



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{41}$$

т.к.  $(abc)^2$ -квадрат и  $(abc)^2 : 3^{41} \Rightarrow$   
 $(abc)^2 : 3^{442}$

$$(abc)^2 : 2^{42} \cdot 3^{42} \Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21}$$

$$abc : ac : 5^{30}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Наименьшее значение  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  достигается  
при  $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^3$ ,  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

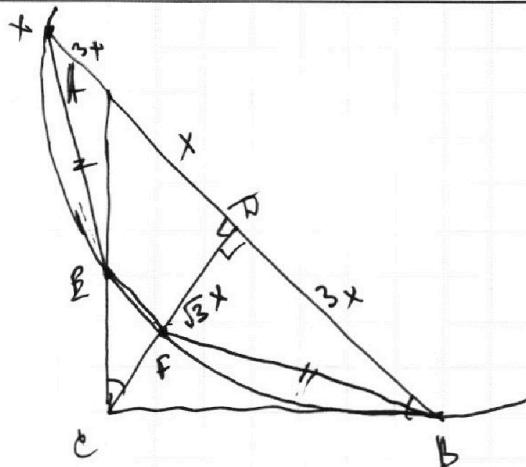
5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{1}{3}$$

~~Согл~~ \triangle CEF \sim \triangle CAD

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAD}} = \left( \frac{EF}{AD} \right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{ODZ: } x \in [-3\pi; 2\pi]$$

При  $x \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\pi; \frac{3\pi}{2}]$  ~~если~~  $\cos x > 0$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

При  $x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}] \cup [\pi; 2\pi] \cup (-\pi, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \cup (-\pi; 0)$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\arcsin \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5(\frac{3\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$24\pi = -4x$$

$$x = -\frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$$

При  $x \in [-3\pi; -2\pi] \cup [-2\pi; -\pi]$

$$\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + x)) = \arcsin(\sin(-\frac{3\pi}{2} - x)) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$5(-\frac{3\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$26\pi = -4x$$

$$x = -\frac{26\pi}{4} n.k. \quad (x \in [-2\pi; -\pi])$$

При  $x \in (\pi; 2\pi]$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \arcsin(\sin(x - \frac{3}{2}\pi)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \\ = \arcsin(\sin(x - \frac{3}{2}\pi)) = x - \frac{3}{2}\pi \\ 5(x - \frac{3}{2}\pi) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi$$

$$x = 2\pi$$

При  $x \in [-3\pi; -2\pi)$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \arcsin(\sin(\frac{5\pi}{2} + x)) = \\ = \frac{5\pi}{2} + x \\ 5(\frac{5\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$12\pi = -4x$$

$$x = -3\pi$$

Ответ:  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = -3\pi \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

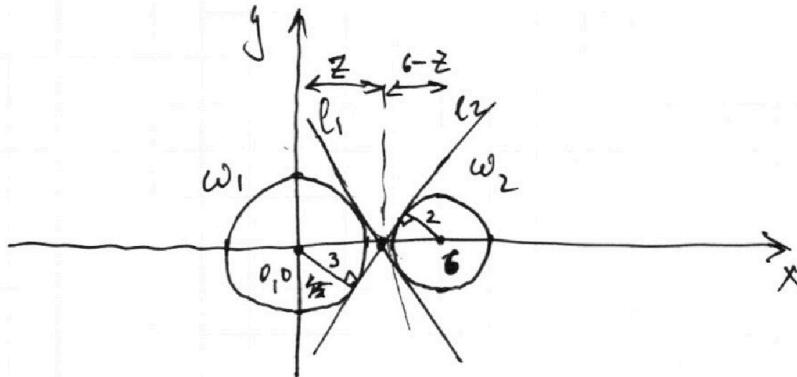
- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \end{cases}$$



Прямая  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$  должна пересекать (не касание) обе окр.  $w_1, w_2$  чтобы было ровно 4 решения системы.

$$l_1: y = k_1 x + b_1$$

$$l_2: y = k_2 x + b_2$$

$l_1, l_2$  - общие внутр. касат. к  $w_1, w_2$

$$-\frac{a}{2} \in \text{угловой (угол)} (k_1; k_2)$$

$$a \in (-2k_2; -2k_1)$$

$$\frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2} = \frac{6-2}{2} \Rightarrow 2z = 18 - \frac{3}{2}z \Rightarrow z = \frac{36}{5} = 3,6$$



