



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$ ,  $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ ,  $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$  (ни точка знает, что  $b$  чь рхложим

на простые множители должны быть 2, 3, 5, возможно, в какой-то степени, если какой-то из

или будет еще иметь простые множители  $p \neq 2, 3, 5$ , то произведем их будет минимально).

Тогда т.к.  $ab : 2^6$ ,  $bc : 2^{14}$ ,  $ac : 5^{16}$ ,  $d_1 + \beta_1 \geq 6$ ,  $\beta_2 + \gamma_2 \geq 14$ ,  $\gamma_1 + d_1 \geq 16$ , сложим эти неравенства:

$$2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36 \Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18, \text{ т.к. } abc : 2^{18}$$

Аналогично  $d_2 + \beta_2 \geq 13$ ,  $\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$ ,  $\gamma_2 + d_2 \geq 25 \Rightarrow d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2}$ , но  $d_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30. \Rightarrow abc : 3^{30}$$

Поскольку ~~т.к.~~  $\gamma_3 + d_3 \geq 28$  ( $ac : 5^{28}$ ),  $d_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \Rightarrow abc : 5^{28}$

$$\text{Ит. } abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Пример  $a, b, c$ , когда  $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ :  $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^5$ ,  $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

при этом условие не менее  $ab, bc, ca$  не через степени 2, 3, 5 выполняется.

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}.$$

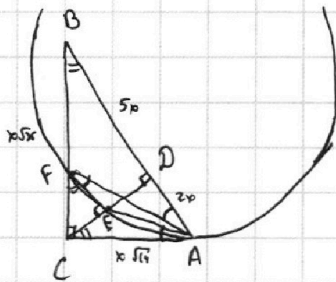
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $BD = 5x$ , тогда, т.к.  $AB:BD = \frac{14}{5} = \frac{7}{5}$ ,  $AB = 7x$

$\Rightarrow AD = 2x$

$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = x\sqrt{10}$ , т.к.  $CD$  — высота в прям. тр-ке  $AD$  т. Пифагора  $BC = x\sqrt{35}$ ,  $AC = x\sqrt{14}$

Положим окр. касаете  $AE$  в т.  $A$ ,

$\angle CAE = \angle AFE$  т.к. об. углы между кас. и хордой

$\angle CBA = \angle ACD$  т.к.  $\triangle CBA$  и  $\triangle CDA$  прямоуго., углы  $\angle C$  т.к.  $180^\circ$ .

Тогда  $\triangle CEA \sim \triangle BFA$  по 2 углам  $\Rightarrow \frac{CE}{BF} = \frac{EA}{FA} = \frac{CA}{BA} = \frac{x\sqrt{14}}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

Пусть  $CE = y$ , тогда  $BF = \frac{y \cdot 7}{\sqrt{14}} = \frac{y\sqrt{14}}{2}$

$CF = BC - BF = x\sqrt{35} - y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ , т.к.  $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$

тогда  $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{y}{x\sqrt{10}} = \frac{x\sqrt{35} - y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}}{x\sqrt{35}} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{35} - y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow y\sqrt{14} = 2x\sqrt{35} - y\sqrt{14} \Rightarrow y\sqrt{14} = x\sqrt{35} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\triangle CAD \sim \triangle FCE$  по 2 углам  $\Rightarrow$  коэф. подобия ~~какое-то значение~~

$$k = \frac{AD}{CE} = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Но тогда  $\frac{S_{ACD}}{S_{FCE}} = k^2 = \frac{8}{5}$

Ответ:  $\frac{8}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \quad (*)$$

Обл. опред:  $\sin x \in [-1; 1]$  (это всегда верно),  $0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -9\pi \leq -2x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}\pi.$

$$(*) \Leftrightarrow \cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = \pi - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ \frac{6x}{5} = \frac{7\pi}{5} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \quad (2)$$

Найдем, при каком  $k$   $x$  попадает в обл. опред. из (1):

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{9}{2}\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{2}k \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2$$

$$\text{Тогда } k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; \quad k=1 \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi; \quad k=2 \Rightarrow x = \frac{9}{2}\pi.$$

Найдем, при каком  $k$   $x$  попадает в обл. опред. из (2):

