



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$$

$$b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$$

$$c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

чтобы выполнялись условия и abc было наименьшим, никакие другие множители в a, b и c быть не должно.

$$ab \bmod 2^6 3^{13} 5^{11} \equiv 0, \text{ значит } \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$$

$$\text{аналогично } \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 16; & a_3 + c_3 \geq 25; & a_5 + c_5 \geq 28; \\ b_2 + c_2 \geq 14; & b_3 + c_3 \geq 21; & b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases}$$

складывая ~~каждые~~ неравенства со степенями двойки, тройки и пятёрки, получаем:

$$\begin{array}{l|l} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 & a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 & a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 & a_5 + b_5 + c_5 \geq 26 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{array}, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \\ a_2 + b_2 + c_2 \in \mathbb{Z}$$

$a_2; b_2; c_2; a_3; \dots \geq 0$ , целые

$$\text{добавим начальные условия: } \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

$$abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 3^{a_3 + b_3 + c_3} \cdot 5^{a_5 + b_5 + c_5}$$

$$\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}, \text{ такое возможно при } \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

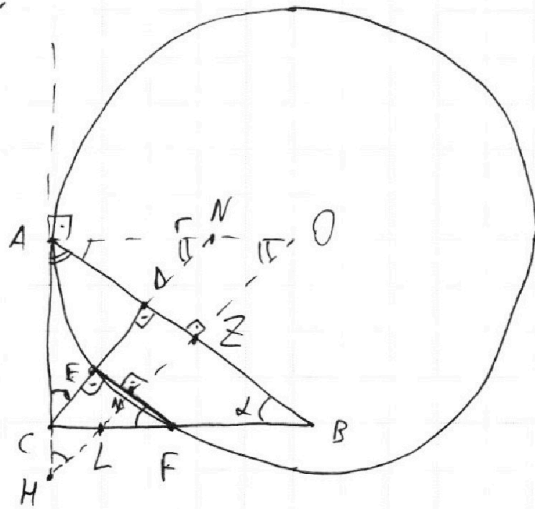
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$\angle ABC = \alpha$$

$$\angle EFC = \alpha, \text{ так как } AB \parallel EF$$

$$\angle CDB = 90^\circ, \angle CEF = 90^\circ, AB \parallel EF$$

$$\angle CAD = 90 - \alpha, \text{ из } \triangle ABC$$

$$\angle ACD = \alpha, \text{ из } \triangle ADC$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB \text{ по 3 углам: } \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{AB}{BD} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{7}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}; \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CEF; \frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = k; \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2$$

EF — хорда окружности, M — середина EF;  $\angle OMF = 90^\circ$

$OM \parallel CE$ ,  $\angle ANC = 90 - \alpha$ ;  $\angle AOM = 90 - \alpha$

$$CL = LF$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AO = r \text{ - радиус}$$

$$OZ = \sin \alpha = r = \sqrt{\frac{2}{7}} r$$

$$MO = \frac{r}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{7}{2}} r$$

$$ML = \frac{CL}{\sin \alpha} ; \quad LF = \frac{ML}{\sin \alpha} \rightarrow CL = ML$$

$$\downarrow$$
$$\angle CMF = 90^\circ$$

$$\downarrow$$
$$M = E$$

$$\downarrow$$
$$N = 0$$

$$AN = r$$

$$\text{Answer: } \frac{5}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$ .  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$$\sin x \in [-1; 1], \arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)] = [0; \pi]$$

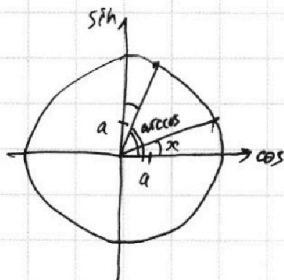
$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

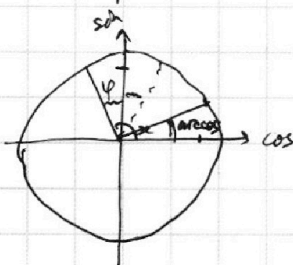
$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n, \quad x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$$

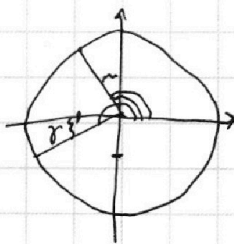


$$\arccos(\sin x) = \varphi = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$$



