



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

т.н.  $a, b, c \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow Q = abc \quad \& \quad Q \in \mathbb{N}$

$$ab = k_1 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 28 \\ 14 \\ \hline 42 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 28 \\ 13 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{13+5+30} \cdot k_1 k_2 k_3$$

$$= 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{48} k_1 k_2 k_3$$

т.н. все каноническое  
но deg все подомножит

$$\Rightarrow abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2} \text{ } \textcircled{G}$$

$$\textcircled{G} \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{48} k_1 k_2 k_3} = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24} \sqrt{3 k_1 k_2 k_3}$$

$\Rightarrow$  каноническое каноническое выражение

$$\sqrt{3 k_1 k_2 k_3} \text{ это } 3 \text{ канонич} \text{ } \textcircled{X}$$

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1} = 3$$

$\Rightarrow$  каноническое выражение

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

$$\text{Отвем: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2 (продолжение)

по теореме о пересечении в четырехугольнике

$$CB^2 = CF \cdot FT$$

$$\frac{CF}{CB^2} = \frac{1}{FT} \Rightarrow \left(\frac{CF}{CB}\right)^2 = \frac{CF}{FT}$$

получим  $EF = y$  и  $BT$  пересекают  $\omega$  в т. б

тогда  $BL = 2x + y$  т.к. ~~и~~  $\Rightarrow$  что следует из

$$\therefore DL = x + y$$

из условия  $EF \parallel BC$   
т.к. они были одна

параллельны

$$FT^2 + EF^2 = 4R^2$$

$$FD \cdot DT = DB \cdot DL = x(x+y)$$

$$FD = x\sqrt{3} - CF$$

$$\frac{y}{2} + x = R \cos \alpha = R \frac{CF}{4x} = R \frac{\sqrt{16x^2 - CB^2}}{4x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

Одн

$$y = \operatorname{arcsin} x, \quad y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad \text{и} \quad x \in [-1; 1]$$

Одн

$$\Rightarrow \text{т.ч. } (\sin(\frac{\pi}{2} - x)) \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

но значение  $\varphi = \frac{\pi}{2} - x$   $\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2}$

$$x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\text{Нужно } x = t + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - t - 2\pi k))$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin \varphi) = \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{нужно} \quad \varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{также} \quad \varphi = \varphi_0 + 2\pi k$$

$$\text{но} \quad \operatorname{arcsin}(\sin \varphi) \quad \text{берем} \quad \varphi_0 \quad \text{т.е.}$$

$$\operatorname{arcsin}(\sin(\varphi_0 + 2\pi k)) = \varphi_0$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - t - 2\pi k)) = t + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5t = t + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$6t = 2\pi - 2\pi k \quad t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$x = t + 2\pi k = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.ч.} \quad x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\text{но} \quad x = \frac{\pi}{3}; \quad x = 2\pi \quad x = -\frac{4}{3}\pi \quad x = -\frac{9}{3}\pi = -3\pi$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{4}{3}\pi; -3\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 14. а

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Реш (1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad (1.1) \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad (1.2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ур. окр.} \\ \text{с центром } (0, 0) \\ \text{и радиусом 3} \end{array}$$

(1.2)

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 36 + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \begin{array}{l} \text{ур. окр. с центром } (6, 0) \\ \text{и радиусом 2} \end{array}$$

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$$y = Ax + B \quad A = -\frac{a}{2} \quad B = \frac{3}{2}b$$

пуговка движется по окружности с центром в точке  $A$  и радиусом  $r$   
и коэффиц.  $B$  - зависимость между ими

$\Rightarrow$  Для фиксированного параметра  $B$   
у нас пуговка должна лежать на окружности  $(0, B)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

