



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^3 3^{10} 5^{16} \\ bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\ ac &: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{41}$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } (abc)^2 &\text{ - квадрат и } (abc)^2 : 3^{41} \Rightarrow \\ (abc)^2 &: 3^{442} \end{aligned}$$

$$(abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{42} \Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21}$$

$$abc : ac : 5^{30}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Наименьшее значение  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  достигается  
при  $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^3$ ,  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

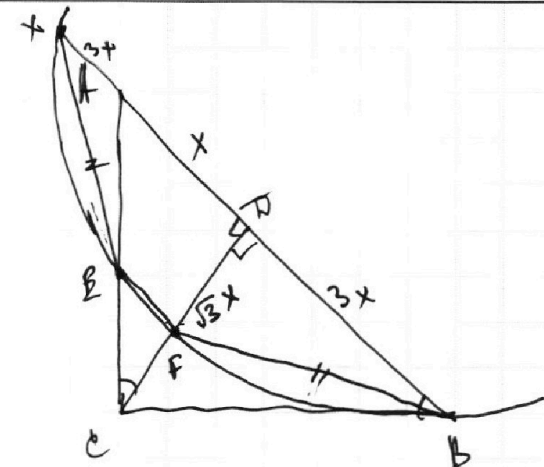
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{ADC}}{S_{CAB}} = \frac{1}{3}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{или } x \in [-3\pi; 2\pi]$$

Пусть  $x \in [0; \pi]$   ~~$[\frac{\pi}{2}; \pi]$~~   ~~$[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$~~   ~~$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~   ~~$[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$~~

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Пусть  $x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$   ~~$[\frac{\pi}{2}; \pi]$~~   ~~$[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$~~   ~~$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~   ~~$[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$~~

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = -4x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

Пусть  $x \in [-3\pi; -2\pi]$   ~~$[-2\pi; -\pi]$~~

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$5\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-8\pi = 6x$$

$$x = -\frac{4\pi}{3} \text{ н.к. } (x \in [-2\pi; -\pi])$$

Пусть  $x \in [\pi; 2\pi]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \arcsin(\sin(-\frac{3}{2}\pi - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) =$$

$$= \arcsin(\sin(x - \frac{3}{2}\pi)) = x - \frac{3}{2}\pi$$

$$5(x - \frac{3}{2}\pi) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi$$

$$x = 2\pi$$

При  $x \in [-3\pi; -2\pi)$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \arcsin(\sin(\frac{5\pi}{2} + x)) =$$

$$= \frac{5\pi}{2} + x$$

$$5(\frac{5\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$12\pi = -4x$$

$$x = -3\pi$$

Ответ: 
$$\begin{cases} x = \pi/3 \\ x = -\pi/2 \\ x = 2\pi \\ x = -3\pi \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

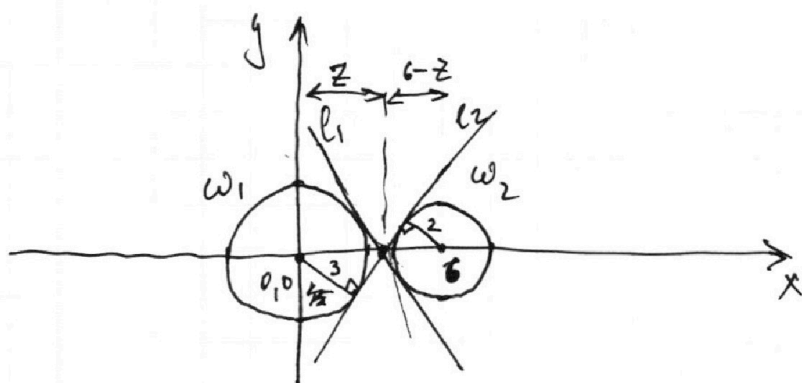
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 3z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \end{cases}$$



Прямая  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$  должна пересекать (не касаться) обе окр.  $\omega_1, \omega_2$  чтобы было ровно 4 решения системы.

