МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$ (мы точно знаем, что в их разложении на простые множители должны быть 2, 3, 5, возможно, в нулевой степени, если какой-то из них будет еще иметь простой множитель $p \neq 2; 3; 5$, то произведение не будет минимально).

Тогда т.к. $ab \vdots 2^6$, $bc \vdots 2^{14}$, $ac \vdots 2^{16}$, $\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$, $\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$, $\gamma_1 + \alpha_1 \geq 16$, сложим эти неравенства:
$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$, зн. $abc \vdots 2^{18}$
Аналогично $\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$, $\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$, $\gamma_2 + \alpha_2 \geq 25 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2}$, но $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$. $\Rightarrow abc \vdots 3^{30}$
Поскольку $\gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$ $(ac \vdots 5^{28})$, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \Rightarrow abc \vdots 5^{28}$

Зн. $abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример a, b, c, когда $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$, $b = 2^2 \cdot 3^5$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

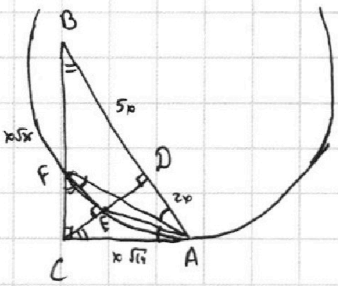
при этом условие на деление ab, bc, ca на опред. степени 2, 3, 5 выполняется.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BD = 5x$, тогда, т.к. $AB : BD = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$, $AB = 7x$
$\Rightarrow AD = 2x$

$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = x\sqrt{10}$, т.к. CD - высота в прям. тр-ке

по т. Пифагора $BC = x\sqrt{35}$, $AC = x\sqrt{14}$

Поскольку окр. касается AC в т. A,

$\angle CAE = \angle AFE$ по т. об угле между кас. и хордой

$\angle CBA = \angle ACD$ т.к. $\triangle CBA$ и CDA прямоуг., сумма углов тр-ка $180°$.

Тогда $\triangle CEA \sim \triangle BFA$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{CE}{BF} = \frac{EA}{FA} = \frac{CA}{BA} = \frac{x\sqrt{14}}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

Пусть $CE = y$, тогда $BF = \frac{y \cdot 7}{\sqrt{14}} = \frac{y\sqrt{14}}{2}$

$CF = BC - BF = x\sqrt{35} - y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$, т.к. $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = 90°$

тогда $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{y}{x\sqrt{10}} = \frac{x\sqrt{35} - y\frac{\sqrt{14}}{2}}{x\sqrt{35}} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{35} - y\frac{\sqrt{14}}{2}}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow y\sqrt{14} = 2x\sqrt{35} - y\sqrt{14} \Rightarrow y\sqrt{14} = x\sqrt{35} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\triangle CAD \sim \triangle FCE$ по 2 углам $\Rightarrow$ коэфф подобия

$k = \frac{AD}{CE} = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Но тогда $\frac{S_{ACD}}{S_{FCE}} = k^2 = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$.

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \Leftrightarrow$

Обл. опред: $\sin x \in [-1;1]$ (это всегда верно), $0 \le \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -9\pi \le -2x \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9}{2}\pi$.

$\Leftrightarrow \cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = \pi - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{array}\right. k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ \frac{6x}{5} = \frac{7\pi}{5} + 2\pi k \end{array}\right. k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k & (1) \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k & (2) \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$

Найдем, при каких k x попадает в обл. опред. из (1):
$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \le \frac{9}{2}\pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{5}{2}k \le 5 \Leftrightarrow 0 \le k \le 2$
Тогда $k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; $k=1 \Rightarrow x = 2\pi$; $k=2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$.

Найдем, при каких k x попадает в обл. опред. из (2):
$-\frac{\pi}{2} \le \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \le \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{7}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{3}k \le \frac{10}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{5}{3} + \frac{5}{3}k \le 5 \Leftrightarrow 0 \le 1+k \le 3 \Leftrightarrow -1 \le k \le 2$
Тогда $k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; $k=0 \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi$; $k=1 \Rightarrow x = \frac{17}{6}\pi$; $k=2 \Rightarrow x = \frac{27}{6}\pi = \frac{9}{2}\pi$

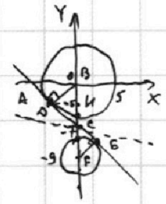
Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7}{6}\pi$; 2π; $\frac{17}{6}\pi$; $\frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$



Заметим, что $x^2+y^2=25$ - окружность с центром в начале координат и радиусом 5
$x^2+(y+9)^2=4$ - окружность с центром в т. $(0;-9)$ и радиусом 2.

$5x+6ay-b=0$ - прямая, т.е она не может иметь с окр. более, чем 2 точек, зн. чтобы система имела ровно 4 решение, прямая должна пересекать обе окружности в 2 точках.