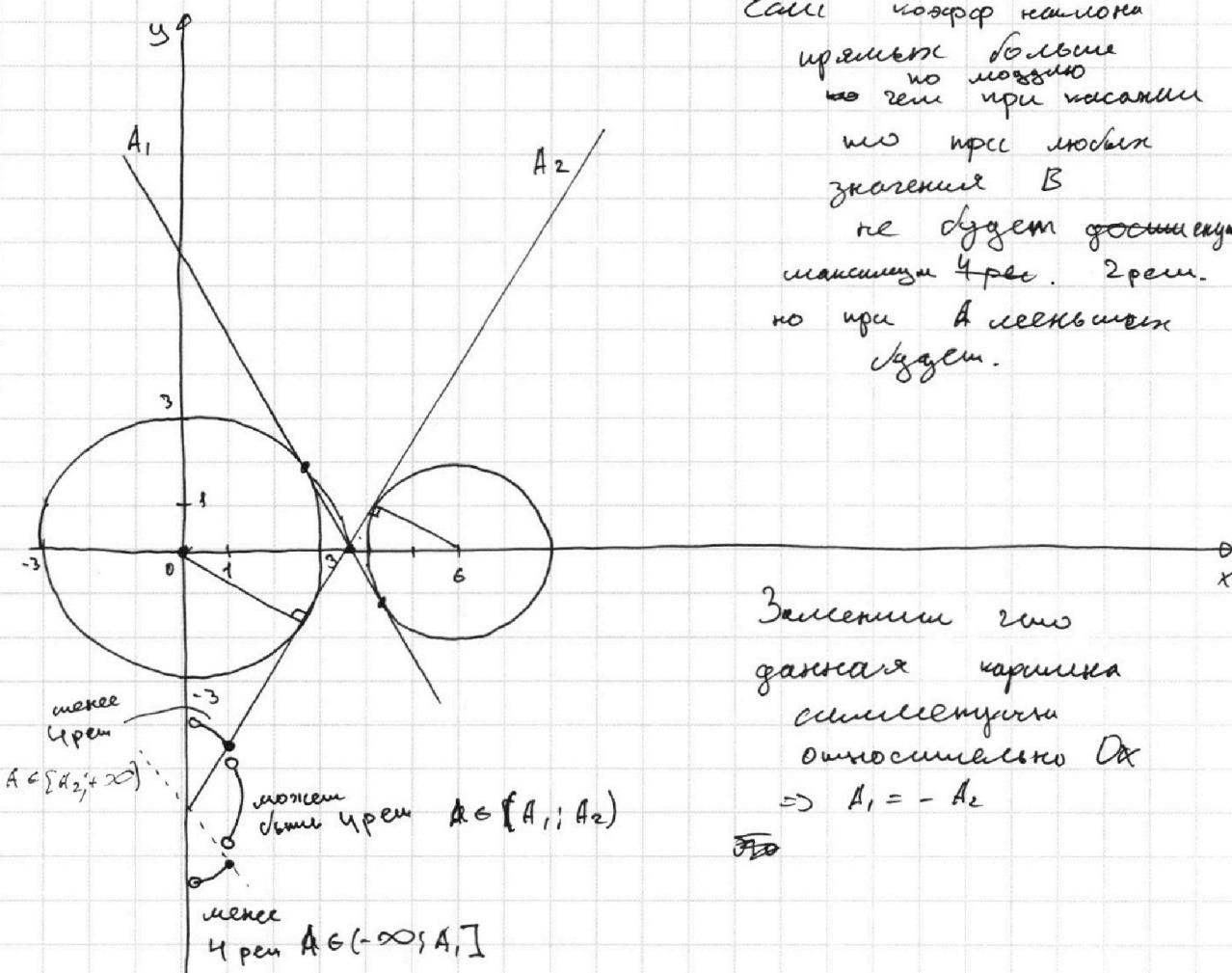
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)



Заменим это  
две точки картина  
симметричны  
относительно Ох

$$\Rightarrow A_1 = -A_2$$

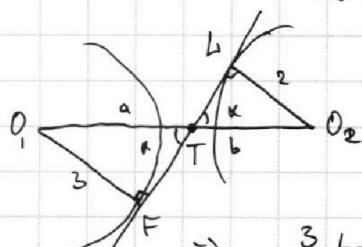
т.к.