$l_1 \neq k_1 x$ :  $y = k_1 x + b_1$

$l_2$ :  $y = k_2 x + b_2$

$l_1, l_2$  - общие внут. касат. к  $\omega_1, \omega_2$

$-\frac{a}{2} \in [k_2; k_1]$  ( $k_1; k_2$ )

$a \in (-2k_2; -2k_1)$

$\frac{z}{2} = \frac{6-z}{2} \Rightarrow 2z = 18 - \frac{3}{5}z \Rightarrow z = \frac{9}{3/5} = \frac{18}{5} = 3,6$

$k_2 = \dots$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

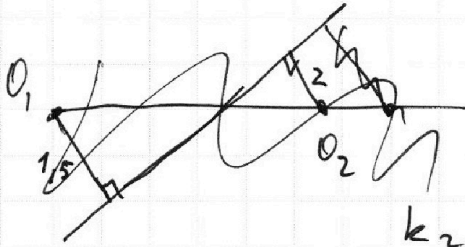
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k_2 = \frac{1,5}{\sqrt{1,5^2 - \left(\frac{9}{3,5}\right)^2}}$$

$$k_2 = \frac{3}{\sqrt{3,6^2 - 3^2}}$$



$k_2$  находим как  $\tan$  угла наклона  $l_2$ .

$$k_2 = \frac{3}{\sqrt{3,6^2 - 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,2^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{0,44}} = \frac{1}{2\sqrt{0,11}} = \frac{1}{0,2\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$k_1 = -k_2$$

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8$$

*случай*

$$4 \log_3^4 5xy + 6 \log_x 3 + 2 \log_{5y} 3 = \log_{x^2} 3^5 + \log_{25y^2} 3^4 - 16$$

$$4 \log_3^4 5xy - 6 \log_3 x - 2 \log_3 5y = -5 \log_3 (x)^2 + 11 \log_3 (5y)^2 - 16$$

$$4 \log_3 5xy - 2 \log_3 5xy = -5 \log_3 x^2 - 5 \log_3 (5xy)^2 - 6 \log_3 (5y)^2 + 4 \log_3 x - 16$$

$$-2 \log_3 5xy = -10 \log_3 5xy - 12 \log_3 5y + 4 \log_3 x - 16$$

$$8 \log_3 5xy = 4 \log_3 x - 12 \log_3 5y - 16$$

$$2 \log_3 5xy = \log_3 x - 3 \log_3 5y - 4$$

$$\log_3 5xy = -4 \log_3 5y - 4$$

$$\log_3 \left( \frac{5xy}{(5y)^4} \right) = -4$$

$$\frac{5xy}{(5y)^4} = \frac{1}{3^4}$$

$$\frac{x}{(5y)^3} = \frac{1}{3^4}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 (5y) - 6 \log_3 x + 2 \log_3 5y = -5 \log_3 x^2 + 11 \log_3 (5y)^2$$

$$4 \log_3 x + 20 \log_3 5y + \log_3^4 x - \log_3^4 (5y) = 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 x - \log_3 5y)$$

$$4 \log_3 5xy + 16 \log_3 5y + \log_3^4 x - \log_3^4(5y) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

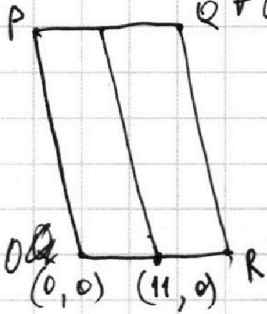
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

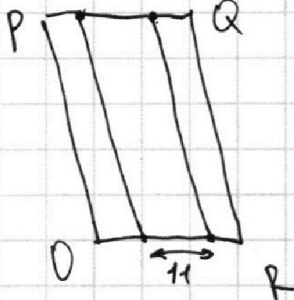
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При  $x_2 - x_1 = z - 2$   $y_2 - y_1 = 3z$   
Кол-во пар  $20 - 14 = 6$   $(4z - 3z + 1)$



Точка  $(0,0)$  в пару подходит любая  
целая точка на отрезке  $PQ$  проходящем  
через  $(11,0)$  и парал. сторонам парал.  
и никакая другая точка, точка на  $PQ$   
не подходит. Аналогично

остальные  
все точки отрезки параллельные  $PO$  разби-  
ваются на пары. Таких пар получается



10. (отрезок через  $(10,0)$  не входит  
ни в одну пару, где ~~точка нет~~  
на нём нет пары (внутри парал.)