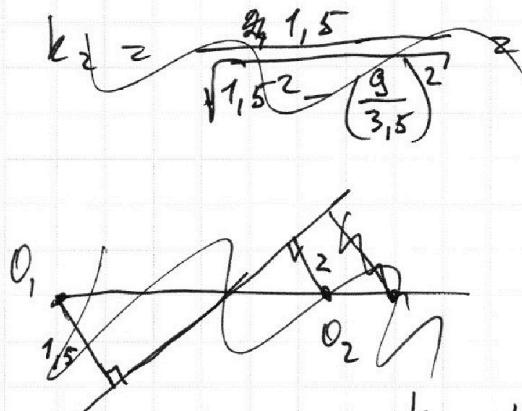
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

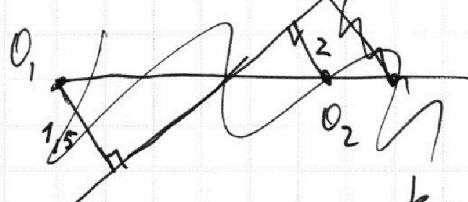
- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k_2 = \frac{5}{\sqrt{8^2 - 3^2}} = \frac{\sqrt{3,6^2 - 3^2}}{3}$$



$k_2$  находим как  $\tg$  угла наклона

$$k_2 = \frac{3}{\sqrt{3,6^2 - 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,2^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{0,44}} = \frac{1}{2\sqrt{0,11}} = \frac{1}{0,2\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Кстати } k_1 = -k_2$$

$$\alpha \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$(\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^2) - 8$$

состав

$$4 \log_3^4 5xy + 6 \log_x 3 + 2 \log_{5y} 3 = \cancel{2 \log_3^2 x^5} + \cancel{\log_{5y^2} 3^4} - 16$$

$$4 \log_3^4 5xy + 6 \log_3 x - 2 \log_3 5y = \cancel{-5 \log_3(x)^2} - 11 \log_3(5y)^2 - 16$$

$$4 \log_3^4 5xy - 2 \log_3 5xy = \cancel{-5 \log_3 xy} - 16 - 5 \log_3(5xy)^2 - 6 \log_3(5y)^2 + 4 \log_3 x - 16$$

$$-2 \log_3 5xy = -10 \log_3 5xy - \cancel{6 \log_3 5y} + 4 \log_3 x - 16$$

$$8 \log_3 5xy = 4 \log_3 x - 12 \log_3 5y - 16$$

$$2 \log_3 5xy = \cancel{4 \log_3 x} - 3 \log_3 5y - \cancel{4}$$

$$\log_3 5xy = -4 \log_3 5y - 4$$

$$\log_3 \left( \frac{5xy}{(5y)^4} \right) = -4$$

$$\frac{5xy}{(5y)^4} = \frac{1}{3^4}$$

$$\frac{x}{(5y)^3} = \frac{1}{3^4}$$

$$\log_3 x - \log_3(5y) - 6 \log_3 x + 2 \log_3 5xy = -5 \log_3 x^2 + 11 \log_3(5y)^2$$

$$4 \log_3 x + 20 \log_3 5y + \log_3 x - \log_3(5y) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

( $\log_3 x - \log_3 5y$ )

$$4 \log_3 5xy + 16 \cancel{4} \log_3 5y + \log_3^4 x - \log_3^4 (5y) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

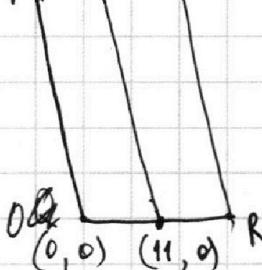
- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

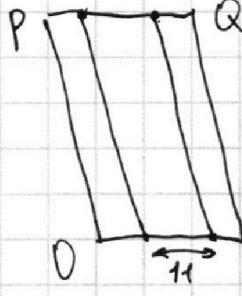
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При  $x_2 - x_1 = 2$ ,  $y_2 - y_1 = 39$   
Кол. 60 пар  $20 \cdot 14 \cdot (42 - 39 + 1)$

P Q + целая точка на PO



Большер (6,0) 6 пар подходит любые  
целые точки на отрезке <sup>отрезка</sup> прямой проходящей  
через (11, 0) и параллельной сторонам парал.  
и никакие другие точки, такие же на <sup>(11, 0)</sup> не подходят. Аналогично  
остальные  
всё такие отрезки параллельные PO разбиваются на пары. Таких пар получается



10. (отрезок через (10, 0) не бывает ни в одну пару, где ~~нет~~ нет  
ни в нём нет пары ближайших пар.)