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{9}{2}\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{7}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{3}k \leq \frac{10}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{3} + \frac{5}{3}k \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq 1+k \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 2$$

$$\text{Тогда } k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; \quad k=0 \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi; \quad k=1 \Rightarrow x = \frac{12}{6}\pi; \quad k=2 \Rightarrow x = \frac{27}{6}\pi = \frac{9}{2}\pi.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; \quad \frac{7}{6}\pi; \quad \frac{12}{6}\pi; \quad \frac{9}{2}\pi.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

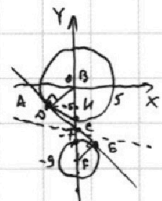
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 10y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 10y + 77 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+5)^2 = 4 \end{cases}$$



Заметим, что  $x^2 + y^2 = 25$  - окружность с центром в начале координат и радиусом 5  
 $x^2 + (y+5)^2 = 4$  - окружность с центром в т.  $(0, -5)$  и радиусом 2.

$5x + 6ay - b = 0$  - прямая, т.е. она не может иметь с окр. более, чем 2 точки, зч чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать обе окружности в 2 точки.

Пусть  $a = 0$ , тогда  $5x = b$ , при  $b = 0$ ,  $x = 0$ , прямая имеет по 2 точки общие с каждой окружностью.  $\Rightarrow a = 0$  подходит

Если  $a \neq 0$ , то  $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ , т.е. для каждого  $a$  нужно подобрать, можно ли найти при заданном значении коэфф. свободной члн, чтобы было 4 т. пересечения.

Заметим, что если для  $a$  верно, то для  $-a$  тоже верно, т.к. можно брать  $b' = -b$  и тогда уравн. прямой и коэфф. прямой будут симм. относи. Оу

Пусть  $a > 0$ . Заметим, что в случае касания прямой так, что окружность оказывается по разные стороны от нее, нет такого  $b$ , т.к. при увеличении  $b$ , прямая будет сдвигаться вниз, пересек с верхней - она не будет, при уменьшении, прямая будет сдвигаться вверх, пересек. с нижней окр. не будет. При этом для любого  $a > a_0$  (пусть  $a_0$  - знач.  $a$  при касании) можно найти такое  $b$ , т.к. при касании с окр., прямая не будет иметь общ. точек с окружн., а если  $a < a_0$ , то можно рассмотреть случай касания с 1 окр., тогда с другой будет 2 т. пересечения, т.к. <sup>можно</sup> значение коэфф. новой прямой будет больше, зч. можно будет немного сдвинуть  $b$  (на обе ман. величины) и по 2 т. пересек. будет с каждой прямой. Тогда остается найти  $a_0$ , и  $a \in (-a_0; a_0)$ .

~~Нужно найти значение  $a_0$ , при котором прямая касается окружности  $x^2 + (y+5)^2 = 4$  в одной точке.~~ Т. пересечения прямой с Оу -  $(0; \frac{b}{6a})$ , с Ох -  $(\frac{b}{5}; 0)$

Тогда в треугольнике ABC, BD - высота  $AB = |\frac{b}{5}|$ ,  $BC = |\frac{b}{6a_0}|$ ,  $\text{tg} \angle BAC = \frac{5}{6a_0}$   
 $(b < 0 \Rightarrow AB = -\frac{b}{5}, BC = -\frac{b}{6a_0})$   $BD = \frac{b}{5}$ .  $\triangle CEF$  - прямоугол.  $\triangle BDC \sim \triangle FEC$   $k = \frac{BD}{EF} = \frac{5}{2}$   
 $\Rightarrow \frac{BC}{CF} = \frac{-\frac{b}{6a_0}}{9 + \frac{b}{6a_0}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-b}{54a_0 + b} = \frac{5}{2} \Rightarrow -2b = 270a_0 + 5b \Leftrightarrow 270a_0 + 7b = 0 \Leftrightarrow -b = \frac{270}{7}a_0$

$BC = \frac{270}{7} = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$ , ~~нужно найти значение  $a_0$ , при котором прямая касается окружности  $x^2 + (y+5)^2 = 4$  в одной точке.~~  $AB = \frac{54a_0}{7}$ ,  $AD = \sqrt{\frac{45^2}{7^2} - 5^2} = \frac{5}{7}\sqrt{81 - 49} = \frac{5}{7}\sqrt{32} = \frac{20}{7}\sqrt{2}$