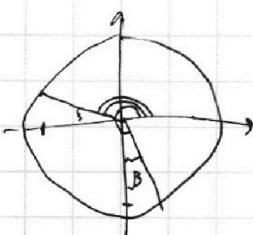
$$\varphi = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + \gamma = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n, \quad x \in \left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$$



$$\gamma = x - \pi - 2\pi n$$

$$\arccos(\sin x) = \pi - \beta = \frac{5\pi}{2} - x - 2\pi n, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right]$$



$$\beta = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n$$

~~или~~

~~$$\arccos(\sin x) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\pi n, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right]$$~~
~~$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n$$~~

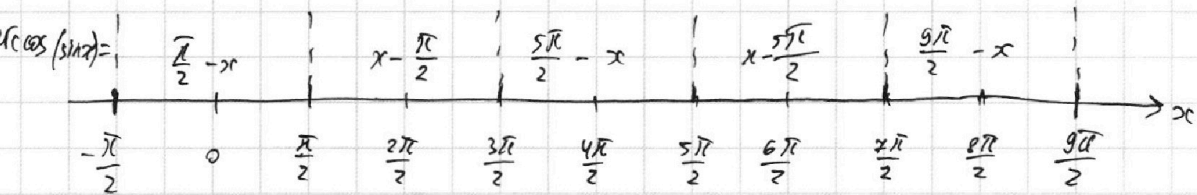
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ :  $5\pi - 10x = 9\pi - 2x$  ← подстановка случаев  
в исходное уравнение  
 $8x = -4\pi$   
 $x = -\frac{\pi}{2}$  (+)

2)  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ :  $10x - 5\pi = 9\pi - 2x$   
 $12x = 14\pi$   
 $x = \frac{7}{6}\pi$  (+)

3)  $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ :  $25\pi - 10x = 9\pi - 2x$   
 $8x = 16\pi$   
 $x = 2\pi$  (+)

4)  $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ :  $10x - 25\pi = 9\pi - 2x$   
 $12x = 34\pi$   
 $x = \frac{17}{6}\pi$  (+)

5)  $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$ :  $45\pi - 10x = 9\pi - 2x$   
 $8x = 36\pi$   
 $x = \frac{9}{2}\pi$  (+)

Ответ:  $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р.ч.

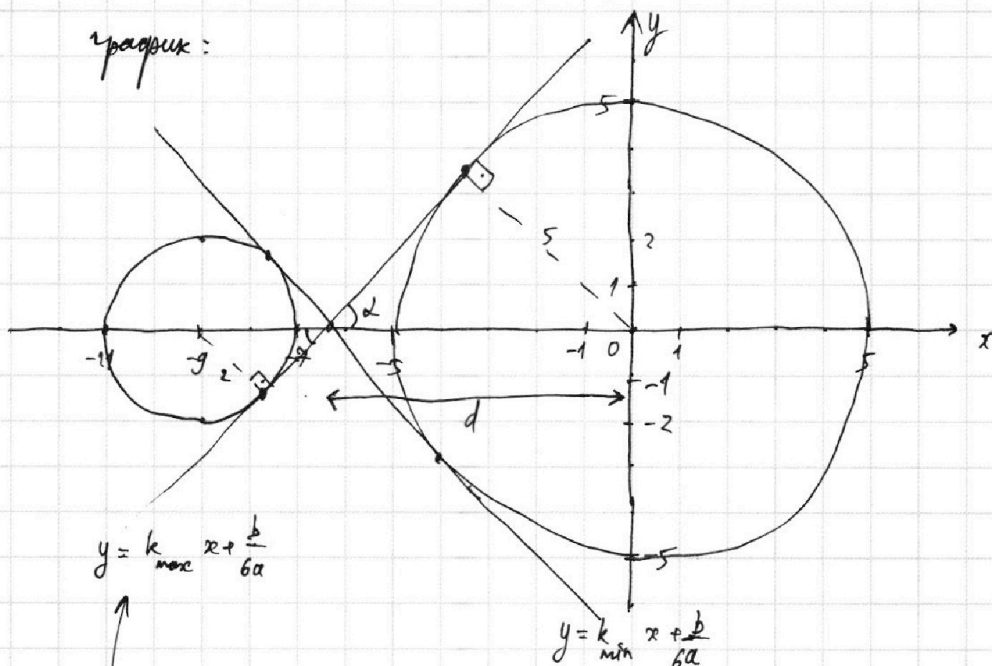
$$① \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$②: \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

график:



$$①: 6ay = b - 5x$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} - \text{прямая с наклоном } \frac{5}{6a} = k$$

когда прямая пересекает обе окружности - 4 решения

крайние случаи: прямая касается обеих окружностей

при  $k \geq k_{\max}$  или  $k \leq k_{\min}$  нельзя подобрать  $b$ , чтобы было

4 решения.