На каждом отрезке 15 целых  
точек  $\Rightarrow$  6 каттой паре отрезков можно  
выбрать  $15^2$  различных пар целых точек  
 $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$   $\Rightarrow$  Всего пар ~~6~~ точек

$$10 \cdot 15^2 = 2250$$

Ответ: 2250



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

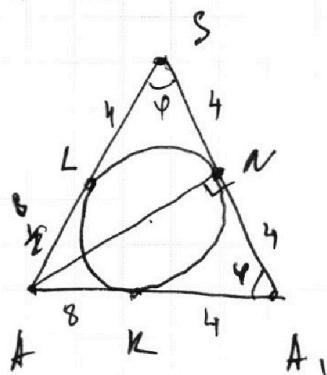
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) двухгранный угол <sup>при Вс</sup> равен плоскому  
углу  $A_1AS$



$$\cos \varphi = \frac{14^2 - 8^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 12}$$

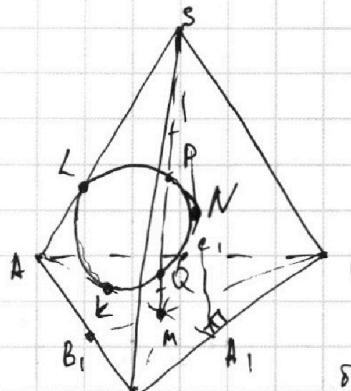
$$\begin{aligned} &= \frac{196 - 64 - 144}{192} \\ &= \frac{16}{192} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \arccos \frac{4}{12} = \\ &\approx \arccos \left( \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Ответ:  $\arccos \left( \frac{1}{3} \right)$

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим:

Точки  $K, L, P, Q$  прекараплены серере и лежат в одной пл-ти  $\Rightarrow$   
 $KLPQ$  - впис.

окр.  $\omega$  опис. около  $KLPQ$  ~~касир.~~ вписка  
в  $\triangle SAB$  ~~касир.~~,  $\Rightarrow$  её центр на  
биссектрисе  $\angle SAM$  и на сер-пере  $\perp PQ$ ,  
сер-пер  $\perp PQ$  совпадает с сер-пером  
 $\perp SM$  ( $SP = MQ$ ). Получаем, что центр  $\omega$  - точка  
пересеч. биссектр.  $\angle SAM$  и сер-пера  $\perp SM$ .

$\triangle ABQ \sim ASM$  - Р/З

$AM = 12 \Rightarrow A_1M = 6$  (М - точка пересеч. мед.)

$$MA_1 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \angle CMB = 90^\circ \Rightarrow CA = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$\cancel{26\sqrt{2}}, \cancel{MC_1} = CM + \frac{1}{2} = \cancel{63\sqrt{2}}, MB_1 \neq MB$$

$$S_{CMB} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{CM \cdot MB}{2} = 30$$

$$CM^2 + MB^2 + 2CM \cdot MB = CB^2 + 2CM \cdot MB = 12^2 + 30 \cdot 4$$

$$(CM + MB)^2 = 144 + 180 = 324$$

$$CM + MB = 18$$

$$CM = \frac{60}{MB}$$

$$\text{кд } \frac{MB^2 + 60 - 18MB + 60}{MB} = 0$$

$$MB_1 = \frac{3}{2} MB = 3(18 \pm \sqrt{84})$$

$$CC_1 = \frac{3}{2} CM = 3(18 \mp \sqrt{84})$$

$$AA_1 = 18$$

$$0 = 324 - 240 = 84$$

$$MB = \frac{18 \pm \sqrt{84}}{2}$$

$$CM = \frac{18 \mp \sqrt{84}}{2}$$

$$BB_1 \cdot CC_1 \cdot AA_1 = 18 \cdot 9 \cdot (18 + \sqrt{84})(18 - \sqrt{84}) = 18 \cdot 9 \cdot (324 - 84) = 18 \cdot 9 \cdot 240 = 3988$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

