



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$
 $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$
 $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

чтобы выполнялись условия и
абс было наименьшим, никаких
других множителей в а, б и с
быть не должно.

$$ab \bmod 2^6 3^{13} 5^{11} = 0, \text{ значит } a_2 + b_2 \geq 6$$
$$a_3 + b_3 \geq 13$$
$$a_5 + b_5 \geq 11$$

аналогично $a_2 + c_2 \geq 16; a_3 + c_3 \geq 25; a_5 + c_5 \geq 28;$

$$b_2 + c_2 \geq 14; b_3 + c_3 \geq 21; b_5 + c_5 \geq 13$$

складывая ~~нераавенства~~ неравенства со степенями двойки,
тройки и пятерки, получаем:

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 \quad | \quad a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 \quad | \quad a_3 + b_3 + c_3 \geq 30, \text{ т.к. } a, b, c \in \mathbb{N},$$
$$a_3 + b_3 + c_3 \in \mathbb{Z}$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 \quad | \quad a_5 + b_5 + c_5 \geq \cancel{26}$$

$a_2; b_2; c_2; a_3; \dots \geq 0$, целые

добавляем начальные условия: $a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

$$abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 3^{a_3+b_3+c_3} \cdot 5^{a_5+b_5+c_5}$$

$$\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}, \text{ такое возможно при}$$

$$a = 2^4 3^9 5^{15}$$
$$b = 2^2 3^4 5^0$$
$$c = 2^{12} 3^{14} 5^{13}$$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

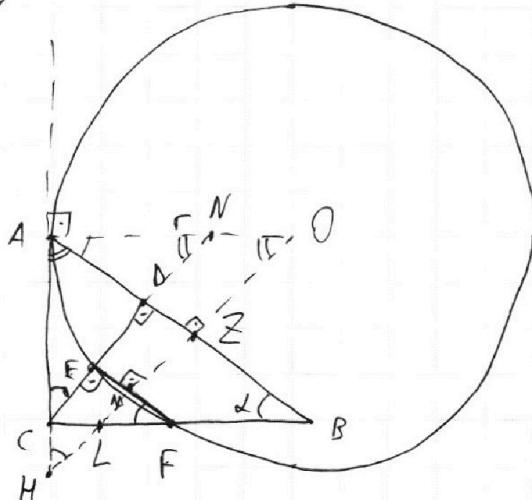
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$\angle ABC = \alpha$$

$$\angle EFC = \alpha, \text{ тк. } AB \parallel EF$$

$$\angle CDB = 90^\circ, \angle CEF = 90^\circ, AB \parallel EF$$

$$\angle CAD = 90 - \alpha, \text{ тк. } \triangle ABC$$

$$\angle ACD = \alpha, \text{ тк. } \triangle ADC$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB \text{ по 3 условия: } \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{AB}{BD} = \left(\frac{BC}{BD} \right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 = \frac{7}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}; \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CEF; \frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF} = k; \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2$$

EF - хорда окружности, M - середина EF; $\angle OMF = 90^\circ$

$$OM \parallel CE, \angle ANC = 90 - \alpha; \angle AOM = 90 - \alpha$$

$$\angle L = \angle F$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AO = r \text{ - радиус}$$

$$OZ = \sin \alpha = r = \sqrt{\frac{z}{r}} r$$

$$MO = \frac{r}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{z}{2}} r$$

$$ML = \frac{CL}{\sin \alpha}; LF = \frac{ML}{\sin \alpha} \rightarrow CL = ML$$

$$\angle CMF = 90^\circ$$

$$M = E$$

$$N = O$$

$$AN = r$$

Ответ:

$$\frac{5}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input checked="" type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n^o 3. \quad 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x \in [-1; 1], \arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)] = \\ = [-\frac{\pi}{2}; 0; \pi]$$

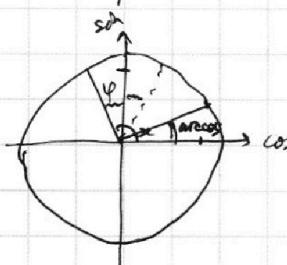
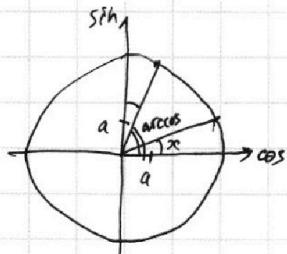
$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-\pi \leq -2x \leq \pi$$

