



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

No ac : 5<sup>28</sup> но ошибко ~~26~~

значит abc : 5<sup>28</sup>

Так как 2, 3, 5 - взаимно простые числа,

$$abc : 2 \cdot 3 \cdot 5$$

значит abc  $\geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ , т.к. a, b, c взаимно просты

Пример, когда получается решение:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$\text{Тогда } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$$

$$\text{и } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}; 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}; 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ca = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}; 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ. } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

①  $d_1$  - максимальная степень двойки, на

которую делится  $a$ ;

②  $d_2$  - макс. степень 3, на которую делится  $b$

③  $d_3$  - макс. степень 5, на которую делится  $c$

аналогично введём  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  для  $b$  и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  для  $c$ .

$$ab : 2^{d_1 + \beta_1}; \text{ значит } d_1 + \beta_1 \geq 6$$

$$ab \nmid 2^{d_1 + \beta_1 + 1} \text{ т.к. } d_1, \beta_1 \text{- максимальные степени 2, входящие в } ab$$

аналогично получаем:

$$\begin{cases} d_1 + \gamma_1 \geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$$

Тогда ~~для~~ имеем  $\geq 16$  неравенства:

$$2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

$$\text{значит } abc : 2^{18}$$

Теперь решим  $d_2, \beta_2, \gamma_2$ :

$$d_2 + \beta_2 \geq 13 \quad - \text{из } ①$$

$$d_2 + \gamma_2 \geq 25 \quad - \text{из } ③$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \quad - \text{из } ②$$

$$d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{13 + 25 + 21}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$$

т.к.  $d_2 + \beta_2 + \gamma_2$  - число целое,  $d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$  значит  $abc : 3^{30}$

и решим  $d_3, \beta_3, \gamma_3$ :

$$d_3 + \beta_3 \geq 11 \quad - \text{из } ①$$

$$d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \quad - \text{из } ②$$

$$\text{значит } abc : 5^{26}$$

$$d_3 + \gamma_3 \geq 28 \quad - \text{из } ③$$

так как  $2, 3, 5$  число - взаимно простое,

значит  $abc : 2 \cdot 3 \cdot 5^{26}$

~~значит  $abc : 2 \cdot 3 \cdot 5^{26}$~~



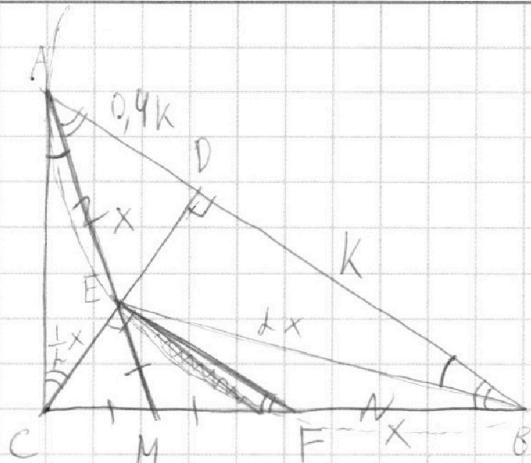
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AEF = 180^\circ - \angle ABC - \text{ang. benc.}$$

$$\angle EAB = 180^\circ - \angle AEF - 70^\circ - \angle B/EF$$

(comparing AE)

$$\angle EAB = \angle ABC$$

Takue

$$\angle ACD = \angle ABC, \text{ T.k. } \angle A - \text{đay}$$

$$B \cong ACD \cong ABC; \angle D = \angle ACB = 30^\circ$$

$\angle CAE = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle AE$ , тк.  $\angle ABE$  ор. на грече  $AE$ ;

AC- varazebial no genitivo.

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD/2}{CE \cdot EF/2} = \frac{CD \cdot AD}{CE \cdot EF} = \frac{AD \cdot DB}{EF^2},$$

$\triangle AEC \sim \triangle AEB$ , T.K. ~~AA~~

$$\angle CAE = \angle EBA;$$

$$\angle ACE = \angle BAE.$$

$$\text{Dy}^{+6} - \text{Ac} = \text{X}$$

~~Tolson BE LXFEC~~

~~$F^G = X$ , i.e.  $\Delta F^G \in \text{pt}(F)$  + pointwise~~

$$\angle CAB = 90^\circ - \beta \quad \text{and} \quad \angle BCA = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$$

~~Tan 6~~  $\triangle$  AED.

