$$(4) : \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{2}{3}\pi - x + 2\pi l$$

$$\frac{6}{5}x = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{20} + 2\pi l = -\frac{23}{30}\pi + 2\pi l$$

$$x = -\frac{23}{36}\pi + \frac{5}{3}\pi l$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

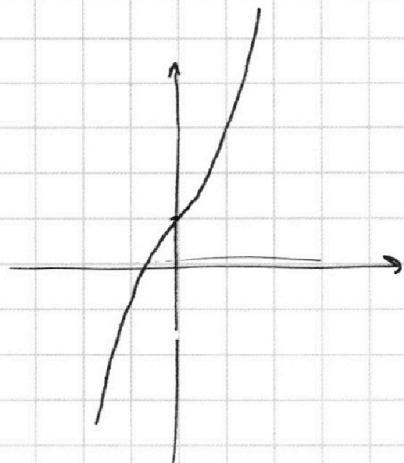
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$f = -ft -$$

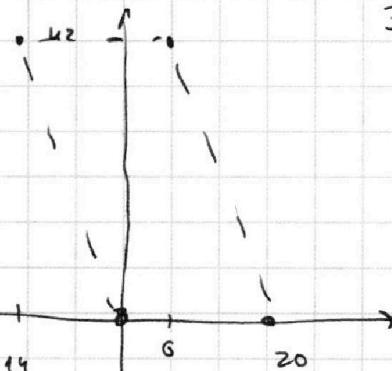
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

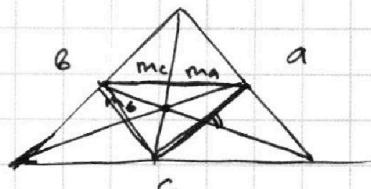
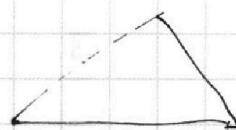
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

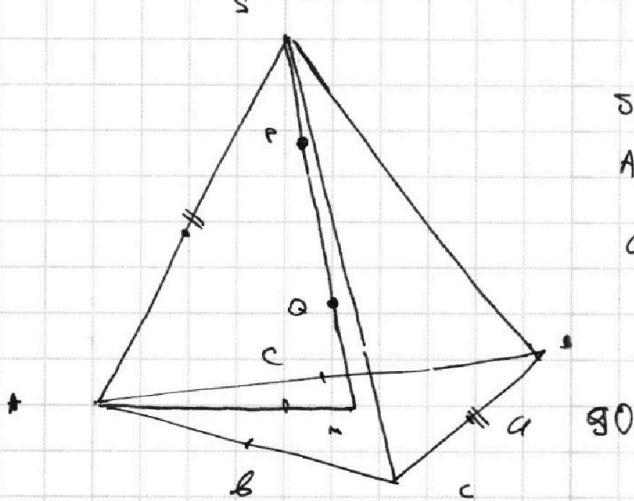
$$+\cancel{\frac{c^4}{4}} \cdot \frac{a^2}{4} + \\ + \frac{c^4}{4} \cdot \frac{b^2}{2}$$



$$\Delta A \cong \Delta C$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$$a = 12$$



$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = \\ = \sqrt{-\frac{a^6}{16}} - \frac{b^6}{16} - \frac{c^6}{16}$$

$$S =$$