Найдем  $A$  касания

$A_2$  будем искать

Проведем ~~радиусы~~  $O_1T$  и  $O_2T$  из центров окр. ка  
з. можем fazer

т.к. будем иск. п.н.



$\triangle O_1TF \sim \triangle O_2TF$  по углам углам

$$\Rightarrow \frac{O_1T}{O_2T} = \frac{a}{b} = \frac{O_1F}{O_2F} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}b \quad a+b = O_1O_2 = 6 \text{ (по постро.)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}b + b = 6 \quad \sin \alpha = \frac{2}{12/5} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

анalogично

$\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

$$\sin \alpha = \frac{5}{6} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$A_2 = \tan \alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad \Rightarrow A_1 = -A_2 = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$A \in (-\cancel{\frac{5\sqrt{11}}{11}}, -\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11})$$

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} \leq -\frac{\alpha}{2} \leq \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{11} \geq \alpha \geq -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

Ответ:  $\alpha \in \left( -\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11} \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$2) \log_3^4 (\log_2 y) + 2 \log_y 3 = \log_{2 \log_2 y} (3^2) - 8$$

$$1) \log_3^4 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_x 3 - 8$$

Заменя  $t = \log_3 x$

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{t}$$

$$\rightarrow t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$\begin{array}{l} t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0 \\ t^5 + 8t + 4 = 0 \\ t \neq 0 \\ \hline \begin{array}{l} 100084 \\ -2 \cancel{-24-8} \\ \hline 1 \end{array} \end{array} \quad \text{решение: } 2) \log_2^4 (\log_2 y) + \frac{2}{\log_2 y} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{\log_2 y} - 8$$

Пусть  $x y_1 = A \Rightarrow \log_3 x y_1 = \log_3 A \quad \log_3 x + \log_3 y_1 = \log_3 A$

также  $y_1 = Sg$

$$\text{но } S x y = 8A \Leftrightarrow xy = \frac{A}{5}$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 y_1 = \log_3 A \text{ но при этом } xy = \frac{A}{5}$$

$\Rightarrow$  ~~но~~ получим  $\alpha$  и  $\beta$  малому вероятности

т.е.  $x = x$  и  $y_1 = Sg$

и найдем  $\alpha$  все возможные  $A$

Заменя  $\alpha = \log_3 x \quad \beta = \log_3 Sg \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \alpha^4 + \frac{6}{\alpha} = \frac{25}{\alpha} - 8 \\ \beta^4 + \frac{2}{\beta} = \frac{55}{\beta} - 8 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^5 + 8\alpha + \frac{7}{2} = 0 \\ \beta^5 + 8\beta - \frac{7}{2} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$2 - \frac{1}{2} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15 (продолжение)

$$a^5 + 8a + \cancel{b} = 0$$

$$b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0$$

$$\oplus \quad a^{5+6^5} + 8(a+b) + \cancel{b^5} = 0$$

$$(a+b)(a^4 - \dots - b^4) + 8(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow a+b = 0$$

а второе число всегда деление 0

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = \log_3 1$$

$$\log_3 5xy = \log_3 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{5} \\y &= \frac{1}{5} \\y &= -1 \\x &= -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

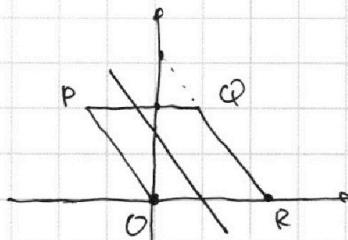


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$O(0;0); P(-14;42); Q(6;42); R(20;0)$$



$$A(x_1; y_1) \quad D(x_2; y_2)$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

~~$$AB \parallel CD \quad \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$~~