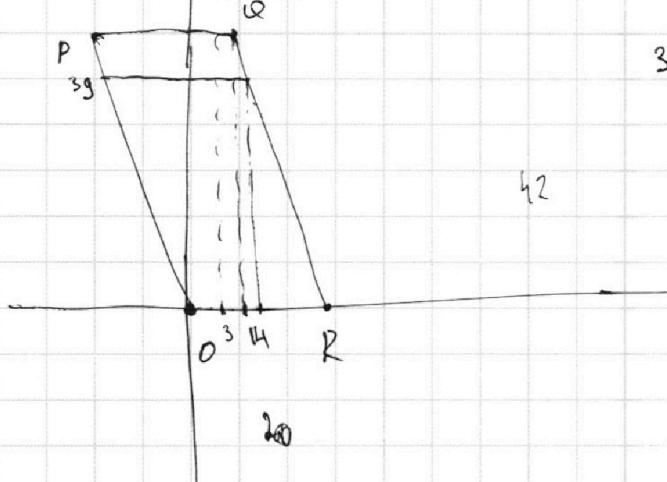
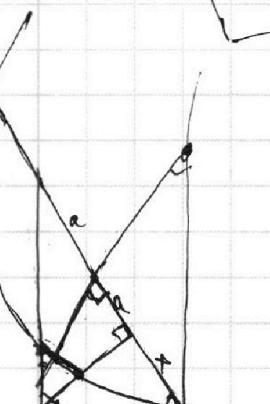
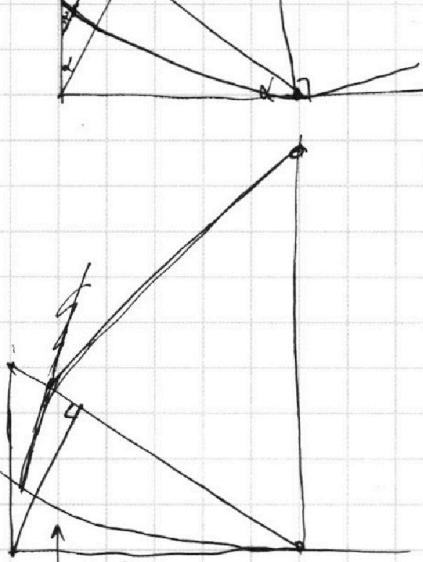
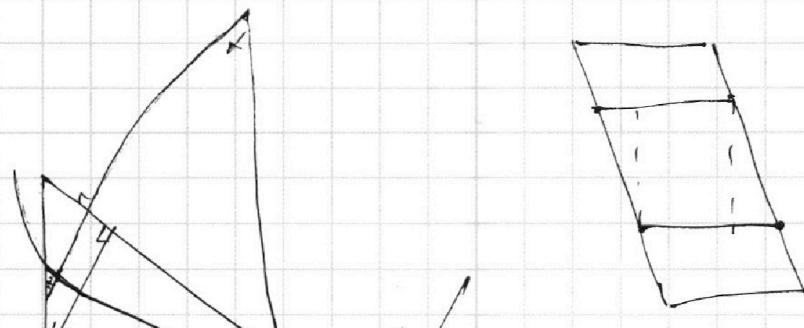
5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ - 33 \\ \hline 9 \end{array}$$

12

14

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$|y_2 - y_1| \leq 42 \quad (x_2 - x_1) \leq 20$$

при  $x_2 - x_1 \leq -4$   $y_2 - y_1 \geq 45$  - не возможно  $\Rightarrow x_2 - x_1 \geq -3$

При  $x_2 - x_1 = -3$  При  $x_2 - x_1 = -3$   $y_2 - y_1 \geq 42 \Rightarrow y_1 = 0$   $y_2 \geq 42$

$\Rightarrow x_1 \in [3; 14]$ ,  $x_2 - x_1 \in [-3, 0)$  вост. однозначно  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Есть 18 вариантов для пары  $(x_1, x_2)$

$\Rightarrow$  18 вариантов где пары  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$

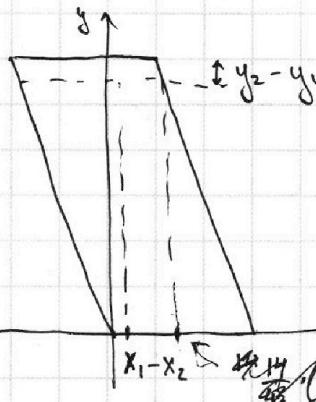
При  $x_2 - x_1 = -2$   $y_2 - y_1 = 39$   $\Rightarrow$  существует 4