На каждом отрезке 15 целых

точек  $\Rightarrow$  в каждой паре отрезков можно  
выбрать  $15^2$  различных пар целых точек  
 $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$   $\Rightarrow$  всего пар ~~10~~ точек

$$10 \cdot 15^2 = 2250$$

Ответ: 2250

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

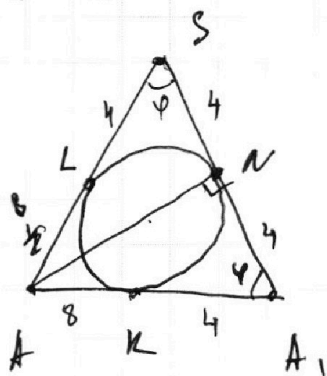
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) двугранный угол  $\varphi$  при  $BC$  равен плоскому  
углу  $AA_1S$



$$\cos \varphi = \frac{12^2 - 8^2 - 12^2}{2 \cdot 12 \cdot 8}$$

$$AN = \frac{12^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 12} = 8\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arccos \frac{4}{12} = \arccos \left( \frac{1}{3} \right)$$

Ответ:  $\arccos \left( \frac{1}{3} \right)$

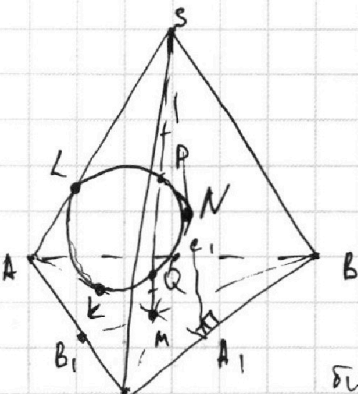
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим:

Точки  $K, L, P, Q$  принадлежат сфере и лежат в одной плоскости  $\Rightarrow$   $KLPQ$  - впис.

Окр.  $\omega$  опис. около  $KLPQ$  касается. Вписанна в угол  $\angle SAM$  ~~касается~~  $\Rightarrow$  её центр на биссектрисе  $\angle SAM$  и на пер-пер к  $PQ$ , пер-пер к  $PQ$  совпадает с пер-пер к  $SM$  ( $SP = MQ$ ). Получаем, что центр  $\omega$  - точка пересеч. биссектр.  $\angle SAM$  и пер-пера к  $SM$ .

$\triangle ABC \triangleq ASM$  - р/б

$AM = 12 \Rightarrow A_1M = 6$  ( $M$  - точка пересеч. мед.)

$MA_1 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \angle CMB = 90^\circ \Rightarrow CM = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}}$

~~$\neq 6\sqrt{2}$~~ ,  ~~$MC_1 = CM \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$~~ ,  $MB_1 = MB$ .

$$S_{CMB} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{CM \cdot MB}{2} = 30$$

$$CM^2 + MB^2 + 2CM \cdot MB = CB^2 + 2CM \cdot MB = 12^2 + 2 \cdot 30 \cdot 4$$

$$(CM + MB)^2 = 144 + 180 = 324$$

$$CM + MB = 18$$

$$CM = \frac{60}{MB}$$

$$MB^2 + \frac{60}{MB} - 18MB + 60 = 0$$

$$MB^3 - 18MB^2 + 60 = 0$$

$$MB = \frac{18 \pm \sqrt{84}}{2}$$

$$CM = \frac{18 \mp \sqrt{84}}{2}$$

$$BB_1 = \frac{3}{2} MB = 3(18 \pm \sqrt{84})$$

$$CC_1 = \frac{3}{2} CM = 3(18 \mp \sqrt{84})$$

$$AA_1 = 18$$

$$BB_1 \cdot CC_1 \cdot AA_1 = 18 \cdot 9 \cdot (18 + \sqrt{84})(18 - \sqrt{84}) = 18 \cdot 9 \cdot (324 - 84) = 18 \cdot 9 \cdot 240 = 39988$$