из-за симметрии графика относительно  $Ox$ ,  $k_{\min} = -k_{\max}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\operatorname{tg} \alpha = k_{\max}$$

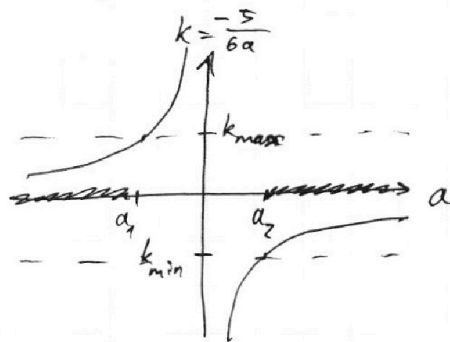
$$\sin \alpha = \frac{5}{d} = \frac{2}{9-d}; \quad 45-5d = 2d; \quad 7d = 45; \quad d = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = k_{\max}; \quad k_{\min} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = k_{\max}; \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = k_{\min}; \quad 42a_2 = 20\sqrt{2}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$



$$k_{\max} < k < k_{\min}$$

$$\begin{cases} a < a_1 \\ a > a_2 \end{cases}$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right)$$

Ответ:  $a \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

①  $\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 (11)^{-2} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)}^3 (11)^{-13} - 5 \end{cases}$

②  $\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 (11)^{-2} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)}^3 (11)^{-13} - 5 \end{cases}$

①:  $\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5$

$x > 0, x \neq 1$ ;  $t = \log_{11} x$

$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$

$3t^5 + 15t = 16$

②:  $\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5$

$0,5y > 0, 0,5y \neq 1$ ;  $p = \log_{11} (0,5y)$

$p^5 - 1 = -\frac{13}{3} - 5p$

$3p^5 + 15p = -16$

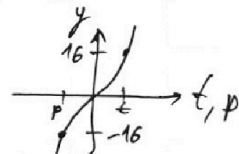
$\begin{cases} 3t^5 + 15t = 16 & , t = \log_{11} x \\ 3p^5 + 15p = -16 & , p = \log_{11} (0,5y) \end{cases}$

$3t^5 + 15t$  и  $3p^5 + 15p$  - возрастающие функции, симметричные относительно  $OY$ .

$t = -p$   
 $t + p = 0$

$\log_{11} (x \cdot 0,5y) = 0, 0,5xy = 1; xy = 2$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

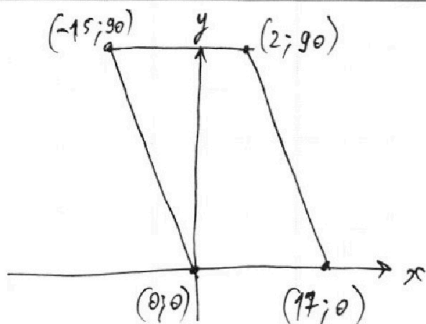
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



уравнение левой стороны  
параллелограмма:  $y = -6x$ ,  
 $y \in [0; 90]$

правой:  $y = -6x + 104$ ,  
 $y \in [0; 90]$

точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ :  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

при фиксированной точке  $A$ ,  $y_2 = -6x_2 + k$ ,  $k = 48 + 6x_1 + y_1$

на такой прямой 0; 15 или 16 точек с целыми  
координатами, которые попадают в параллелограмм

15 если  $k$  не делится на 6, 16 если делится

из уравнений сторон параллелограмма  $k \in [0; 104]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$n = 6x_1 + y_1 = k - 48$$

↑  
15 или 16 точек  $B$

$$n \in [-48; 56]$$

$$y_1 = n - 6x_1, y_1 \in [0; 90] \rightarrow n \in [0; 104] \rightarrow n \in [0; 56]$$

$k = n + 48$ , 48 делится на 6

если  $n$  делится на 6, то 16 точек  $B$ , иначе 15.

