



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \text{ Возведение в кв-м } abc : ab = k \cdot 2^{\frac{9}{2}} \cdot 3^{\frac{10}{2}} \cdot 5^{\frac{10}{2}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac \Rightarrow bc = t^{\frac{14}{2}} \cdot 3^{\frac{13}{2}} \cdot 5^{\frac{13}{2}}, t \in \mathbb{Z}$$

$$ca = m \cdot 2^{\frac{19}{2}} \cdot 3^{\frac{18}{2}} \cdot 5^{\frac{30}{2}}, m \in \mathbb{Z}$$

$$(abc)^2 = ktm \cdot 2^{\frac{42}{2}} \cdot 3^{\frac{41}{2}} \cdot 5^{\frac{53}{2}}$$

$$abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{\frac{21}{2}} \cdot 3^{\frac{41}{2}} \cdot 5^{\frac{53}{2}}$$

$$\Rightarrow abc = \sqrt{ktm} \cdot 2^{\frac{21}{2}} \cdot 3^{\frac{20,5}{2}} \cdot 5^{\frac{26,5}{2}}$$

- $9+14+19$
- $10+20+12 = 42$
- $10+13+18$
- $10+20+11 = 41$
- ~~10+13+30 = 53~~

$\sqrt{ktm}$  должно быть представлено в виде

числа  $a \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$  минимум, т.к.  $abc$  -  
одно число есть оно состоит из произведения чисел  
~~каких~~  $k, t, m$  - тоже целое число

$$\sqrt{ktm} = \sqrt{a \cdot 15^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \rightarrow \text{также } (15 \cdot x) = \text{полное квадрат}$$

$$\Rightarrow a = 15 \Rightarrow ktm = 15 \Rightarrow \sqrt{ktm} \text{ т.к. должно не получится}$$

Пример следующий:  $\sqrt{ktm} = 3^{\frac{15}{2}} \cdot 5^{\frac{3,5}{2}} = 3\sqrt{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow ktm = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}}$

$$\Rightarrow ktm = 15 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \rightarrow \text{является полным квадратом}$$

Квадратичный, минимальный пример, т.к. иначе при  
использовании условия  $\sqrt{ktm}$ ,  $\sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}}$

Например:  $k=15, t=27, m=125, \sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}}$

$\Rightarrow$  Тогда имеем, что  $ab = 15 \cdot 2^{\frac{9}{2}} \cdot 3^{\frac{10}{2}} \cdot 5^{\frac{10}{2}}, bc = 2^{\frac{14}{2}} \cdot 3^{\frac{13}{2}} \cdot 5^{\frac{13}{2}}, ca = 125 \cdot 2^{\frac{19}{2}} \cdot 3^{\frac{18}{2}} \cdot 5^{\frac{30}{2}}$

$$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{\frac{21}{2}} \cdot 3^{\frac{22}{2}} \cdot 5^{\frac{30}{2}}$$

$$\sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}}$$

$$k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$$

$$k = 3^3, t = 5^3, m = 5^4$$

$$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{\frac{21}{2}} \cdot 3^{\frac{22}{2}}$$

Объем:  $2^{\frac{21}{2}} \cdot 3^{\frac{22}{2}} \cdot 5^{\frac{30}{2}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$3) \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$$

$k$ -коэффициент подобия в  $\triangle ABC$  и  $\triangle CFE$

$$h) \text{Пусть } AO = 2\sqrt{3}x, \text{ тогда } DO = x, \text{ тогда } DB = x$$

$$\text{по т. Пифагора } AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

$$\text{по т. Пифагора } CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4}x = 2x$$

( $\triangle COB$ )

5) доказательство  
доказательство  
что  $\angle C$  острый  
так как  $A$  не  
прикасается

$$\Rightarrow BA \cap \text{окр} = M$$

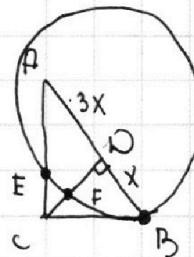
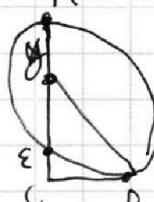
$$\text{тогда по т. о пересечении  
и симметрии: } CB^2 = CE \cdot CA$$

$$\text{из } CB^2 = CE \cdot CA \Rightarrow \frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{2\sqrt{3}x}{x} = 2\sqrt{3}$$