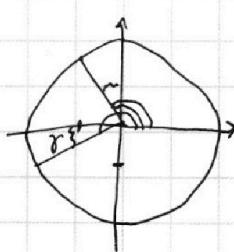
$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n, x \in [2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$$



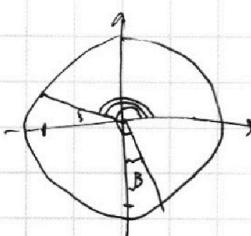
$$\arccos(\sin x) = \phi = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$$

$$\phi = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$$



$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + \gamma = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi n, x \in [\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$$

$$\gamma = x - \pi - 2\pi n$$



$$\arccos(\sin x) = \pi - \beta = \frac{5\pi}{2} - x - 2\pi n, x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right]$$

$$\beta = x - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n$$

~~$$\arccos(\sin x) = \pi - (\frac{\pi}{2} + x) - 2\pi n, x \in \left[-\frac{\pi}{2} - 2\pi n; \frac{\pi}{2} - 2\pi n\right]$$~~

~~$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n$$~~

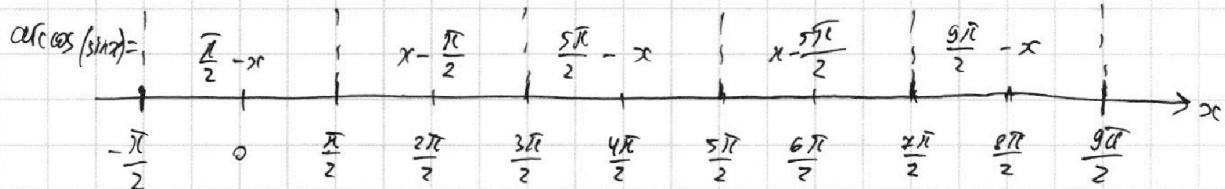
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] : 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad \leftarrow \text{подстановка приводит к исходному уравнению}$$
$$8x = -4\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{⊕}$$

$$2) x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] : 10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$
$$12x = 14\pi$$
$$x = \frac{7}{6}\pi \quad \text{⊕}$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] : 25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$
$$8x = 16\pi$$
$$x = 2\pi \quad \text{⊕}$$

$$4) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] : 10x - 25\pi = 9\pi - 2x$$
$$12x = 34\pi$$
$$x = \frac{17}{6}\pi \quad \text{⊕}$$

$$5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] : 45\pi - 10x = 9\pi - 2x$$
$$8x = 36\pi$$
$$x = \frac{9}{2}\pi \quad \text{⊕}$$

Общем: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

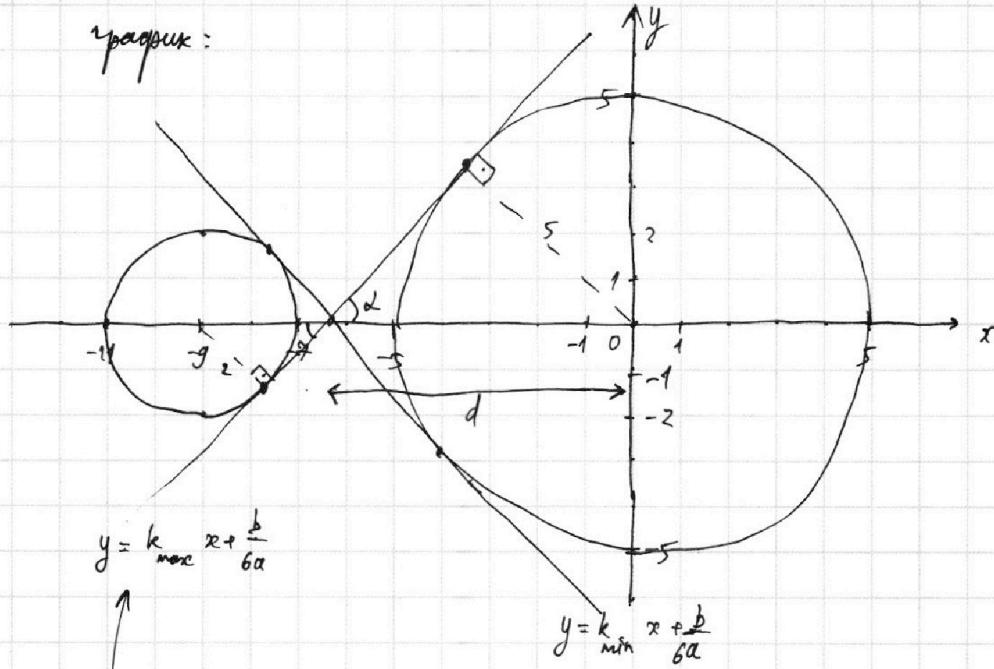
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. ① $\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$