~~$n$  — кол-во  $B$   $\sum$  количества  $B = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 \cdot 9 + 15 \cdot 2 =$~~

0	16
1	15
2	15
3	15
4	15
5	15
6	16

~~$= 160 + 30 + 675 = 865$~~

54	16	16
55	15	15
56	15	15

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при каждом  $n$ ,  $A$  лежит на прямой  $y_1 = n - 6x_1$ ,  
16 или 15 точек  $A$  по такой же прямой.

$n$	кол-во $B$	кол-во $A$	вариантов пар $A; B$
0	16	16	256
1	15	15	225
2	15	15	225
3	15	15	225
4	15	15	225
5	15	15	225
6	15	15	225
...	...	...	...
54	16	16	256
55	15	15	225
56	15	15	225

$$\begin{aligned} \sum \text{вариантов} &= 256 \cdot 10 + 9 \cdot 5 \cdot 225 + 225 \cdot 2 = \\ &= 2560 + 450 + 10125 = 13135 \end{aligned}$$

$y_2 = -6x_2 + n + 48 \rightarrow$   ~~$B$  всегда выше~~  $B$  на прямой,  
которая выше, чем прямая  $A$ .  
 $\downarrow$   
нет пар  $(A; B)$ ,  $(B; A)$ ,  
силу делить не надо

Ответ: 13135

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.  $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$ ;  $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$ ;  $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \rightarrow a_2 + b_2 \geq 6; a_3 + b_3 \geq 13; a_5 + b_5 \geq 11$

$bc \rightarrow b_2 + c_2 \geq 14; b_3 + c_3 \geq 21; b_5 + c_5 \geq 13$

$ac \rightarrow a_2 + c_2 \geq 16; a_3 + c_3 \geq 25; a_5 + c_5 \geq 28$

$abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 3^{a_3 + b_3 + c_3} \cdot 5^{a_5 + b_5 + c_5}$

$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36$

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59$

$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52$



$S_{ABC} = S_{ADC} +$

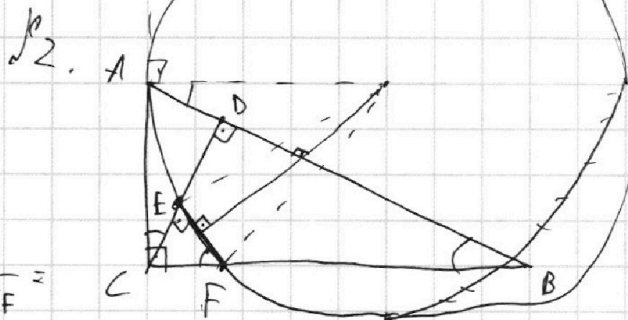
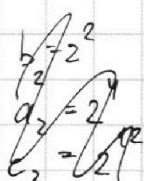
$a_2 + c_2 + b_2 \geq \max\left(\frac{36}{2}; a_2 + b_2; b_2 + c_2; a_2 + c_2\right) = 18 + S_{BCD} =$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} = S_{ADC} + \frac{k}{\text{tg} \alpha} S_{CEF} =$

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$

$= \frac{S_{ADC}}{k^2 S_{CEF}} + \frac{k}{\text{tg} \alpha} S_{CEF}$



$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{DB} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}}$

$AD = \frac{2}{5} DB$

$\frac{BC}{CF} = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{\text{tg} \alpha \cdot EF} =$

$= k \cdot \frac{1}{\text{tg} \alpha}$

$\angle CDB = 90^\circ = \angle CEF$

$\angle ACD = \alpha; \angle CAD = 90 - \alpha; \angle ECF = 90 - \alpha; \angle EFC = \alpha; \angle ABC = \alpha$

$\triangle ADC \sim \triangle CEF; \frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} =$

$\triangle ACB \sim \triangle CDB; \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD}; \frac{AB}{BD} = \left(\frac{CB}{BD}\right)^2 = \frac{49}{25}; \cos \alpha = \frac{5}{7} = \frac{BD}{CB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2. прог.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{49 - 25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

№3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x, \quad \sin x \in [-1; 1]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)]$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