$$\sin B = \frac{EP}{X}$$

$$\cos \beta = \frac{0,4k}{x}$$

$$\sin(80^\circ - \beta) = \frac{\overline{ED}}{2x} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\overline{ED}}{2x}$$

$$\cos(\beta) = \frac{K}{\sqrt{x^2 + K^2}} \quad \sin(\beta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + K^2}}$$

$$\frac{2\sin B}{\cos B} = \frac{K}{2x} = \frac{1}{0.4k} = \frac{\sin B}{0.8d}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$EF = 1,4k - 2 \cdot 0,4k = 0,6k \text{ (т.к. если отсечь высоту } 6 \mu\text{m)}$$

таким же AEFB, или отсечут от лежащих до } 0,4k

$$\frac{AD \cdot DB}{EF^2} = \frac{0,4k \cdot k}{0,6 \cdot 0,6k^2} = \frac{0,4}{0,36} = \frac{10}{9}$$

Ответ.  $\frac{10}{9}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad \text{всегда } \cos \text{ от двух частей}$$

(1)  $\Downarrow$

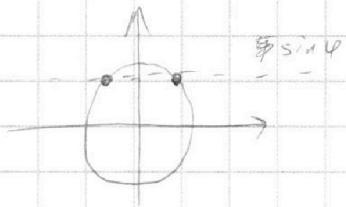
$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{8\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{-4\pi + 2x}{10}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{-2\pi + x}{5}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{-2\pi + x}{5}\right)$$

□



$$(*) \quad \begin{cases} x = \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi = \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Наго, что  $\frac{9\pi - 2x}{10}$  лежит от  $0$  до  $\pi$  включительно,  
итак же переход (1) был равносителен (т.е.  $\arccos$

от  $\cos \frac{8\pi - 2x}{10}$  не изменил  $\frac{9\pi - 2x}{10}$ )

$$9\pi - 2x \geq 0$$

$$x \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$\frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$$

$$-2x \leq \pi$$

Возвращаясь к системе (\*)

$$x \geq -\frac{\pi}{2} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\pi\right]$$

$$\begin{cases} 5x = -2\pi + x + 10\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x - 5\pi + 2\pi = x + 10\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(Подумалось)

1-й ряд корней:

$$\begin{cases} 4x = -2\pi + 10\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 6x = 7\pi + 10\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

I серия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{9\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$-1 \leq -1 + 5k \leq 9$$

$$0 \leq 5k \leq 10$$

$$k = 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}$$

II серия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{8\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$-3 \leq 7 + 10n \leq 27$$

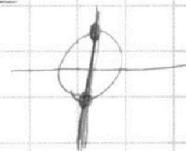
$$-10 \leq 10n \leq 20$$

$$n = -1; 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

Корни  $-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$  попали в 1-ю серию, т.к. лежат между

одинаковыми числами



Ответ.  $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$ .

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдём коэффициент при  $\sin \theta$  в сумме касательной и окружности, (коэффициенты  $k$  и  $k'$  из симметрии относительно оси  $Oy$ )

$$\sqrt{6^2 - 25} = \sqrt{11}$$

$$\sqrt{6^2 + 125} = \sqrt{144}$$

$$\sqrt{6^2 + 125} = \sqrt{144}$$

$$\sqrt{6^2 + 125} = \sqrt{144}$$

здесь  $\sqrt{144}$  радиус окружности  
увеличился на 2, а другую (меньшую) сократил до радиуса  
при этом касательная из той точки к новой окружности  
перешла в касательную из той же самой точки к исходной касательной

$$\begin{cases} y = kx - 9 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases} \quad \text{одно решение}$$

$$x^2 = 49 - (kx - 9)^2$$

$$x^2 = 49 - k^2 x^2 + 18kx - 81$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 18kx + 32 = 0$$

$$D = 0, \quad \Rightarrow \quad \text{одно решение}$$

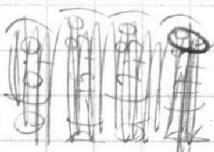
$$18k^2 - 4 \cdot 32(k^2 + 1) = 0 \quad | :4$$

$$81k^2 - 32k^2 - 32 = 0$$

$$49k^2 = 32$$

$$k = \pm \frac{4}{7}\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ } k \in \left(-\frac{21\sqrt{2}}{20}, \frac{21\sqrt{2}}{20}\right)$$



При  $k \in \left[-\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2}\right]$

Пункт касается или не имеет смысла. Точки с ОУ-стороной

$$-\frac{5}{6} \in \left[-\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2}\right]$$