②: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$

График:



①: $6ay = b - 5x$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ — прямая с наклоном $-\frac{5}{6a} = k$

Когда прямая пересекает обе окружности — 4 решения

Крайние случаи: прямая касается обеих окружностей

при $k > k_{\max}$ или $k \leq k_{\min}$ нельзя подобрать b , чтобы было
4 решения.

Из-за симметрии графика относительно OY , $k_{\min} = -k_{\max}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\tan \alpha = k_{\max}$$

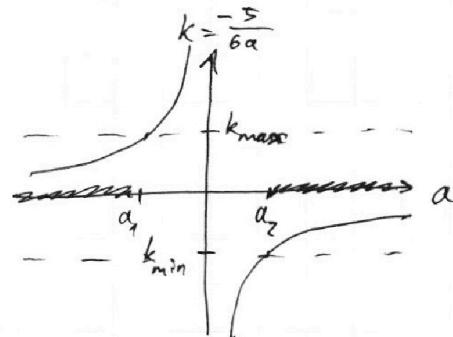
$$\sin \alpha = \frac{5}{d} = \frac{2}{g-d}; \quad 45 - 5d = 2d; \quad 7d = 45; \quad d = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{g}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{g}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = k_{\max}; \quad k_{\min} = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{6\alpha_1} = k_{\max}; \quad 42\alpha_1 = -20\sqrt{2}; \quad \alpha_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6\alpha_2} = k_{\min}; \quad 42\alpha_2 = 20\sqrt{2}; \quad \alpha_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$



$$k_{\max} < k < k_{\min}$$

$$\begin{cases} \alpha < \alpha_1 \\ \alpha > \alpha_2 \end{cases}$$

$$\alpha \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \alpha \in \left(-\infty; -\frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup \left(\frac{10\sqrt{2}}{21}; +\infty\right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№5} \quad \textcircled{1} \quad \log_{11}^4 x - 6 \log_{x^3} 11 = \log_{x^3} ((11)^{-2}) - 5$$

$$\textcircled{2} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{(0,5y)} 11 = \log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\textcircled{1}: \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{x^3} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5$$

$$x > 0, \quad x \neq 1 \quad ; \quad t = \log_{11} x$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$3t^5 + 15t = 16$$

$$\textcircled{2}: \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \cancel{\log_{(0,5y)}} \frac{1}{\log_{(0,5y)} x} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5$$

$$0,5y > 0, \quad 0,5y \neq 1 \quad ; \quad p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^5 - 1 = -\frac{13}{3} - 5p$$

$$3p^5 + 15p = -16$$

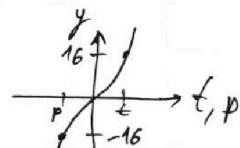
$$\begin{cases} 3t^5 + 15t = 16 \\ 3p^5 + 15p = -16 \end{cases}, \quad t = \log_{11} x, \quad p = \log_{11} (0,5y)$$

$3t^5 + 15t$ и $3p^5 + 15p$ - возрастающие функции, симметричные относительно OY .

$$t = -p$$

$$t + p = 0$$

$$\log_{11} (x \cdot 0,5y) = 0, \quad 0,5xy = 1; \quad xy = 2$$



Одн. реш.: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

A graph showing a function with a jump discontinuity at $x = 17$. The function consists of two parts: a decreasing parabola from $(-\infty, 17)$ and an increasing parabola starting at $(17, g_0)$. A vertical dashed line at $x = 17$ separates the two parts. The point $(17, g_0)$ is marked on the y-axis. The x-axis is labeled with $(0, 0)$ and $(17,$ $\text{---})$. The y-axis is labeled with y .