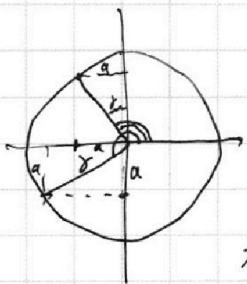
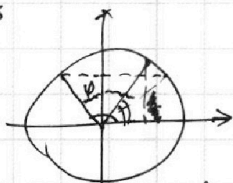
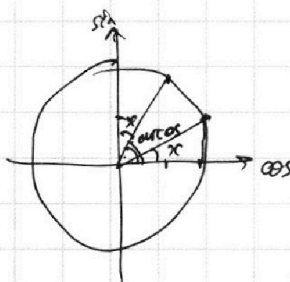
$$x \in \left[0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]: \arccos = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]:$$

$$\arccos = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi$$

$$\varphi = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos = x - \frac{\pi}{2}$$

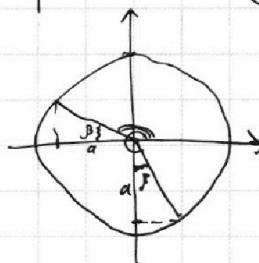
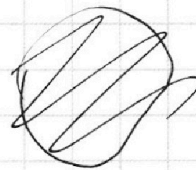
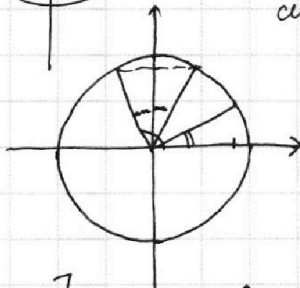


$$\varphi = x - \pi$$

$$\arccos = \frac{\pi}{2} + \varphi =$$

$$= x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$$



$$\arccos = \pi - \beta$$

$$\beta = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi(n+1)\right]$$

$$0 \leq 10 \arccos \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

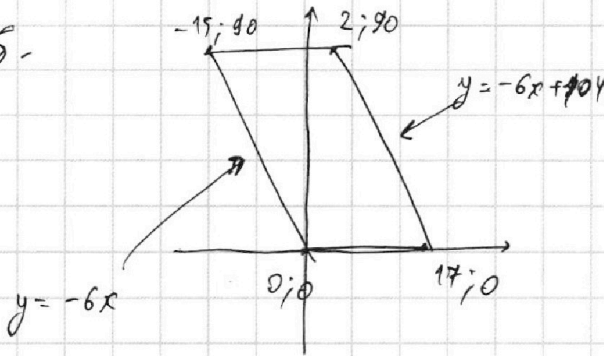
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

реш.



$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

Закрепим  $A(x_1; y_1)$

$$6x_2 + y_2 = 48 + 6x_1 + y_1$$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

или  $y = -6x + k : \leq 16$  точек с целыми координатами.  
 $y \in [0; 90]$

$k = 0 : 16$

$k \in [1; 6] : 15$

$k \in [7; 12] : 14$

$\dots$

$k \in [85; 90] : 1$

$k \bmod 6 = 0 : 16$  точек

$k \bmod 6 \neq 0 : 15$  точек

$k = 48 + 6x_1 + y_1$

$k \in [0; 104]$

$6x_1 + y_1 \in [-48; 56] = n$

$y_1 = n - 6x_1 \rightarrow n \in [0; 104] = [0; 56]$

$n \bmod 6 = 0 : 16$  точек

$n \bmod 6 \neq 0 : 15$  точек

$$\begin{array}{r} 17 \\ - 104 \\ \hline 48 \\ 56 \end{array}$$

n	кол-во точек
0	16
1	15
2	15
3	15
4	15
5	15
6	16
7	15
...	...
84	16
85	15
90	15

$\Sigma = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 + 15 \cdot 2 =$

$- 160 + 30 + 15 \cdot 45 = 865$

$$\begin{array}{r} 10125 \\ + 2560 \\ \hline 12685 \\ + 1245 \\ \hline 13930 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1675 \\ + 190 \\ \hline 865 \\ 1675 \\ + 225 \\ \hline 1900 \\ + 1125 \\ \hline 3025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ + 15 \\ \hline 225 \\ + 45 \\ \hline 270 \\ + 190 \\ \hline 460 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 16 \\ \hline 32 \\ + 16 \\ \hline 48 \\ + 16 \\ \hline 64 \\ + 16 \\ \hline 80 \\ + 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 112 \\ + 16 \\ \hline 128 \\ + 16 \\ \hline 144 \\ + 16 \\ \hline 160 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 - b_2 \geq 2; a_2 + b_2 \geq 6; a_2 = 4; b_2 = 2; c_2 = 12$$