$CB^2 = CE \cdot CM$  ( $M$  - противополож.)

$$CB = CE \cdot AC$$

$$CM > AC$$



$$1) EF \parallel AB \\ \Rightarrow CD \perp EF, \text{ т.к.} \\ CD \perp AB$$

$$\Rightarrow \angle FFC = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \angle DAC = \angle FEC \\ (\text{согл. токи}) \\ \text{так. прямых } AB \text{ и } EF \\ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD \\ \text{по II умн}$$

$$\text{аналогично:} \\ \triangle CEF \sim \triangle COB \\ \text{по II умн} \\ \triangle CEF \sim \triangle ABC \\ \text{по II умн}$$

$$h_2 = \sqrt{AD \cdot DB} - \text{членное геометрическое} \\ \text{изменение между окружностью и квадратом.} \\ CO = x\sqrt{3} \\ CO = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2}$$

$$\text{по т. Пифагора } AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

$$\text{по т. Пифагора } CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4}x = 2x$$

$$6) \text{допущение: } A \in \text{окружности} \\ \text{тогда: } \angle EAB = \angle BEF = \frac{1}{2} \text{ впис.} \\ \angle EBC = \angle BEF = \frac{1}{2} \text{ углы между} \\ \text{всек + хорд}$$

$$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle CEB$$

$$\text{так как } \angle CAB = \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{т.к. } \tan \alpha = \frac{CE}{BC} \\ \text{тогда: } \frac{CE}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; CE = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$$

$$\text{тогда: } k = \frac{AB}{CE} = \frac{4x \cdot 3}{2\sqrt{3}x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$(\triangle ABC \text{ и } \triangle CEF)$$

$$\text{тогда: } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: 12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \end{cases} \quad t = -1, 0, 1 \\ k = -2, -1, 0, 1$$

$$\begin{aligned} & (x = -3\pi, x = -\frac{4\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}, x = 2\pi) \\ & (x = -3\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x = 2\pi) \end{aligned}$$

$$2) x = 2\pi; \checkmark$$

$$5 \arcsin(\cos(2\pi)) = \frac{5\pi}{2}$$
$$\cos(2\pi) = 1 \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \checkmark$$

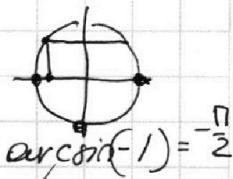
$$4) x = \frac{\pi}{3}; \quad 5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} \checkmark$$

$$5) x = -\frac{\pi}{2}; \quad 5 \arcsin(0) = 0 \checkmark$$

Теперь следуем  
проверить  
получившиеся  
корни:

$$1) x = -3\pi \checkmark$$

$$5 \cdot \arcsin(\cos(-3\pi)) = -\frac{5\pi}{2} \checkmark$$
$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$



$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$3) x = -\frac{4\pi}{3}; \quad -\frac{8\pi}{6}; \checkmark$$

$$\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$$
$$5 \arcsin(\pm \frac{1}{2}) = -\frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6};$$

$$5 \arcsin(\pm \frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6};$$
$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}; \checkmark$$

Ответы:  $-3\pi; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

расширене ограничение  
уравнение

$$x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

~~БДОЛФ~~

$$[-3\pi \leq x \leq 2\pi]$$

$$\frac{10}{\pi} = \frac{10}{6} \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\cos x \in [-1; 1] \quad \forall x$$

$$5 \cdot \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

Т.к.

$$\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\sin x = \frac{3}{5}$$

$$x = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$x = \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\cancel{x = 1 + 20\left(5 - \frac{\pi}{2}\right)} = 100 + 1 - 10\pi = 10(10 - \pi) + 1$$

$$10 - \pi > 6 \quad \cancel{10 - \pi > 6} \quad \cancel{10 - \pi > 6}$$

$$\sqrt{61} < 1, \dots$$

$$x_1 \approx \frac{-1 + \sqrt{61}}{10}$$

$$x_2 \approx \frac{-1 - \sqrt{61}}{10}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{2x + \pi}{10}$$

, будущим от деления числителя

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin^2\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