уравнение левой стороны
параллограмма: $y = -6x$,
 $y \in [0; 90]$

$$\text{npabou: } y = -6x + 104, \\ y \in [0; 90]$$

$$\text{则有 } A(x_1; y_1) \cup B(x_2; y_2) : 6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

при прямой подачной форме A , $y_2 = -6x_2 + k$, $k = 48 + 6x_1 + y_1$

на такой промежуток 0; 15 или 16 точек с узкими координатами, которые попадают в параллелограммы

15 even k me gennica no 6, 16 even gennica

и уравнений сопоставлены параллелограммы $k \in [0; 104], k \in \mathbb{Z}$

$$n = 6x_1 + y_1 = k - 48 \quad 15 \text{ или } 16 \text{ morek B}$$

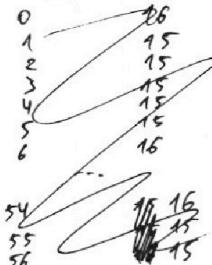
$$n \in [-48; 56]$$

$$y_1 = n - 6x_1, \quad y_1 \in [0; 90] \rightarrow n \in [0; 104] \xrightarrow{n \in [0; 56]}$$

$$k = n + 48, \quad 48 \text{ делится на } 6$$

Само по себе это не является нарушением, но 16 норм РБ, уменьшает 15.

$$\sum \text{коэффициентов } B = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 \cdot 9 + 15 \cdot 2 =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при $x_1 = n$, А лежит на прямой $y_1 = n - 6x_1$,

16 или 15 тоже A по такому же правилу.

n	количество B	количество A	вариантов пар A; B
0	16	16	256
1	15	15	225
2	15	15	225
3	15	15	225
4	15	15	225
5	15	15	225
6	16	16	256
...
59	16	16	256
55	15	15	225
56	15	15	225

$$\sum \text{вариантов} = 256 \cdot 10 + 9 \cdot 5 \cdot 225 + 225 \cdot 2 = \\ = 2560 + 450 + 10125 = 13135$$

$y_2 = -6x_2 + n + 48 \rightarrow$ ~~B лежит выше~~ B на прямой,
которая выше, чем прямая A.
↓
неч пар $(A; B)$, $(B; A)$,
сумму делить не надо

Ответ: 13135

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}; \quad b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}; \quad c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \rightarrow a_2 + b_2 \geq 6; \quad a_3 + b_3 \geq 13; \quad a_5 + b_5 \geq 11$$

$$bc \rightarrow b_2 + c_2 \geq 14; \quad b_3 + c_3 \geq 21; \quad b_5 + c_5 \geq 13$$

$$ac \rightarrow a_2 + c_2 \geq 16; \quad a_3 + c_3 \geq 25; \quad a_5 + c_5 \geq 28$$

$$abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 3^{a_3+b_3+c_3} \cdot 5^{a_5+b_5+c_5}$$

$$2(a_2 + c_2 + b_2) \geq 36$$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52$$



$$S_{ABC} = S_{ADC} +$$

$$a_2 + c_2 + b_2 \geq \max\left(\frac{36}{2}; a_2 + b_2; b_2 + c_2; a_2 + c_2\right) = 18 \quad + S_{BCD} =$$

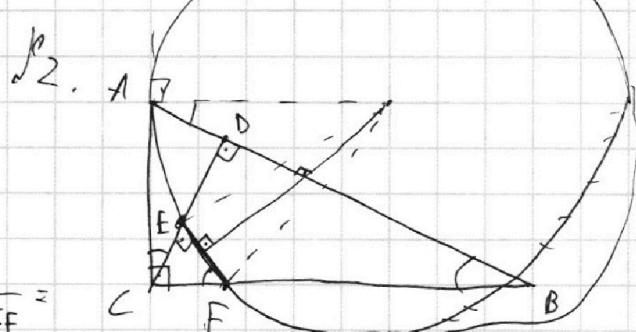
$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} = S_{ADC} + \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha} S_{CEF} =$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

$$= S_{ADk} + \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha} S_{\cancel{CEF}}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= 2 \\ a_2 &= 2 \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$AD = \frac{2}{5} DB$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$\frac{BC}{CF} = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{\operatorname{tg} \alpha \cdot EF} =$$

$$= k \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\angle CDB = 90^\circ = \angle CEF$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$$\angle ACD = \alpha; \quad \angle CAD = 90 - \alpha; \quad \angle ECF = 90 - \alpha; \quad \angle EFC = 90 - \alpha; \quad \angle ABC = \alpha$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CEF; \quad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB; \quad \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD} \quad ; \quad \frac{AB}{BD} = \left(\frac{CB}{BD}\right)^2 = \frac{49}{25} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{5}{7} = \frac{BD}{CB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. прог.