$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$y = y_2 - y_1$$

$$x = x_2 - x_1 \Rightarrow y = -3x + 33$$

Каждая фигура имеет **взаимно-перпендикулярные** стороны

$$y_{QR} = -3x + 60$$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$$

$$y_{QR} = -3x + b \quad b = -3 \cdot 20 + 60 = 60$$

$$y_{PO} = -3x \quad y_{QR} = -3x + 60$$

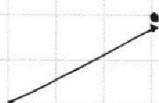
$$y_{PO} = 42$$

$$y_{QR} = 0$$

$$y = -3x + 33$$

$$(3^2 + 1^2)^2 = 14^2$$

Найдено



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение)

Надо найти код-бс

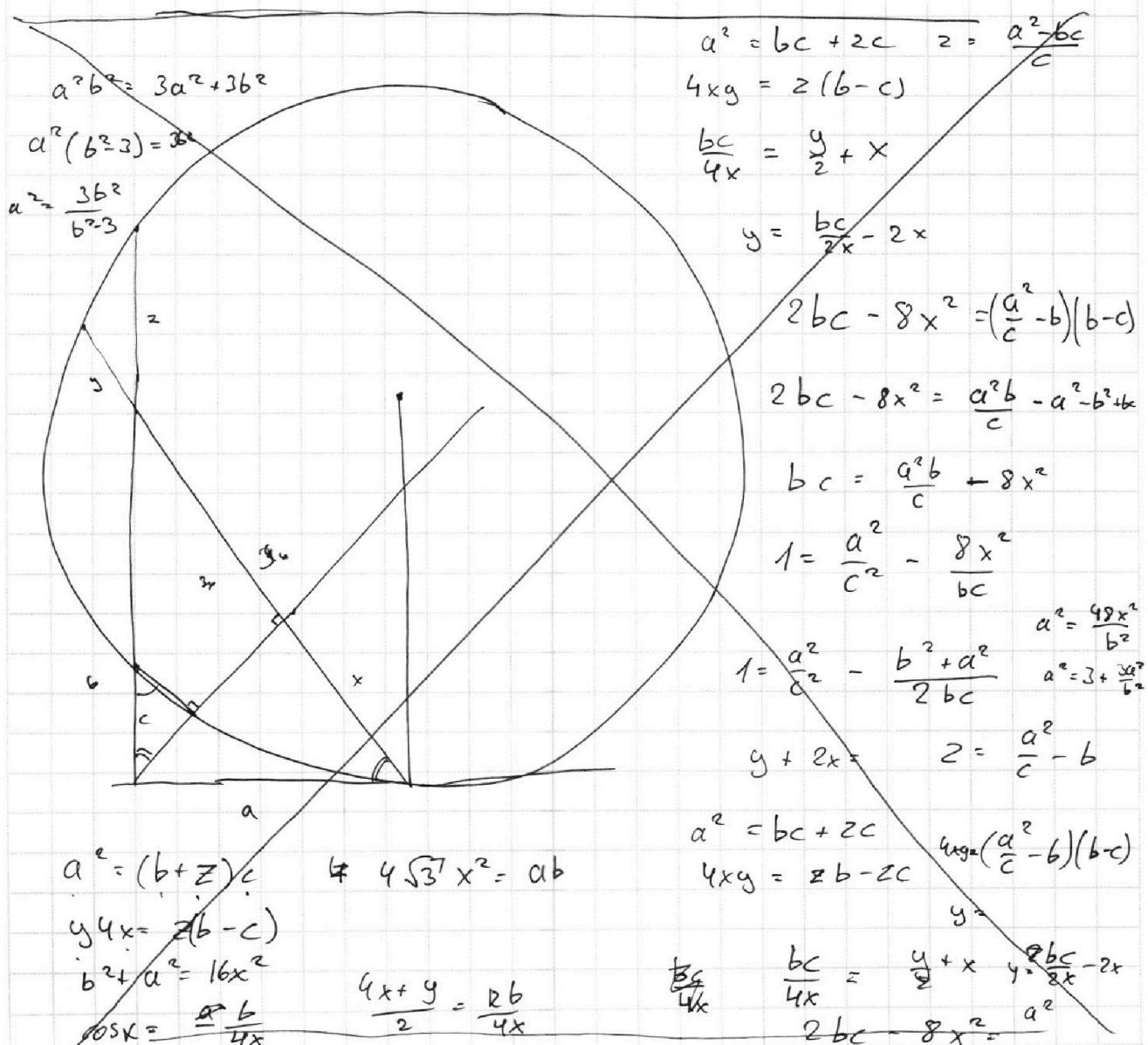
$$\text{отсюда } \vec{A} = \{x_1, y_1\} \quad \vec{B} = \{x_2, y_2\}$$