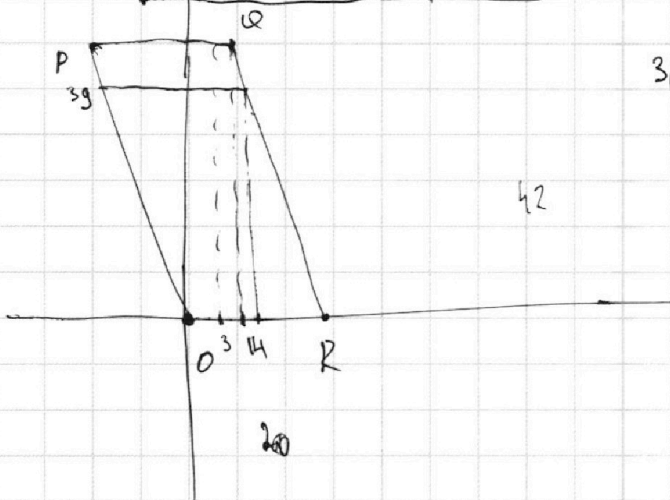
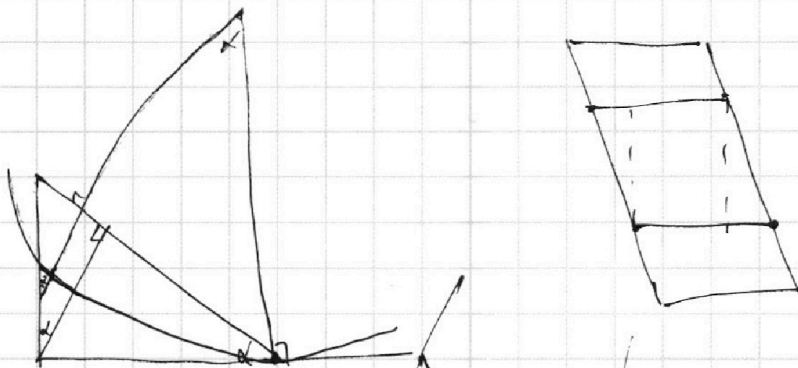
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 1 = 3 \\ 42 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 42 \\ 33 \\ 9 \end{array}$$

42

42

14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

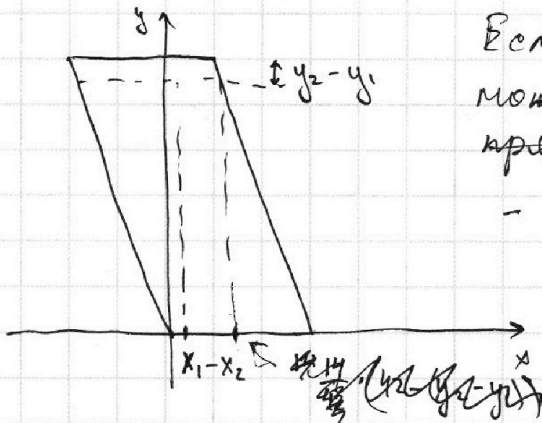
$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$|y_2 - y_1| \leq 42 \quad |x_2 - x_1| \leq 20$$

при  $x_2 - x_1 \leq -4$   $y_2 - y_1 \geq 45$  - не возможно  $\Rightarrow x_2 - x_1 \geq -3$

при  $x_2 - x_1 = -3$   $y_2 - y_1 = 42 \Rightarrow y_1 = 20, y_2 = 42$   
 $\Rightarrow x_1 \in [3; 14], x_2 \in [0; 11]$   $\Rightarrow$  есть 12 вариантов для пар  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$

при  $x_2 - x_1 = -2$   $y_2 - y_1 = 39 \Rightarrow$  существует 4 пары  $(y_1, y_2)$  для каждой из них на отрезке длины 20 нужно выбрать 2 точки  $x_1, x_2$



Если заданы  $(x_2 - x_1) \leq 0$  и  $(y_2 - y_1) > 0$  можно перейти от парал. к отрезкам длины  $(42 - (y_2 - y_1) + 1) - (x_1 - x_2)$  на каждом нужно выбрать  $x_1$ , оставшееся восп. однозначно.

при  $x_2 - x_1 = -2 : y_2 - y_1 = 39$

$14 - \frac{1}{2} \cdot 39 + 1 = 20 - 14 \cdot \frac{(42 - (y_2 - y_1) + 1)}{14} - (x_1 - x_2)$ , на кол-во таких отрезков  $\frac{42 - (y_2 - y_1) + 1}{14}$ . Задача сводится к тому, чтобы найти выбрать  $x_1$  на отрезке.