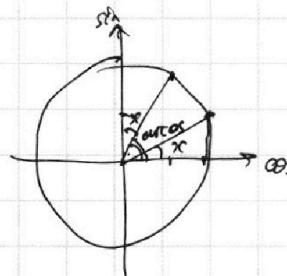
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{49-25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

№3. 10 $\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$, $\sin x \in [-1; 1]$

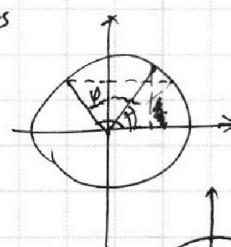
$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\arccos(\sin x) \in [\arccos(1); \arccos(-1)]$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

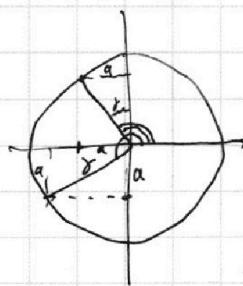


$$x \in [0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]: \arccos = \frac{\pi}{2} - x$$



$$x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n]: \arccos = \cancel{\pi} - (\frac{\pi}{2} - x) = \varphi$$

$$\varphi = x - \frac{\pi}{2}$$
~~$$\arccos = \cancel{\pi} - x - \frac{\pi}{2}$$~~

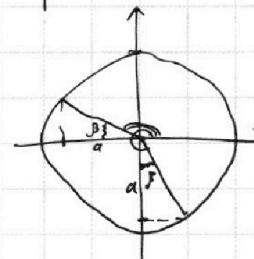
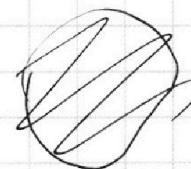
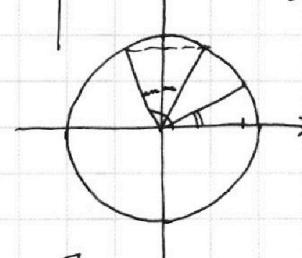


$$r = x - \pi$$

$$\arccos = \frac{\pi}{2} + \gamma =$$

$$= x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$$



~~$$\arccos = \pi - \beta$$~~

$$\beta = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$\arccos = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi(n+1)]$$

$$0 < 10 \arccos \leq 90\pi$$

$$0 \leq 10\pi - 2x \leq 90\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq 9\pi$$

$$\frac{9}{2}\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$



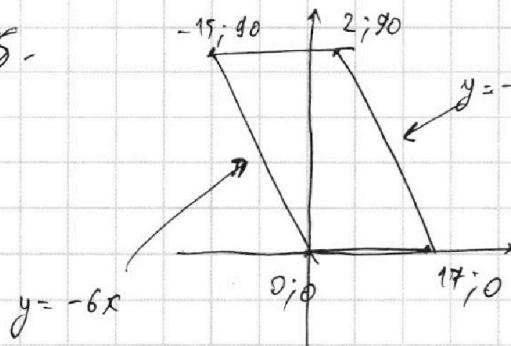
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 8 -



$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

Заданы A(x₁; y₁)