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

Надо найти код-бс пар векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$   
лежащих в плоскости подряд.  
также это  $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$

вершина  $C$  лежит на прямой

$$y = -3x + 33$$



$$a^2 = (b+z)c \quad \text{или} \quad 4\sqrt{37}x^2 = ab$$

$$4y = 2(b-c)$$

$$b^2 + a^2 = 16x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{4x}$$

$$\frac{4x+y}{2} = \frac{2b}{4x}$$

$$a^2 = bc + 2c \quad 4xy = z(b-c)$$

$$\frac{bc}{4x} = \frac{y}{2} + x \quad y = \frac{8bc}{8x} - 2x$$

$$2bc - 8x^2 = \frac{a^2}{c}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

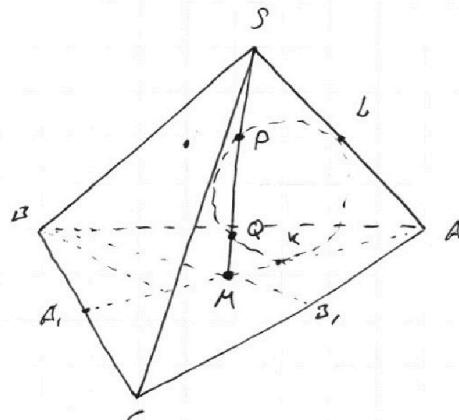
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7 SADC



$$S_{\triangle ABC} = 90$$

$$SP = QM$$

$$SA = BC = 12$$

Мдааки моей  
пересекущие диагонали  
2:1 сечение от вершины

$$S = 90 = \frac{BC \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{90 \cdot 2}{12} = 15$$

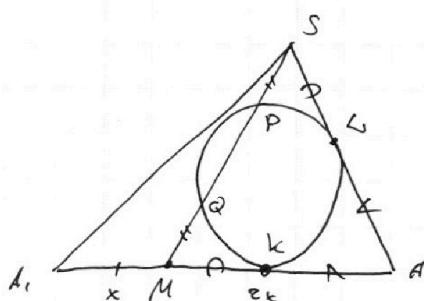
$$HA_1 = \sqrt{\frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{2}}$$

~~$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot h}{2}$$~~

$$BB_1 = \sqrt{\frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{2}}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}}$$

Картируем сечение пирамиды ищем AAS



$$SA = 12$$

$$\text{но т. о. выс. и сечущий} \\ S_{\triangle L}^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$MQ = SP \quad QP \text{ - общая}$$

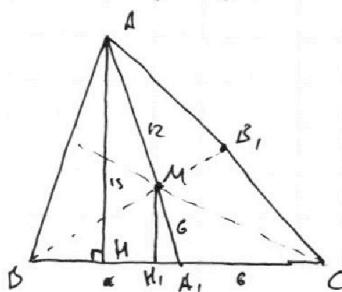
$$\Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow MK = SL$$

$$LA = AK$$

$$LA + SG = AK + MK = 12$$

$$\Rightarrow MA = SA = 12 \Rightarrow A_1M = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$$

Картируем основание



$$DA_1 = 6$$

AH - высота к б. А

$$HA_1^2 = AA_1^2 - HA^2 \quad \text{но т.п.}$$

$$\Rightarrow HA_1 = \sqrt{(3 \cdot 6)^2 - (3 \cdot 5)^2} = 3\sqrt{11}$$

пополам MN, - высота на BC из т.М

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{3} AH = 5$$

$$H_1A_1 = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} \Rightarrow BH_1 = 6 - \sqrt{11}$$

$$H_1C = 6 + \sqrt{11}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 (продолжение).