т.е. коэфф.  $D$  - ~~нужно найти значение  $a_0$ , при котором прямая касается окружности  $x^2 + (y+5)^2 = 4$  в одной точке.~~  $\sqrt{25^2 - \frac{40^2}{81} \cdot 2} = 5\sqrt{81 - \frac{80}{9}} = \frac{5}{9}\sqrt{729 - 80} = \frac{5}{9}\sqrt{649} \Rightarrow D(-\frac{10}{9}\sqrt{2}; -\frac{5}{9}\sqrt{73})$

$-\frac{5}{9}\sqrt{73} = -\frac{5}{6a_0} \cdot (-\frac{10}{9}\sqrt{2}) + \frac{45}{7} \Leftrightarrow \frac{50}{54a_0} = \frac{45}{7} - \frac{5}{9}\sqrt{73} = \frac{25\sqrt{2}\sqrt{2}}{26a_0} \Leftrightarrow a_0 = \frac{25\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{63}{45 \cdot 9 - 35\sqrt{73}}$

Ответ:  $(-\frac{25 \cdot 63 \sqrt{2}}{26 \cdot (45 \cdot 9 - 35 \sqrt{73})}; \frac{25 \cdot 63 \sqrt{2}}{26 \cdot (45 \cdot 9 - 35 \sqrt{73})})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_x 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 + \frac{2}{3} \log_x 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 x - 16 \log_x 11 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 15 = 0$$

$$2. \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 (0,5y) + 16 \log_{0,5y} 11 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{\log_{11} 0,5y} + 15 = 0$$

Заметим, что если  $xy = 2$ , то  $y = \frac{2}{x} \Rightarrow \log_{11} 0,5y = \log_{11} \frac{1}{x} = -\log_{11} x$

$$\Rightarrow 3 \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{\log_{11} 0,5y} + 15 = 3 \log_{11}^4 x + \frac{16}{\log_{11} x} + 15 = 0, \text{ где если есть}$$

$x$ , удовлетвор. условию, то  $xy = 2$  возможно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

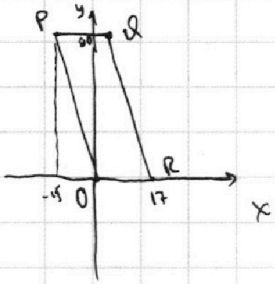
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $-90 \leq \alpha_2 - \alpha_1 \leq 90$ ,  $-32 \leq x_2 - x_1 \leq 32$

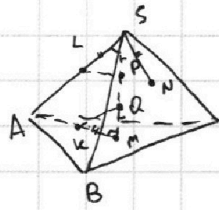
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



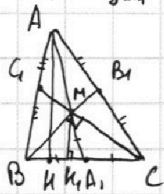
а)  $SP = MQ$ , тогда раск. стелю точки S и M относительно  $SL$

$\text{deg } S = SL^2 = SP \cdot SQ$  (т.к. касаясь),  $\text{deg } M = MK^2 = MQ \cdot MP$  (т.к. касаясь в K)

Но  $MQ = SP$ ,  $MP = SQ \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$ , з.ч.  $\triangle LSP = \triangle KMQ \Rightarrow \angle KLA = \angle LSP$

$\Rightarrow \triangle ASA$  - р/б, т.к.  $AM = AS = 20$ , но  $AA_1 = \frac{3}{2} AM$  (т.к. медиана является т. пересечения

всех медиан в отношении 2:1 от вершины)  $\Rightarrow AA_1 = 30$ . Раск. тр-ку ABC



$AA_1 = 20 \Rightarrow MA_1 = 10$ , но  $BC = 20$  по условию  $\Rightarrow MA_1 = BA_1 = A_1C = 10$ , з.ч.