Пункт не касается

$$\left(-\frac{21\sqrt{2}}{20}, \frac{21\sqrt{2}}{20}\right] \cup \left[\frac{21\sqrt{2}}{20}, +\infty\right)$$

$$-\frac{4}{7}\sqrt{2} \leq -\frac{5}{6} \leq \frac{4}{7}\sqrt{2}$$

$$1 - \frac{5}{6}$$

$$-\frac{20}{42}\sqrt{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{20}{42}\sqrt{2}$$

$$-\frac{1}{a} \leq$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Поработаем со 2 строкой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{избавляемся от 2 строки}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases} \quad \text{окр-стк с центром } b(0;0) \text{ радиус } 5$$

$$\begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{cases} \quad \text{окр-стк с центром } b(0;-9) \text{ радиус } 2$$

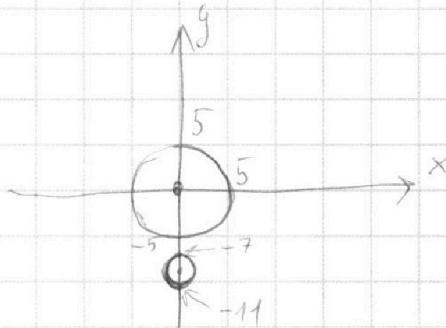
Теперь 1 строка:

1)  $a=0$

$$5x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{5} \quad \text{при } b=0 \text{ прямая } x=0 \text{ пересекает}$$

каждую окр-стк в 2 точках



2)  $a \neq 0$  - ненулевое  $a$

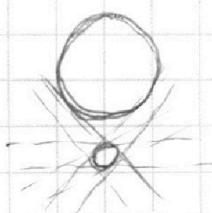
$$\frac{5x}{a} + 6y - \frac{b}{a} = 0$$

$$y = -\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} \quad \text{- прямая}$$

(ненулевое  $a$ -коэффициент уравнения)

(коэффициент при  $x$  не равен нулю)

Посмотрим при каких коэффициентах при  $x$ , если прямая не касалась окр-стк, а пересекала ее в двух точках, то это означало бы, что прямая проходит через обе точки касания, и это невозможно.



Касание достигается, когда коэффициент прямой равен кратному квадрату другой из единичных единиц, деленных на квадраты кратных к окружности.

Прямая не касается окр-стк, когда коэффициент при  $x$  не делится на квадрат единицы.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11^3} \frac{1}{11^2} + 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_{11} 11 - 5$$

$$\log_{11} x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5 \quad | \cdot t$$

~~Есть 4 корня - 1~~

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad \text{- линейный множитель, лг. решение} \\ (\text{ } t^5 \text{ и } 5t \text{ взаимно просты})$$

$$\log_{11}^4 \left( \frac{y}{2} \right) + \frac{1}{\log_{11} \left( \frac{y}{2} \right)} = \log_{11} \left( \frac{y}{2} \right)^3 (11^{-3}) - 5$$

$$\log_{11}^4 \left( \frac{y}{2} \right) + \frac{1}{\log_{11} \left( \frac{y}{2} \right)} = \frac{1}{3} \cdot (-13) \cdot \frac{1}{\log_{11} \left( \frac{y}{2} \right)} - 5$$

$$m = \log_{11} \left( \frac{y}{2} \right)$$

$$m^4 + \frac{1}{m} = -\frac{13}{3}, \frac{1}{m} - 5 \quad | \cdot m$$

$$m^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5m$$

$$m^5 + 5m + \frac{16}{3} = 0 \quad m^5 \text{ и } 5m \text{ взаимно просты} \Rightarrow \\ \text{окончание с 10 по 14} \Rightarrow \text{лг. решение}$$

$$m_0 = -t_0, \text{ где } t_0, t_0 - \text{ решения}$$

согласно уравнению (проверяется независимо)  
 $m = -t$ )

значит

$$\log_{11} x = -\log_{11} y$$

$$\log_{11} xy = \log_{11} x + \log_{11} y = 0, \text{ значит } xy = 1 \quad \begin{array}{l} \text{из} \\ \text{линейного} \\ \log_{11} x \end{array}$$

ответ. 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит  $AB = 14$ .