Пусть $a=0$, тогда $5x=b$, при $b=0$, $x=0$, прямая имеет по 2 точки общие с каждой окружностью $\Rightarrow$ $a=0$ подходит.

Если $a \neq 0$, то $y=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a}$, т.е для каждого a нужно показать, можно ли найти при заданом угловом коэфф. свободный член, чтобы было 4 т. пересечения.

Заметим, что если для a верно, то для $-a$ тоже верно, т.к можно взять $b'=-b$ и тогда изнач. прямая и новая прямая будут симм. относит. Oy

Пусть $a>0$. Заметим, что в случае касания прямой так, что окружности оказываются по разные стороны от нее, нет такого b, т.к при увеличении его, прямая будет сдвигаться вниз, пересеч. с верхней окр. не будет, при уменьшении, прямая будет сдвигаться вверх, пересеч. с нижн. окр. не будет. При этом для любого $a>a_0$ (пусть a_0 - знач. a при касании) нельзя найти такое b, т.к при касании с 1 окр. или пересечении прямая не будет иметь общ. точек с другой, а если $a<a_0$, то можно рассмотреть случай касания с 1 окр., тогда с другой будет 2 т. пересечения, т.к модуль углового коэфф новой прямой будет больше, зн. можно будет немного увеличить b (на беск. мал. величину) и по 2 т. пересеч. будет с каждой прямой. Тогда остается найти a_0, и $a \in (-a_0;a_0)$.

~~[illegible]~~ т. пересечения прямой с Oy - $(0;\frac{b}{6a_0})$, с Ox - $(\frac{b}{5};0)$

Тогда в прямоуг. тр-ке ABC, BD - высота $AB=\left|\frac{b}{5}\right|$, $BC=\left|\frac{b}{6a_0}\right|$, $tg\angle BAC=\frac{5}{6a_0}$.

($b<0 \Rightarrow AB=-\frac{b}{5}$, $BC=-\frac{b}{6a_0}$) $BD=5$. $\triangle CEF$ - прямоуг. $\triangle BDC \sim \triangle FEC$ $k=\frac{BD}{EF}=\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CF}=\frac{-\frac{b}{6a_0}}{9+\frac{b}{6a_0}}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-b}{54a_0+b}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow -2b=270a_0+5b \Leftrightarrow 270a_0+7b=0 \Leftrightarrow -b=\frac{270}{7}a_0$$

$BC=\frac{270}{42}=\frac{90}{14}=\frac{45}{7}$, ~~[illegible]~~, $AB=\frac{54a_0}{7}$, $BD=\sqrt{\frac{45^2}{7^2}-5^2}=\frac{5}{7}\sqrt{81-49}=$
$=\frac{5}{7}\sqrt{32}=\frac{20}{7}\sqrt{2}$. Опустим высоту DH из D на BC: $DH=\frac{BD\cdot DC}{BC}=\frac{5\cdot\frac{20}{7}\sqrt{2}}{\frac{45}{7}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}$

т.е коорд. D - ~~[illegible]~~; $\sqrt{25-\frac{100}{81}\cdot 2}=\frac{5}{9}\sqrt{81-8}=\frac{5}{9}\sqrt{73} \Rightarrow D\left(-\frac{10}{9}\sqrt{2};-\frac{5}{9}\sqrt{73}\right)$

$-\frac{5}{9}\sqrt{73}=-\frac{5}{6a_0}\cdot\left(-\frac{10}{9}\sqrt{2}\right)+\frac{45}{7} \Leftrightarrow \frac{45}{7}+\frac{5}{9}\sqrt{73}=\frac{25\sqrt{2}}{27a_0} \Leftrightarrow a_0=\frac{25}{26}\sqrt{2}\cdot\frac{63}{45\cdot 9-35\sqrt{73}}$

Ответ: $\left(-\frac{25\cdot 63\sqrt{2}}{26\cdot(45\cdot 9-35\sqrt{73})};\frac{25\cdot 63\sqrt{2}}{26(45\cdot 9-35\sqrt{73})}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \frac{1}{3}\cdot(-2)\log_x 11 - 5$

$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 + \frac{2}{3}\log_x 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\log_{11}^4 x - 16\log_x 11 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3\log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 15 = 0$

2. $\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = -\frac{13}{3}\log_{0{,}5y} 11 - 5$

$\Leftrightarrow 3\log_{11}^4 (0{,}5y) + 16\log_{0{,}5y} 11 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3\log_{11}^4 (0{,}5y) + \frac{16}{\log_{11} 0{,}5y} + 15 = 0$