$$6x_2 + y_2 = 48 + 6x_1 + y_1$$

$$y_2 = (48 + 6x_1 + y_1) - 6x_2$$

$$\text{и } y = -6x + k : \leq 16 \text{ morek c yelkimi koordinatami}.$$

$y \in [0; 90]$

$$k = 21 \div 16$$

$$k \in [1; 6] = 15$$

$$k \in \{7, 12\} \Rightarrow 14$$

$$k_F[g_5, g_6] := 1$$

$$k \bmod 6 = 0 : 16 \text{ morek}$$

$k \bmod 6 \neq 0$: 15 morek

$$k = 4\pi G x_1 + y$$

$$k \in [0; \pi]$$

$$6x_1 + y_1 \in [-48; 56] = n$$

$$y_1 = n - 6x_1 \rightarrow n \in [0; 104] = [0; 56]$$

$$n \bmod 6 = 0 : \quad 96 \text{ more}$$

~medf f0 : 25 more

n ket - go morek

$$\sum = 16 \cdot 10 + 15 \cdot 5 \cdot 9 + 15 \cdot 2 =$$

0	16
1	15
2	15
3	15
4	15
5	10
6	10
7	15
84	10
85	15
56	15

$$-160 + 30 + 15 \cdot 45 = \cancel{865} \quad 865$$

$$\begin{array}{r}
 & 7 \\
 & \times 45 \\
 & 15 \\
 \hline
 & 225 \\
 + & 45 \\
 \hline
 & 675
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 \times 675 \\
 190 \\
 \hline
 865
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \times 45 \\
 15 \\
 \hline
 225 \\
 + 75 \\
 \hline
 675
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 16 \\
 \times 16 \\
 96 \\
 \hline
 256
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10125 \\
 2560 \\
 \hline
 12685 \\
 + 450 \\
 \hline
 13135
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 225 \\
 \times 45 \\
 \hline
 1125 \\
 + 900 \\
 \hline
 10125
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 \times 15 \\
 15 \\
 \hline
 225 \\
 + 190 \\
 \hline
 675
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 \times 15 \\
 15 \\
 \hline
 225 \\
 + 190 \\
 \hline
 675
 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 - b_2 \geq 2; a_2 + b_2 \geq 6; a_2 = 4; b_2 = 2; c_2 = 12$$
$$4 + 2 + 12 = 12 + 6 = 18$$

$$a_3 - b_3 \geq 4; a_3 + b_3 \geq 13; a_3 = 9; b_3 = 4; c_3 = 17$$
$$17 + 9 = 26 + 6 = 26$$
$$26 + 4 = 30$$

$$a_5 - b_5 \geq 28 - 13 = 15; a_5 + b_5 \geq 11; a_5 = 15; b_5 = 0; c_5 = 13$$
$$15 + 13 = 28$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N \# 1) \log_{11}^4 x - \cancel{6} \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6 \log_{11} 11}{\log_{11} x} = \frac{-2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$t = \log_{11} x, x > 0, x \neq 1$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3 \cdot t} - 5 \quad / \cdot 3t, t \neq 0, x \neq 1$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t + 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5$$

$$p = \log_{11} (0,5y)$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = \cancel{\frac{1}{\log p}} - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log p} - 5 \quad / \cdot 3p$$

$$3p^5 + 3 = -13 - 15p$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$t = -p$$

$$\log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = 0$$

$$\log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1; \quad \text{xy} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

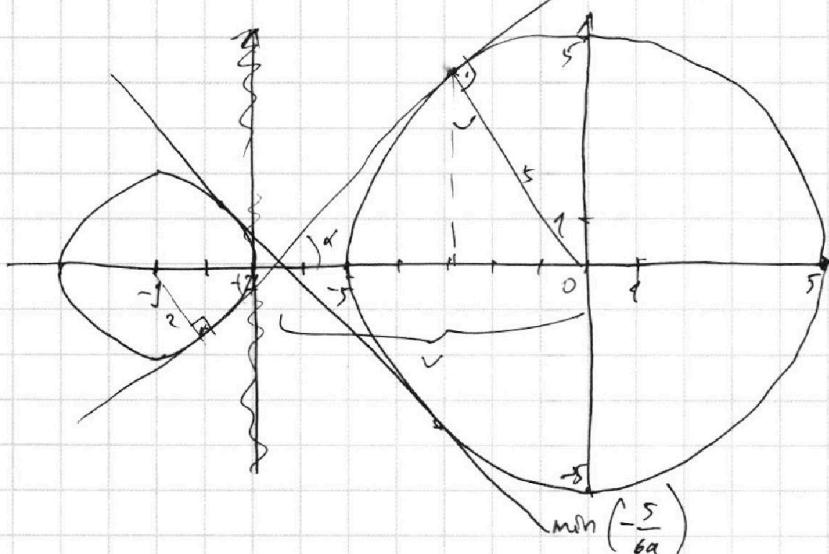
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4}. \quad \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\max\left(-\frac{5}{6a}\right)$$



$$-\frac{21}{32}$$

$$5x + 6ay - b = 0: \quad 6ay = b - 5x; \quad y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{32}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}; \quad 45 - 5V = 2V; \quad 7V = 45; \quad V = \frac{45}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{32}}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{32}} = \sqrt{\frac{32}{32}} = \frac{\sqrt{32}}{5}$$

$$\tan \alpha = \max\left(-\frac{5}{6a}\right) = \frac{-\frac{5}{6a} \cdot \frac{\sqrt{32}}{5}}{1 - \frac{25}{32}} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{32}}{\frac{7}{32}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\min\left(-\frac{5}{6a}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a_1} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}, \quad 42a_1 = -20\sqrt{2}; \quad a_1 = -\frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$-\frac{5}{6a_2} = \frac{4\sqrt{2}}{7}; \quad a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{21}$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{2}}{21}, \frac{10\sqrt{2}}{21}\right) \cup (\infty; a_1) \cup (a_2; \infty)$$