$$BM^2 = BD_1^2 + H_1 M^2 \quad \leftarrow (6 - \sqrt{11})^2 + 25 = 36 - 12\sqrt{11} + 11 + 25 \quad \textcircled{2}$$

$$CM^2 = CH_1^2 + H_1 M^2 \quad \leftarrow (6 + \sqrt{11})^2 + 25 = 36 + 12\sqrt{11} + 11 + 25$$

$$BD_1 = \frac{3}{2} BM = \frac{3}{2} \sqrt{(6 - \sqrt{11})^2 + 25} = 3\sqrt{3(6 - \sqrt{11})}$$

$$BC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{3}{2} \sqrt{(6 + \sqrt{11})^2 + 25} = 3\sqrt{3(6 + \sqrt{11})}$$

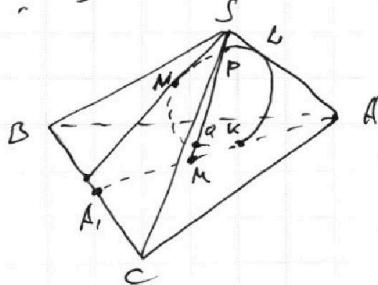
$$AA_1 \cdot BD_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3\sqrt{3(6 + \sqrt{11})} \cdot 3\sqrt{3(6 - \sqrt{11})} =$$

$$= 9 \cdot 9 \cdot 2 \sqrt{3 \cdot 3 \sqrt{(6 + \sqrt{11})(6 - \sqrt{11})}} = 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{36 - 11} =$$

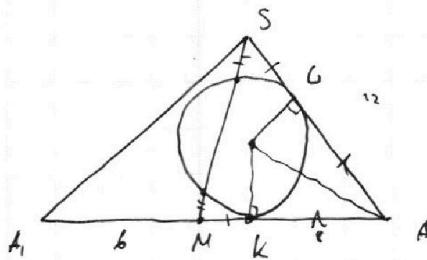
$$= 30 \cdot 81 = \cancel{27} 2430$$

а) Ответ: 2430

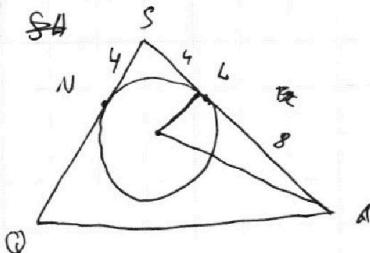
б)



б) б) значение  $AA_1$ ,



Продолжим  $SN$  до пересечения с  $BC$  в точке  $Q$ .  
б) значение  $SD$ .



$SN = SD$  — касательное из  
одной точки

$$\Rightarrow LA = 12 - 56 = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

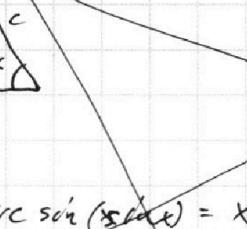
$2\pi$

$$3\frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow$  обратимся к  $x$  квад.

Пусть

$\cos x > 0$



$$\cos x = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin x = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\sin x = \cos k$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$f(y) = \arcsin(y)$$

$$y \in [-1; 1]$$

$$E(f) : f(y) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow E(f(y)) = \arcsin(y) \quad f(y) \in [-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \cancel{x + \frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cancel{5x} \quad \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi \quad x = \frac{\pi}{3}$$

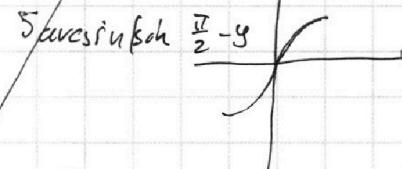
$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = y + 2\pi k$$



$$\frac{5\pi}{2} - 5y = y + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$6y = 2\pi + 2\pi k$$

$$y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}k$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}k + 2\pi k =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}k$$