$\angle BAC = 90^\circ$  (медиана равна половине стороны, к кот. проведена)

Поскольку  $\frac{AM}{AA_1} = \frac{1}{3}$ , отношение высот из A и M к BC такое же:  $\frac{MK_1}{AK} = \frac{1}{3}$

$S_{ABC} = 180 \Rightarrow \frac{AK \cdot BC}{2} = 180 \Rightarrow AK = 18 \Rightarrow MK_1 = 6 \Rightarrow S_{BMC} = \frac{BC \cdot MK_1}{2} = 60$

Но  $S_{BMC} = \frac{BM \cdot MC}{2}$  (т.к.  $\angle BMC = 90^\circ$ )  $\Rightarrow BM \cdot MC = 120$ , но  $BM = \frac{2}{3} BB_1$ ,  $CM = \frac{2}{3} CC_1$

$\Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{9}{4} BM \cdot MC = 270$ , тогда  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$ .

б) Поскольку N - т. касания сферы с пл-тью,  $SN = SL \Rightarrow SL = 6$

Тогда  $AL = 14$ ,  $AK = 14$ ,  $KM = 6$

Пусть O - т. сферы, тогда  $OL \perp LS \Rightarrow \triangle OLS$  - прямоугол тр-ку  $\Rightarrow OS = 10$

Аналогично  $OM = 10$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

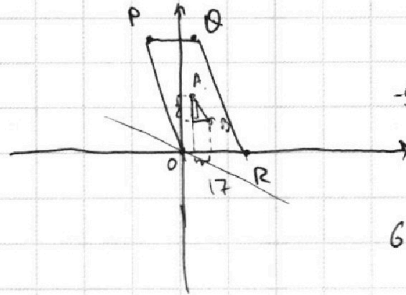
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} a &= 1 \Rightarrow \\ -15a &= 90 \\ a &= -6 \\ -6a &= 36 \\ -6a + 10a &= 36 \end{aligned}$$



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$-90 \leq y_2 - y_1 \leq 90$$

$$y_2 - y_1 \leq 6$$

$$0, 6, 12$$

$$6x + y =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x \cdot \frac{1}{121} = 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$$

$$3 \log_{11}^4 x - 16 \log_{11} x + 15 = 0$$

$$3 \log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 15 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5) + \log_{0,5} 11 = \log_{0,125} 3 (11^{-15}) - 5$$

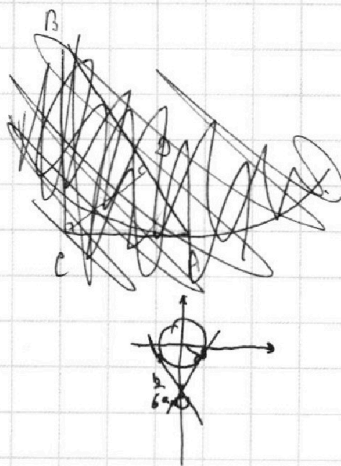
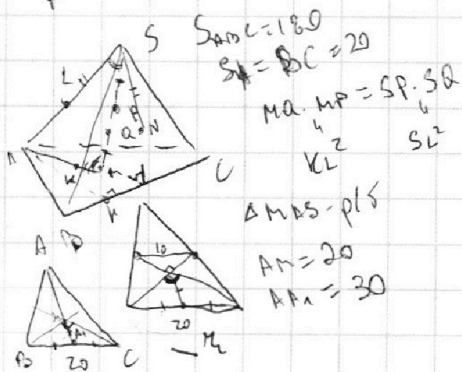
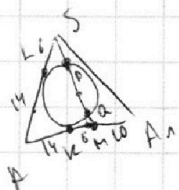
$$\log_{11}^4 (0,5) + \log_{0,5} 11 = -\frac{15}{5} \log_{0,5} 3 - 5$$

$$3 \log_{11}^4 (0,5) + 16 \log_{0,5} 11 + 15 = 0$$

$$t = 0,5$$

$$3 \log_{11}^4 t + 16 \log_{11} t + 15 = 0$$

$$3 \log_{11}^4 t + \frac{16}{\log_{11} t} + 15 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{11}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^9 \cdot 5^{28}$$

$$a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$$

$$b = 2^{a_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

$$d_1 + \beta_1 \geq 6, \quad d_2 + \beta_2 \geq 13, \quad d_3 + \beta_3 \geq 11$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14, \quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21, \quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_1 + d_1 \geq 16, \quad \gamma_2 + d_2 \geq 25, \quad \gamma_3 + d_3 \geq 28$$