$$AB = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520} \rightarrow \text{т. Пицато } \triangle ABC.$$

$$AC = \sqrt{18^2 + 34^2} = \sqrt{324 + 1156} = \sqrt{1480}$$

$$AB = 2\sqrt{130}$$

$$AC = 2\sqrt{370}$$

Найдём  $B_1B$  и  $C_1C$ . Для этого заметим, что  $MA_1 = A_1B = A_1C = 10$

значит  $\angle B_1MC = 80^\circ$

Также можно записать Т. Пицато для  $\triangle A_1B_1C$  и  $\triangle B_1MC$ :

$$\begin{cases} MB^2 + C_1M^2 = C_1B^2 \\ B_1M^2 + MC^2 = B_1C^2 \end{cases} \quad \text{обозначим } y = \frac{1}{3} C_1C, \quad C_1B = \frac{AB}{2} = \sqrt{130}, \\ x = \frac{1}{3} B_1B \quad | \quad B_1C = \frac{AC}{2} = \sqrt{370}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 130 \\ x^2 + 4y^2 = 370 \end{cases} \quad 5(x^2 + y^2) = 500$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x^2 = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 10 \\ y^2 = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 30 \\ 3y^2 = 270 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 10 \\ y^2 = 90 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{10}, \quad \begin{array}{l} \text{т.к. отрезок} \\ \text{отрезок} \neq \text{ноль} \\ \text{запись} \end{array}$$

$$y = 3\sqrt{10}$$

$$C_1C = 3y = 9\sqrt{10}$$

$$B_1B = 3x = 3\sqrt{10}$$

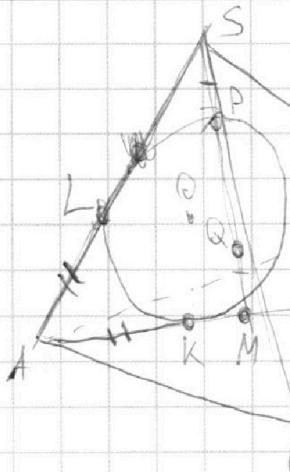
$$A_1A \cdot B_1B \cdot C_1C = 30 \cdot 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 3 \cdot 10^2 = 8100$$

Ответ: 8100.

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SA = BC = 20$$

$O$  - центр сферы  $\Omega$

~~Рассмотрим~~

a)  $AL = AK$  - как отрезки высот в  $\triangle ALK$   
из одной точки

посчитаем степень точек  $S$  отн. сферы  $\Omega$ :

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

посчитаем степень  $M$  отн.  $\Omega$ :

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$MK$ -кв. не делится

$$SP = MQ \text{ не делится}; \quad SQ = MP, \text{т.к. } \begin{cases} SM = SP + PM \\ SM = SQ + QM \end{cases}$$

$$\text{значит } MK^2 = SL^2$$

$$MK = SL$$

~~ИК~~

$$AM = AK + MK = AL + SL = AS = 20$$

$$AA_1 = 30, \text{т.к. } \frac{AM}{MA_1} = 2 - \text{но cb-бq не делится}$$

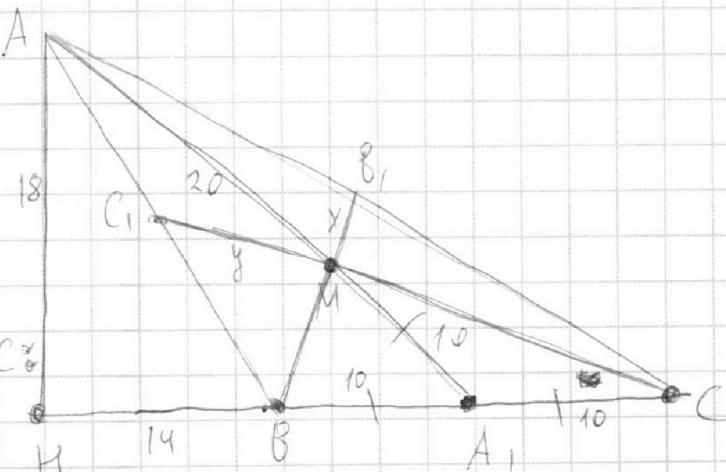
$h_A$  - высота из точки  $A$

$$S_{ABC} = \frac{h_A \cdot BC}{2}$$

$$180 = \frac{h_A \cdot 20}{2}$$

$$h_A = 18$$

Доказательство  $\triangle AOC \cong \triangle A_1OC_1$



$$R \triangle AA_1H, \text{но } \angle A_1AH \text{ не фигура } HA_1 = \sqrt{30^2 - 18^2} = 6\sqrt{5^2 - 3^2} = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