варианта  $y_1, y_2$  для пары  $y_1, y_2$  сме

канной из них на отрезке  $y_1, y_2$  сме

нужно выбрать 2 точки  $x_1, x_2$  сме

нужно выбрать 2 точки  $x_1, x_2$  сме



Если заданы  $(x_2 - x_1) \leq 0$  и  $(y_2 - y_1) > 0$   
можно перейти от пары к

премоуп. со стороны  $(x_2 - x_1) -$

$-(x_1 - x_2) + 1$  и  $42 - (y_2 - y_1)$  кол-во

на таких отрезков  $42 - (y_2 - y_1) + 1$

на каждом нужно выбрать

$x_1$ , оставшое вост. однознач.

При  $x_2 - x_1 = -2$ :  $y_2 - y_1 = 39$

$$14 \cdot 42 - 14 \cdot 39 \div 2 + 1 = 20 - 14 \cdot \frac{(42 - (y_2 - y_1) + 1)}{(x_1 - x_2)}, \text{ за кол-во}$$

таких отрезков  $\frac{42 - (y_2 - y_1) + 1}{(x_1 - x_2)}$ . Задача сводится к тому,

стоби наст бсбрт  $x_1$  на отрезке.

При  $x_2 - x_1 = -3$   $y_2 - y_1 = 42$

кол-во вар. где  $x_1$  - это кол-во отрезков уменьшить  
на (длину отрезка + 1)

$$20 - 14 \cdot \frac{(42 - 42 + 1)}{(x_1 - x_2)} - 3 = 3 \quad \text{кол-во пар } (x_1, y_1) \cup (x_2, y_2) = 4.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

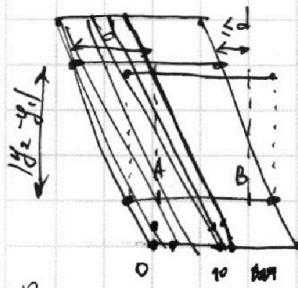
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

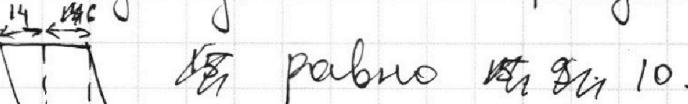
Взяв  $y_2 - y_1$  мы получаем некоторое количество отрезков длины 20 на которых идем  $x_1$  и  $x_2$



$$|x_2 - x_1| = \sqrt{\frac{33 - (y_2 - y_1)}{3}} = d$$

Кон-бо ногтединых & нр  $x_1^2, x_2^2$   
 равно сумме отрезка  $AB + 1$  (кон-бо  
 неких точек на  $AB$ )

Нпр  $x_2 - x_1 = -3$   $y_2 - y_1 = 42$  нап  $y_1, y_2 \quad 43 - 42 = 1,$   
 нап  $x_1, x_2$   ~~расно~~  $\rightarrow$  ~~расно~~  $\rightarrow$  10.



$$\text{Npm } x_2 - x_1 = -2 \quad y_2 - y_1 = 3g \quad \text{rap } y_1, y_2 \quad y_3 - 3g = 4,$$

pabno 13  $\Rightarrow$  Rap  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$

$$4 \cdot 13 = 52.$$

Rpm  $x_2 - x_1 = -1$   $y_2 - y_1 = 36$  nap  $y_1, y_2$   $43 - 36 = 7$   
 nap  $x_1, x_2$  pabno 16  $\Rightarrow$  nap  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

4 rank garter

Bzero map  $(x_1, y_1) \xrightarrow{225} (x_2, y_2)$

~~4.15 + 748~~

$$1 \cdot 10 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 16 + 10 \cdot 19 + 13 \cdot 22 + 16 \cdot 25 + 19 \cdot 28 + 22 \cdot 31 +$$

$$+25 \cdot 34 + 28 \cdot 37 + 31 \cdot 40 + 34 \cdot 43 + 37 \cdot 46 + 40 \cdot 49 + 43 \cdot 52 + \dots +$$