при  $x_2 - x_1 = -3$   $y_2 - y_1 = 42$

кол-во вар. для  $x_1$  - это кол-во отрезков умножить на (длину отрезка + 1)

$20 - 14 \cdot \frac{(42 - 42 + 1)}{14} - 3 = 3$  кол-во пар  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

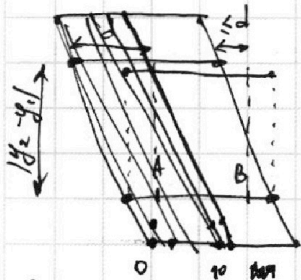
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

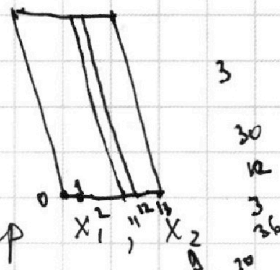


Выбрав ~~ра~~  $y_2 - y_1$  мы получаем ~~вектор~~  $43 - |y_2 - y_1|$  пар отрезков длины 20 на которых ищем  $x_1$  и  $x_2$

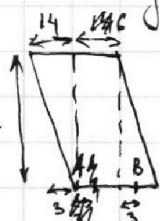


$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{33 - (y_2 - y_1)}{3} \right| = d$$

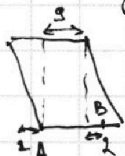
кол-во подходящих ~~к~~ пар равно длине отрезка  $AB + 1$  (кол-во целых точек на  $AB$ )



При  $x_2 - x_1 = -3$   $y_2 - y_1 = 42$  пар  $y_1, y_2$   $43 - 42 = 1$ , пар  $x_1, x_2$  равно ~~к~~ 10.



При  $x_2 - x_1 = -2$   $y_2 - y_1 = 39$  пар  $y_1, y_2$   $43 - 39 = 4$ , пар  $x_1, x_2$  равно 13  $\Rightarrow$  пар  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$   $4 \cdot 13 = 52$ .



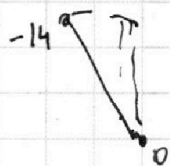
При  $x_2 - x_1 = -1$   $y_2 - y_1 = 36$  пар  $y_1, y_2$   $43 - 36 = 7$  пар  $x_1, x_2$  равно 16  $\Rightarrow$  пар  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$   $7 \cdot 16$

~~и~~ так далее

Всего пар  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

~~4 \cdot 13 + 7 \cdot 16~~

$$1 \cdot 10 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 16 + 10 \cdot 19 + 13 \cdot 22 + 16 \cdot 25 + 19 \cdot 28 + 22 \cdot 31 + 25 \cdot 34 + 28 \cdot 37 + 31 \cdot 40 + 34 \cdot 43 + 37 \cdot 46 + 40 \cdot 49 + 43 \cdot 52 + \dots + (3i+1)(3i+10) + \dots +$$