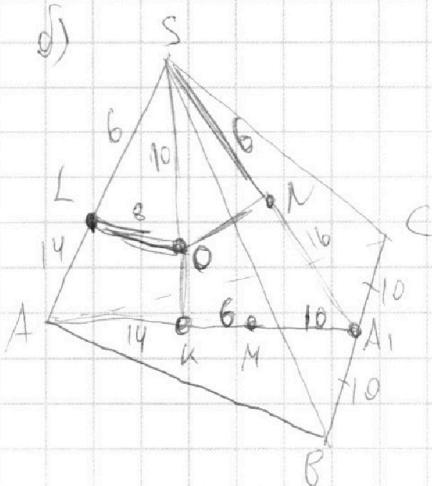
5

6

7

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$SL = SN$  как отрезки касательных из M

$$SL = 6$$

$$AL = 14$$

$$AK = AL = 14$$

$$KM = 6 \quad \text{т.ч. } AM = 20$$

$$SO = \sqrt{S^2 + LO^2} = 10$$

$AN = 16$ ,  $KA_1 = 16$  — как отрезки кас.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Б) } (80 - 2\beta) = \frac{1}{2x}$$

$$\cos \beta = \frac{0,4}{x}$$

$$\sin 2\beta = \frac{1}{2x} \quad 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2x}$$

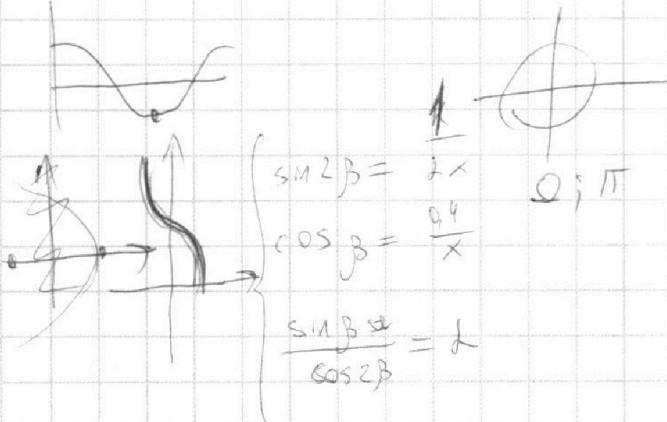
$$\sin \beta = \frac{0,4}{x} \quad 2 \sin^2 \beta = \frac{1}{0,4x}$$

$$\sin(80 - 2\beta) = \frac{0,4}{2x} \quad \sin \beta = \frac{1}{0,8x}$$

arccos - уравнение

$$\frac{\sin \beta}{\sin(80 - 2\beta)} = 2$$

$$\frac{1}{\frac{0,4}{x}} = \frac{1}{0,4x}$$



$$\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} = \frac{1}{2 \cdot 0,4}$$

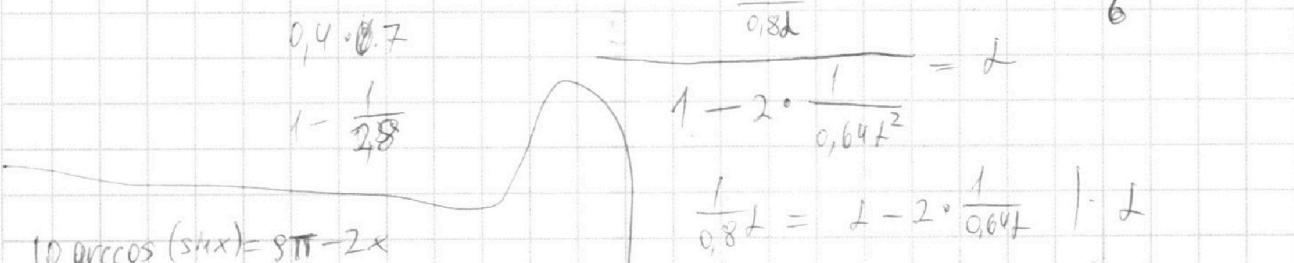
$$2 \sin \beta = \frac{1}{0,4x}$$

$$\frac{7}{6} - \frac{5}{3} =$$

$$= \frac{7-10}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{0,8x}$$

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3} =$$



$$10 \arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{8\pi - 2x}{10}$$

$$\sin x = \cos \left( \frac{3\pi}{10} - \frac{2x}{10} \right)$$

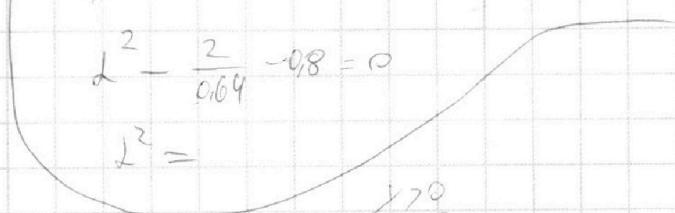
$$\sin x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi + \frac{x}{5} \right) = \sin \left( \frac{4\pi}{10} + \frac{x}{5} \right)$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} 3 |2| - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \log_{11} x - 5$$