$$d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2} \geq 29,5, \quad d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 28$$

$$d_1 + d_2 + \gamma_1 \geq 30$$

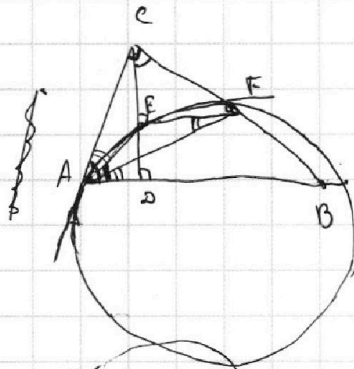
$$d_1 + d_2 + \gamma_1 \geq 28$$

$$abc \geq 2^{16} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{10}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$



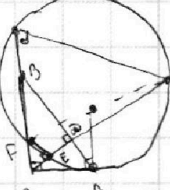
$$\frac{AD}{BD} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

делит хорду.

$$BA \cdot DA = BC^2$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CFE$$

$$CD = x\sqrt{10}$$



$$\angle A < \angle C < \frac{\pi}{2}$$

$$-5x \leq -2x \leq \frac{9}{10}$$

$$0 \leq 3x - 2x \leq \frac{9}{10}$$

$$x \leq \frac{9}{10}$$

$$x \geq \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{9}{10}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ b^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$$5x + 6ay = b$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$b = 0$$

$$5x = b$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$b = 0 \text{ не подходит}$$

Случай отрезка  $OB$  и отрезка  $OC$   $a_0 > 0$

$b_0 > 0, c_0 > 0$   $a_0 < 0$

$a > 0$

$b < 0$  не подходит

$c < 0$  не подходит

$a < 0, b < 0, c < 0$  не подходит

$a < 0, b < 0, c > 0$  не подходит

$a < 0, b > 0, c < 0$  не подходит

$a < 0, b > 0, c > 0$  не подходит

$a > 0, b < 0, c < 0$  не подходит

$a > 0, b < 0, c > 0$  не подходит

$a > 0, b > 0, c < 0$  не подходит

$a > 0, b > 0, c > 0$  подходит

$$CF = y$$

$$BF = y$$

$$CF = 2\sqrt{5} \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$$

$$k = \frac{CF}{CD} = \frac{2\sqrt{5}}{x\sqrt{10}}$$

$$\frac{CF}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$x = \sqrt{5}$$

$$10a^2 \cos(\sin \alpha) = 5a - 2p$$

$$\sin \alpha \in (0, \pi) \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow x \in [\frac{2}{5}, \frac{9}{10}] \Rightarrow \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{9}{10}$$

$$\sin \alpha = \cos(\frac{9\pi}{10} - \frac{\pi}{5}) = \cos(\pi - (\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5})) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10} - \frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{6\pi}{10} - \frac{4\pi}{10})) =$$

$$\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}) = \sin(\frac{2\pi}{10} - \frac{4\pi}{10})$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{9\pi}{10} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{4\pi}{5} - \frac{9\pi}{10} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}\alpha = \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{6}{5}\alpha = -\frac{14\pi}{10} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}\alpha = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{5}\alpha = \frac{7}{10} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10} + 2\pi k$$

$$x = \pi + \frac{4\pi}{10} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$$

$$\frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k$$

$$\frac{6\pi}{5} = \frac{14\pi}{10} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$$

$$x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k$$

$$k = 4n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n$$

$$k = 4n + 1$$

$$x = \frac{7}{6}\pi + 10\pi n + \frac{5}{3}\pi$$

$$k = 4n + 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + 5\pi = \frac{9\pi}{2} + 10\pi n$$

$$k = 4n + 3$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + \frac{15\pi}{2} = 7\pi + 10\pi n$$

$$2x\sqrt{35} - 5\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$20\sqrt{35} - 5\sqrt{14} = 5\sqrt{14}$$

$$10\sqrt{35} = 10\sqrt{14}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle AOC \quad k = \frac{AD}{CE} = \frac{20}{5} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle AOC}} = k^2 = \frac{16}{1}$$