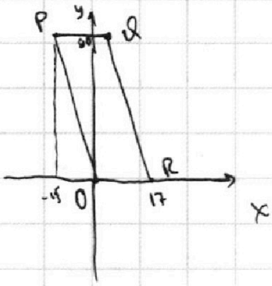
Заметим, что если $xy = 2$, то $y = \frac{2}{x} \Rightarrow \log_{11} 0{,}5y = \log_{11} \frac{1}{x} = -\log_{11} x$

$\Rightarrow 3\log_{11}^4 (0{,}5y) + \frac{16}{\log_{11} 0{,}5y} + 15 = 3\log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 15 = 0$, т.е. если есть x, удовлетвор. условию, то $xy = 2$ возможно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



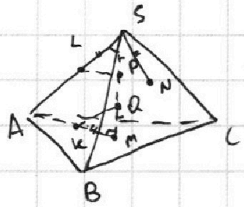
Заметим, что $-90 \le y_2 - y_1 \le 90$, $-32 \le x_2 - x_1 \le 32$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

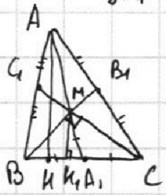


а) $SP = MQ$, тогда рассм. степень точек S и M относительно Ω

$\deg S = SL^2 = SP\cdot SQ$ (т.к. касание в т. L), $\deg M = MK^2 = MQ\cdot MP$ (т.к. касание в K)

Но $MQ=SP$, $MP=SQ \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$, зн $\triangle LSP = \triangle KMQ \Rightarrow \angle KMQ = \angle LSP$

$\Rightarrow \triangle ASM$ – р/б, т.е. $AM = AS = 20$, но $AA_1 = \frac{3}{2}AM$ (т.к. медианы делятся т. пересечения всех медиан в отношении 2:1 от вершины) $\Rightarrow AA_1 = 30$. Рассм. тр-к ABC



$AM=20 \Rightarrow MA_1=10$, но $BC=20$ по условию $\Rightarrow MA_1=BA_1=A_1C=10$, зн $\angle BMC = 90°$ (медиана равна половине стороны, к кот. проведена)

Поскольку $\frac{AM}{AA_1} = \frac{1}{3}$, отношение высот из A и M на BC такое же: $\frac{MK_1}{AK} = \frac{1}{3}$

$S_{ABC} = 180 \Rightarrow \frac{AK\cdot BC}{2} = 180 \Rightarrow AK = 18 \Rightarrow MK_1 = 6 \Rightarrow S_{BMC} = \frac{BC\cdot MK_1}{2} = 60$

Но $S_{BMC} = \frac{BM\cdot MC}{2}$ (т.к. $\angle BMC = 90°$) $\Rightarrow BM\cdot MC = 120$, но $BM = \frac{2}{3}BB_1$, $CM = \frac{2}{3}CC_1$

$\Rightarrow BB_1\cdot CC_1 = \frac{9}{4}BM\cdot MC = 270$, тогда $AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 30\cdot 270 = 8100$.

б) Поскольку N – т. касания сферы с пл-тью, $SN = SL \Rightarrow SL = 6$

Тогда $AL = 14$, $AK = 14$, $KM = 6$

Пусть O – ц. сферы, тогда $OL \perp LS \Rightarrow \triangle OLS$ – прямоуг тр-к $\Rightarrow OS = 10$

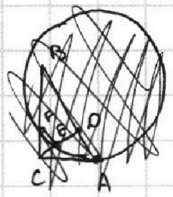
Аналогично $OM = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



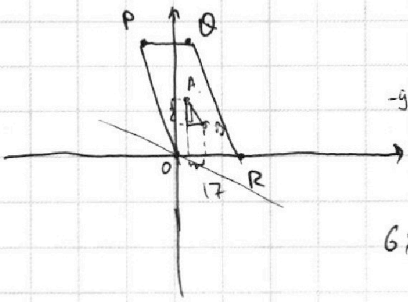
$ax = y$

$-15a = 90$

$a = -6$

$-6x = y$

$-6x + 102 = y$



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$-90 \le y_2 - y_1 \le 90$

$y_2 - y_1 \,\vdots\, 6$

0; 6; 12;

$6x + y =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$

$3\log_{11}^4 x - 16\log_x 11 + 15 = 0$

$3\log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 15 = 0$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} (11^{-13}) - 5$

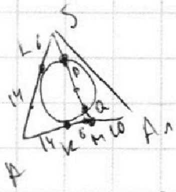
$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = -\frac{13}{3}\log_{0{,}5y} - 5$

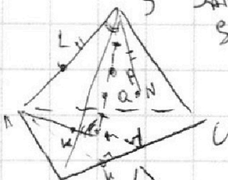
$3\log_{11}^4 (0{,}5y) + 16\log_{0{,}5y} 11 + 15 = 0$