$$+ (3i+1)(3i+10) + \dots +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

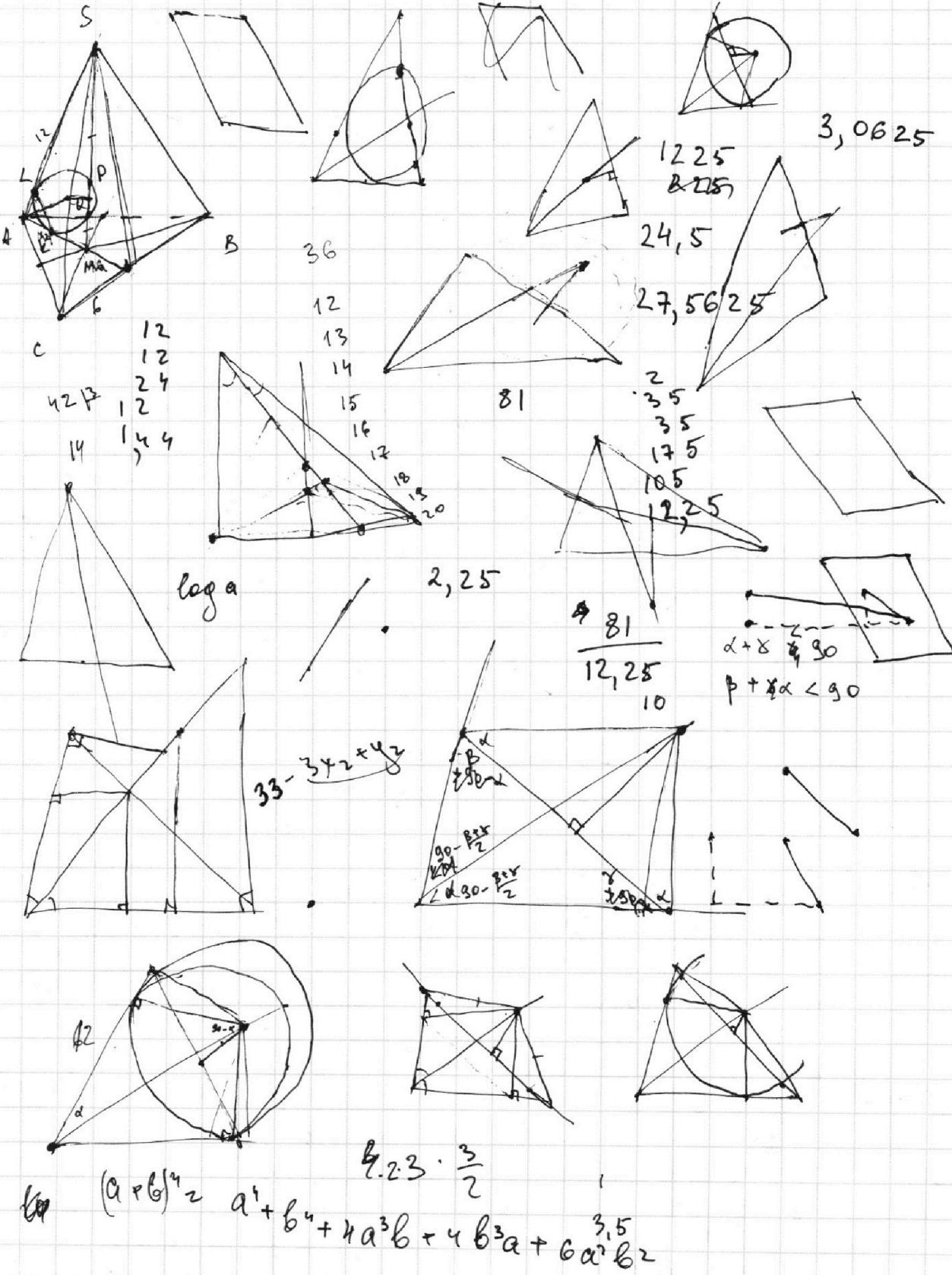
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^3 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$abc : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

23  
23  
19 18

6324

a = 5<sup>10</sup>

c = 5<sup>20</sup>

c = 2<sup>10</sup> 3<sup>18</sup> 5<sup>30</sup>

a = 5<sup>10</sup> · 3<sup>10</sup> · 2<sup>10</sup>

243<sup>13</sup>  
18

63<sup>20</sup>

2<sup>10</sup>

3<sup>18</sup>

5<sup>30</sup>

2<sup>10</sup> · 3<sup>18</sup> · 5<sup>30</sup>

3<sup>18</sup>

2<sup>10</sup>

5<sup>30</sup>