$$\frac{1}{2} \log_x a = \log_{11} a$$

$$\log_x a^2 = 2 \log_x a$$



$$\frac{1}{0,8t} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{0,64t^2} \quad | \cdot t$$

$$1 - \frac{2}{0,64} = 0,8 = 0$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

$$1^2 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

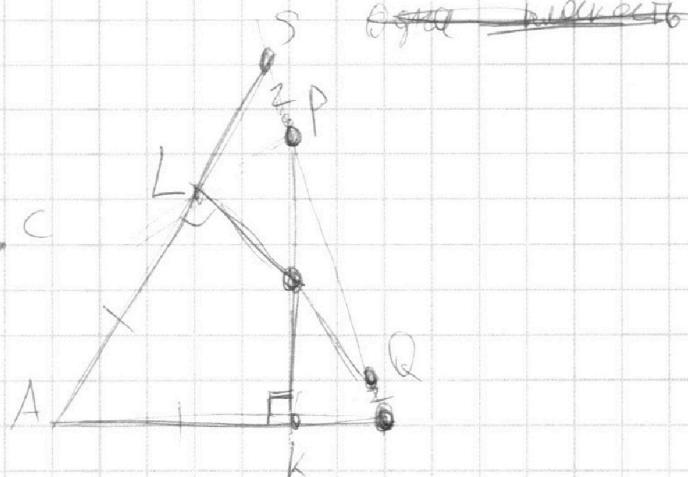
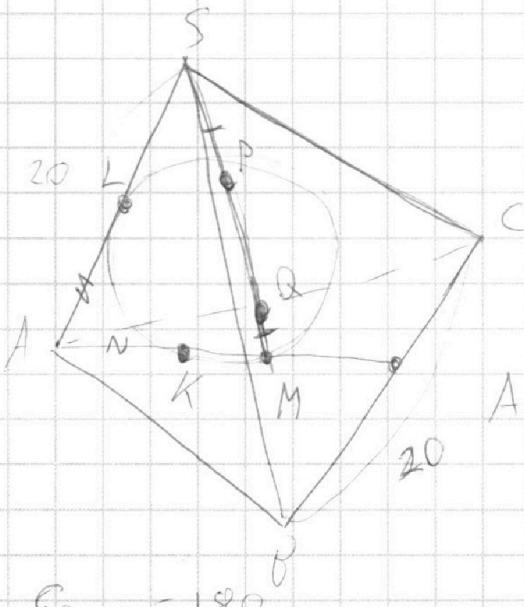
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



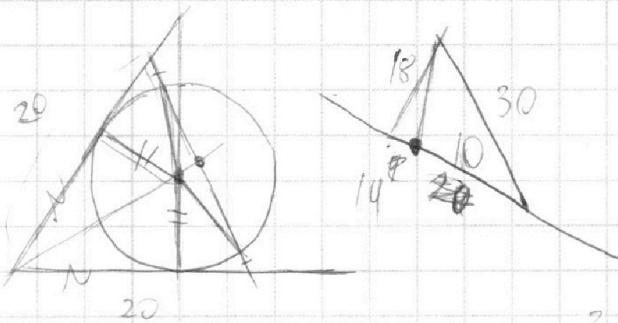
$$\angle A = 180^\circ$$

$$SA = AC = 20$$

$$\frac{20 \cdot 18}{2}$$

$$h =$$

$$\sqrt{340}$$



$$\begin{aligned} &3 \cdot 6 \\ &3 \cdot 10 \\ &6 \cdot 3 \quad 6 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\text{некорректно} = 30$$

$$h = 18$$

$$\sqrt{186 + 324}$$

$$\sqrt{520}$$

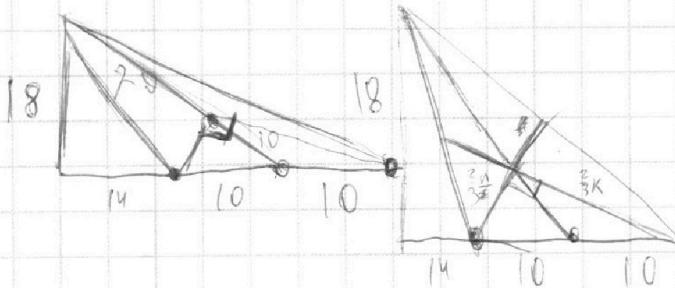
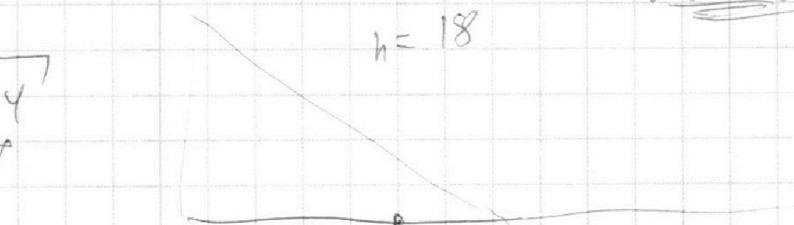
$$AL = AK$$