$4 + 2 + 12 = 12 + 6 = 18$

$$a_3 - b_3 \geq 4; a_3 + b_3 \geq 13; a_3 = 9; b_3 = 4; c_3 = 17$$

$17 + 9 = 20 + 6 = 26$   
 $20 + 4 = 24$

$$a_5 - b_5 \geq 28 - 13 = 15; a_5 + b_5 \geq 11; a_5 = 18; b_5 = 0; c_5 = 13$$

$15 + 13 = 28$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№ 5. 1) } \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6 \log_{11} 11}{\log_{11} x} = \frac{-2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$t = \log_{11} x, \quad x > 0, x \neq 1$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{-2}{3 \cdot t} - 5 \quad / \cdot 3t, t \neq 0, x \neq 1$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \log_{(0,5y)} 3 (11^{-13}) - 5$$

$$p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5 \quad / \cdot 3p$$

$$3p^5 + 3 = -13 - 15p$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$t = -p$$

$$\log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = 0$$

$$\log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1; \quad \textcircled{xy = 2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

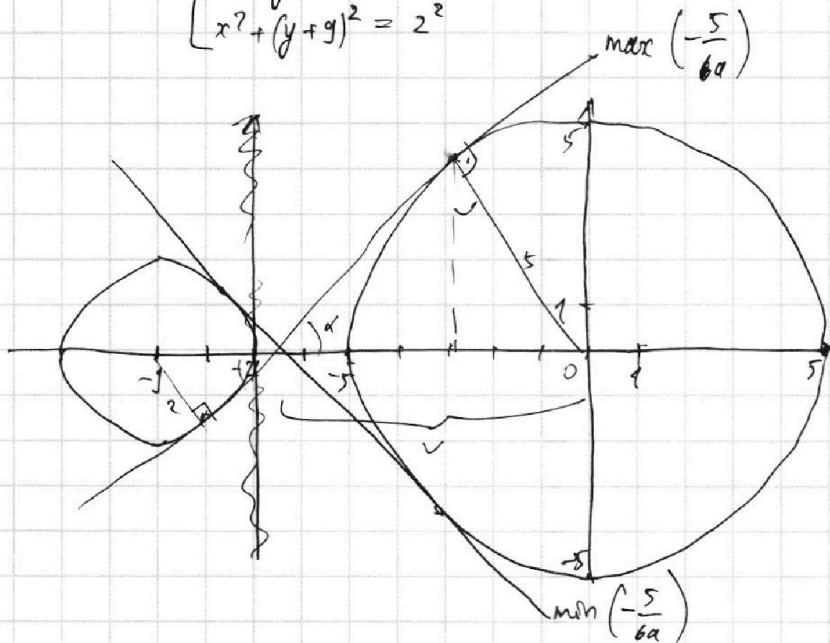
1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. 
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 48y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$



$$\frac{21^{10} - 49}{32}$$

$$5x + 6ay - b = 0: \quad 6ay = b - 5x; \quad y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{9\sqrt{2}} = \frac{2}{9\sqrt{2}}; \quad 45 - 5V = 2V; \quad 7V = 45; \quad V = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

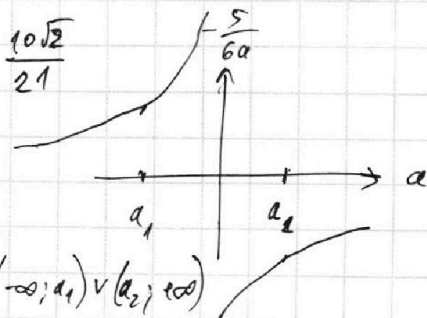
$$\tan \alpha = \max\left(-\frac{5}{6a}\right) = \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$\min\left(-\frac{5}{6a}\right) = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = \frac{7}{4\sqrt{2}}; \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$a \in \left( -\frac{10\sqrt{2}}{21} \mid \frac{10\sqrt{2}}{21} \right)$$



$$a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$$