$t = 0{,}5y$

$3\log_{11}^4 (t) + 16\log_t 11 + 15 = 0$

$3\log_{11}^4 t + \frac{16}{\log_{11} t} + 15 = 0$





$S_{ABC} = 180$

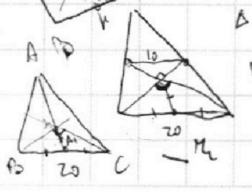
$SA = BC = 20$

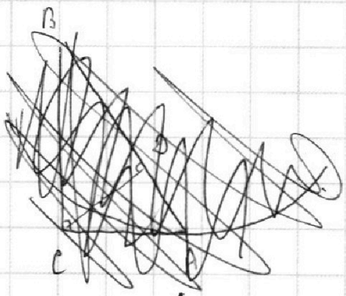
$MA \cdot MP = SP \cdot SQ$

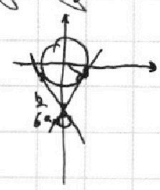
$\Delta MAS - p/s$

$AM = 20$

$AA_1 = 30$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$ $\quad a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$

$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ $\quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$

$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$ $\quad c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$, $\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$, $\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$

$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$ $\quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 21$ $\quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 13$

$\gamma_1 + \alpha_1 \geq 16$ $\quad \gamma_2 + \alpha_2 \geq 25$ $\quad \gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2} = 29{,}5$ $\quad \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$

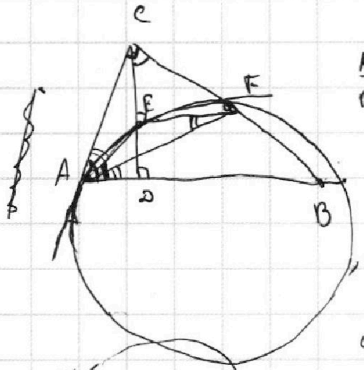
$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$

$abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28}$, $\quad a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$



$\frac{AD}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

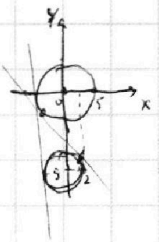
$BD \cdot BA = BC^2$

$\triangle ACD \sim \triangle CFE$

$CD = x\sqrt{10}$

$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$



$5x + 6ay = b$

$y = 0$

$x = \frac{b}{5}$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

$\boxed{a = 0}$

$5x = b$

$x = \frac{b}{5}$

$b = 0$ подходит

Симм. относ. Oy, и следовательно для $a_0 > 0$ верно, то $-a_0$ и $a < 0$ верно

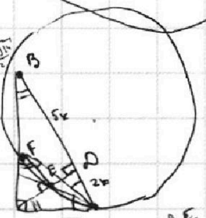
$a > 0$

в 2 точках касаться окр.

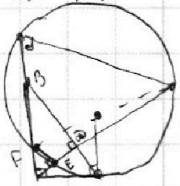
$CE = y$

$BF = y\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$

$CF = x\sqrt{35} - y\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$



$FA > BF$



$k = \frac{CE}{CD} = \frac{y}{x\sqrt{10}}$

$\frac{CF}{BC} = \frac{y}{x\sqrt{10}}$

$\frac{x\sqrt{35} - y\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}}{x\sqrt{35}} = \frac{y}{x\sqrt{10}}$

$\triangle CEA \sim \triangle BFA$

$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{CA}{BA} = \frac{CE}{BF} = \frac{FA}{FA}$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$

$-5\pi \leq -2x \leq \pi$

$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$

$0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\sin x \in [0; \pi]$ $\Rightarrow \sin x \geq 0 \Rightarrow x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi]$ $\quad \frac{9\pi - 2x}{10} \in [0; \pi]$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)\right) =$

$= \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} - \frac{9\pi}{10} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{10} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{6}{5}x = -\frac{14\pi}{10} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4}{5}x = \frac{\pi}{5} + 4\pi n \\ \frac{3x}{5} = \frac{7}{10}\pi + \pi n \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10} + 2\pi k \\ x = \pi + \frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{4x}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{6x}{5} = \frac{14\pi}{10} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \end{array}\right.$

$k = 4n$

$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n$ $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$

$k = 4n+1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + \frac{5}{2}\pi = 2\pi + 10\pi n$

$\boxed{2\pi}$

$k = 4n+2$

$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + 5\pi = \frac{9\pi}{2} + 10\pi n$ $\boxed{\frac{9\pi}{2}}$

$k = 4n+3$

$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + \frac{15\pi}{2} = 7\pi + 10\pi n$ нет

$\frac{2x\sqrt{35} - y\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{7}} = \frac{y}{\sqrt{2}}$

$2x\sqrt{35} - y\sqrt{14} = y\sqrt{14}$

$x\sqrt{35} = y\sqrt{14}$

$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC$ $\quad k = \frac{AD}{CF} = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{8}{5}$