$$SL \cdot SA = SP \cdot SQ$$

$$11$$

$$MP \cdot MQ =$$

$$MK \cdot MA$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\cos 2\beta}{\sin \beta} =$$

$$\frac{ED}{2x} = \frac{1}{2}$$

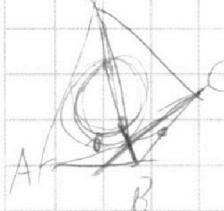
~~Неверно~~

~~130+4~~

~~5~~

~~5~~

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{0,64l^2}}{\frac{1}{0,8l}} = \frac{1}{2}$$

$$= +40,2 = 370,4$$

$1480 =$

$$0,8l \left( 1 - \frac{2}{0,64l^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$0,8l - \frac{16}{0,64l} = \frac{1}{2} \cdot l$$

$$0,8l^2 = 1 + \frac{16}{0,64} = \frac{0,1}{0,04}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, \text{ т.к. } \beta \text{ - угол}$$

$$0,8l^2 = 1 + \frac{10}{4}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{0,64 \cdot \frac{35}{8}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{0,08 \cdot 35}} = \frac{8}{10} l^2 = \frac{14}{4}$$

$$l^2 = \frac{100}{32} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{28}} = \frac{18}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{9}{14}} \quad l = \sqrt{\frac{35}{8}}, (l > 0)$$

$$0,4k = x \cdot \cos \beta$$

$$x =$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y - 77) = 0 \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$5x - b = 0$$

$$y^2 + 2 \cdot 3y + 81$$

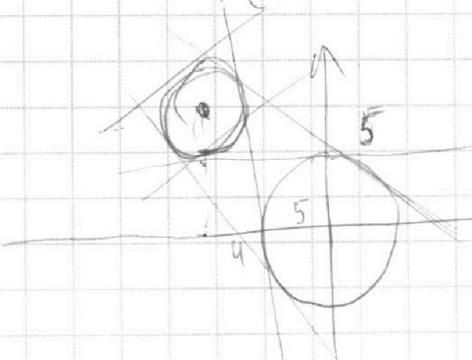
$$x^2 + (y + 9)^2 = 4$$

$$a \neq 0$$

$$\frac{5}{a}x + 6y - b = 0$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}$$

$$\boxed{-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}}$$



$\Rightarrow$

$$\frac{5}{a}x + 6y - b = 0$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}$$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



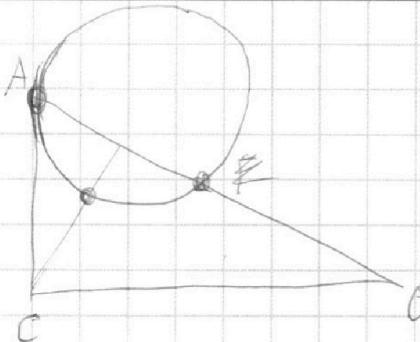
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}(xy)$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$$

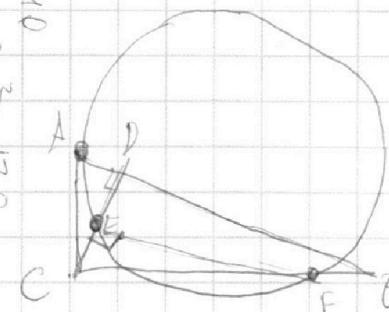
EF  
AP

$$4x^2 + y^2 = 150$$

X  
1  
y

$$\frac{\frac{1}{3}x^3 + 3}{3} = \frac{1}{3}x^2 + 1$$

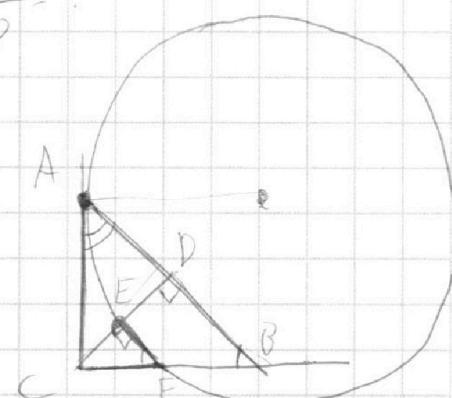
$$\frac{\log_{10} \frac{y}{x}}{m^4} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \cdot (-13) \log_{10} \frac{1}{m} - 5$$