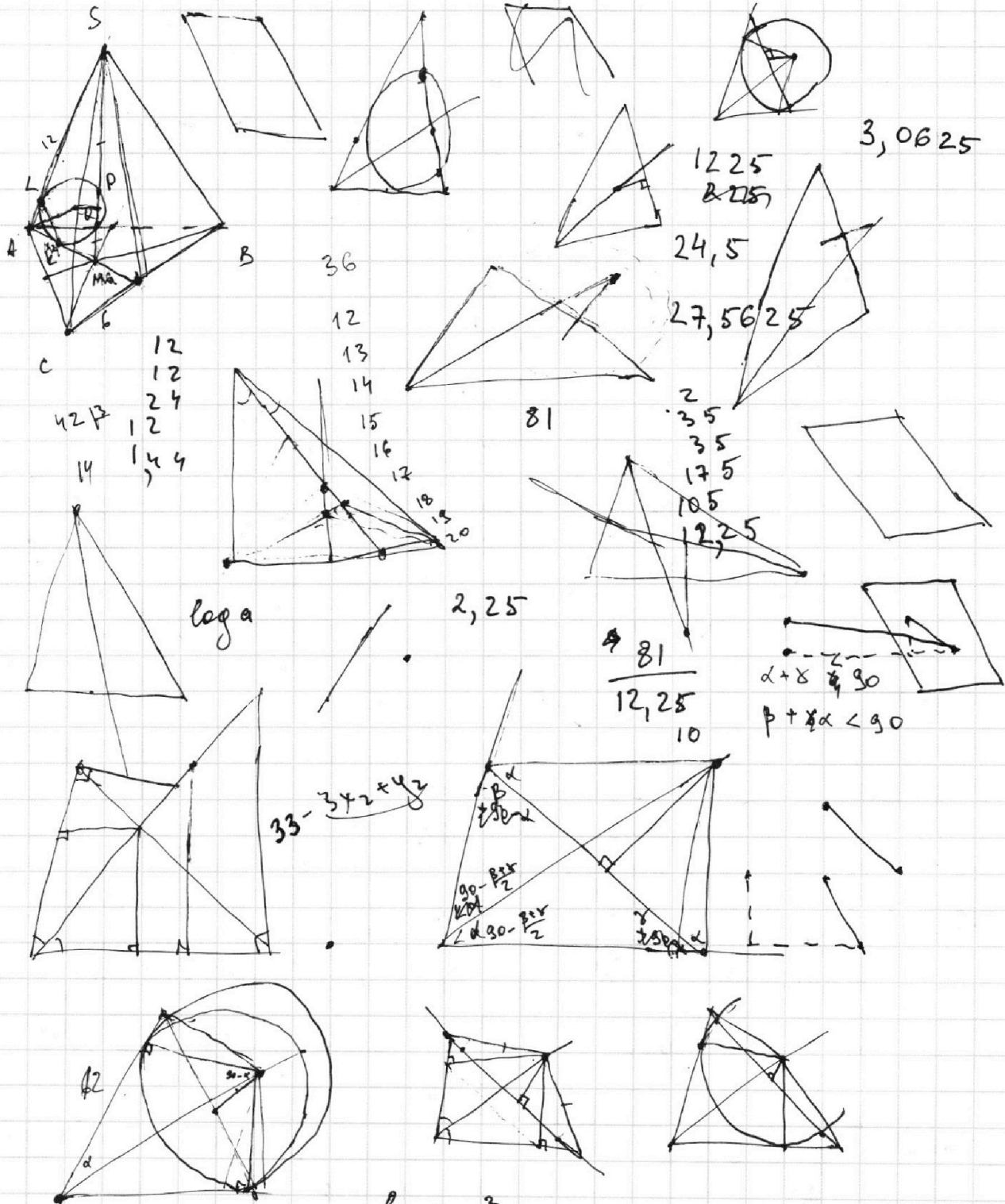
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 4b^3a + 6a^2b^2$$

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

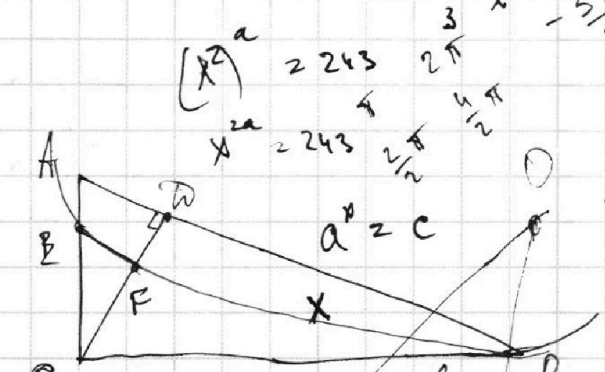
- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^3 3^{10} 5^{10}$   
 $bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$   
 $ac : 2^{13} 3^{18} 5^{30}$   
 $abc : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$a = 5^{10}$   
 $c = 5^{20}$   
 $a = 5^{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^9$   
 $b = 2^{21} \cdot 3^{21}$



$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $6x = 42\pi$   
 $x = \frac{\pi}{3}$

$\log_a b = \frac{\log_c c}{\log_c a}$   
 $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c a}$   
 $\log_3$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$   
 $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   
 $x \in [-\frac{3\pi}{2}; 0) \cup (\pi; 2\pi]$

$a^x = b$   
 $a^y = c$

$5 \arcsin(2\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $\frac{15\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$