100. 4 - 4 m

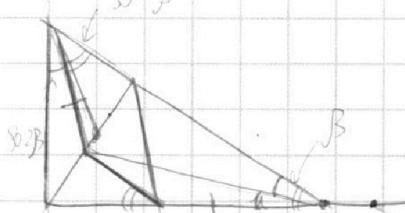


50



$$\frac{AO}{BD} = \frac{1}{1}$$

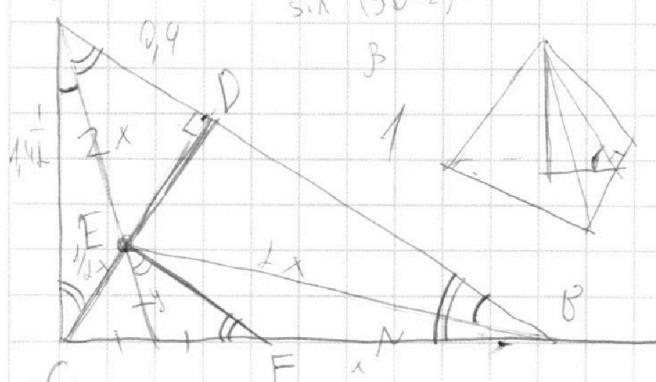
$$\frac{CE}{AE} = \frac{AB}{EF}$$



$$(14)^2 = 14^2 - \frac{1}{f^2} (f^2 + f^2 x^2)$$



[ACD]  
[CEF]



$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{24}{24 \times 8} = \frac{EF}{1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{н.н } abc = ?$$

$$abc : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$0 : 2$$

$$abc / (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28})$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ y-x=4 \\ 2y=17 \end{cases}$$

$$0 = 2^0$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{12}$$

$$a : 2^{21} \cdot 3^{12} \cdot 5^{23}$$

$$b : 2^3 \cdot 3^8 \cdot 5^{\beta_3}$$

$$c : 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{\beta_3}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{1}{6t} - 5 + t \quad \log x = t$$

$$6 \leq \delta_1 + \beta_1$$

$$13 \leq \delta_2 + \beta_2$$

$$25 \leq \delta_2 + \beta_2$$

$$21 \leq \beta_2 + \delta_2$$

$$t^5 - 6 - \frac{1}{6} + 5t = 0$$

$$x = 11^{\pm}$$

$$11 \leq \beta_1 + \delta_1$$

$$25 \leq \delta_2 + \beta_2$$

$$13 \leq \beta_2 + \delta_2$$

$$14, 11$$

$$18 = \frac{6+14+16}{2} \leq \delta_1 + \beta_1$$

$$2, 4, 12$$

$$t^5 + 5t - \frac{35}{6} = 0$$

$$29 \leq \frac{13+21+25}{2} \leq \delta_2 + \beta_2 + \gamma_2$$

$$6, 7, 19$$

$$t = 11$$

$$26 = \frac{24+28}{2} \leq \delta_3 + \beta_3 + \gamma_3$$

$$\delta_2 + \delta_2 + \beta_2 = 29$$

$$\frac{1}{36}$$

$$\beta_2 \leq 24$$

$$6t^5 + 30t - 35 = 0$$

$$\gamma_2 \leq 16$$

$$46 + 13 = 59$$

$$25 + \beta_2 \leq \delta_2 + \delta_2 + \beta_2 = 25$$

$$25 + \delta_2 \leq \gamma_2 + \delta_2 + \beta_2 = 25$$

$$30$$

$$\delta_2 \leq 8$$

$$\delta_2 + \delta_2 + \beta_2 = 30$$

$$5, 9, 17$$

$$\beta_2 + 25$$

$$\delta_2 + 21$$

$$\delta_2 + 13$$

$$31$$

$$\beta_2 \leq 25$$

$$\delta_2 \leq 29$$

$$\gamma_2 \leq 17$$

$$\gamma_3 + \delta_3 + \beta_3 = 26$$

$$4, 9, 17$$

$$Y_3 + \frac{1}{1}$$

$$\delta_3 + 13 \leq \beta_3 + 28$$

$$\beta_2 \leq \gamma_2$$

$$\gamma_3 \leq 15$$

$$\delta_3 \leq 13$$