условие равенства  
гипотенуза

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$\frac{6\pi + 12x}{10} = \pi + 2\pi k$$

$$\sin\left(\frac{\pi + 2x}{2}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$1) 6\pi + 12x = 10\pi + 20\pi k$$

$$\sin\left(\frac{5\pi + 10x}{10}\right) = \sin\left(\frac{2x + \pi}{10}\right)$$

$$6\pi + 10x = 2x + \pi$$

$$8x = -4\pi \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \right]$$

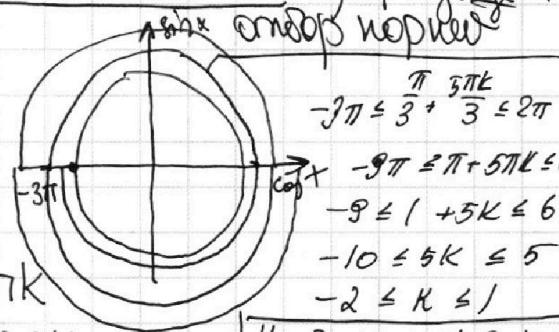
$$4\pi + 8x = 2\pi t$$

$$4\pi + 8x = 2\pi t$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2}$$

2)  $\frac{\pi}{2} \in \{t = -1, t = 0, t = 1\}$

на симметрии



$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \leq 2\pi \cdot 3$$

$$-9\pi \leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi$$

$$-10 \leq 5k \leq 5$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

$$k = -2, k = -1, k = 0, k = 1$$

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2} \leq 2\pi$$

$$-6 \leq -1 + 5t \leq 4$$

$$-5 \leq 5t \leq 5$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$t = -1, t = 0, t = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

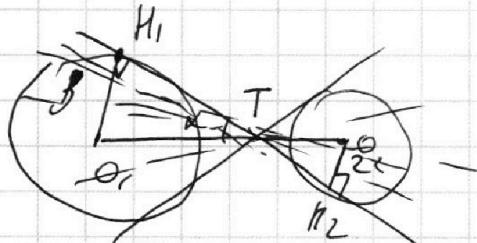
- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

расшифруй, когда проходил паспорт всех авторов.



$$O_1O_2 = 6;$$

$$\triangle O_1HT \sim \triangle O_2HT$$

$$k = \frac{3}{2}; \quad \frac{O_1T}{TO_2} = \frac{3}{2}$$

$$tg \alpha = \frac{3/5}{18/6} = \frac{5}{6}; \quad \text{аналогично } \alpha = \frac{\pi}{3} \quad O_1T = \frac{O_1H}{6-O_1T} \cdot \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \quad tg \alpha = -\frac{a}{2}; \quad a = -\frac{5}{3} \quad 2O_1T = 18 - 3O_1T$$

$$5O_1T = 18 \quad O_1T = \frac{18}{5}$$

умножая в, умножая высоту от обеих краиней её находившуюся  
отличию  $\Rightarrow$  умножая а, меньше умножение изображающей  
 $a \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$  то дашь пакет пакет  $\Rightarrow$  тут  
отложили будут вспоминать пересечения  
вместе пакетов.

$\Rightarrow$  Ответ:  $\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Угол поворота  $\alpha$ , при котором сдвигают:  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$$\alpha = 0$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ при } b \in [-\frac{2}{3}; 2]$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ при } b \in [-2; \frac{2}{3}]$$

$$32a^2 - 7ab + 20 = 0$$

$$16a^2 - 3ba + 310 = 0$$

$$8a^2 + 18a + 5 = 0$$

$$D = 324 - 160 = 164$$

$$\text{Ли: } \frac{x}{8} = \frac{y-3}{-3} \quad a = \frac{3}{4} \text{ радиан}$$

$$a = \frac{3}{4}, \rightarrow \text{подходит}$$

причем  $b < 2$  будем прос

8) заданы эллипс "Наклонную  
ординату" то дашь, при  
 $b = 0$

при наимен.  $\alpha$ , при этом  $t$   
пройдет через  $(0; 3)$  + исходить

второй окончательно:

$$y = -\frac{ax}{2} + 3 = 3 - \frac{ax}{2}$$

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2x^2}{4} + 9 - 3ax = 4$$

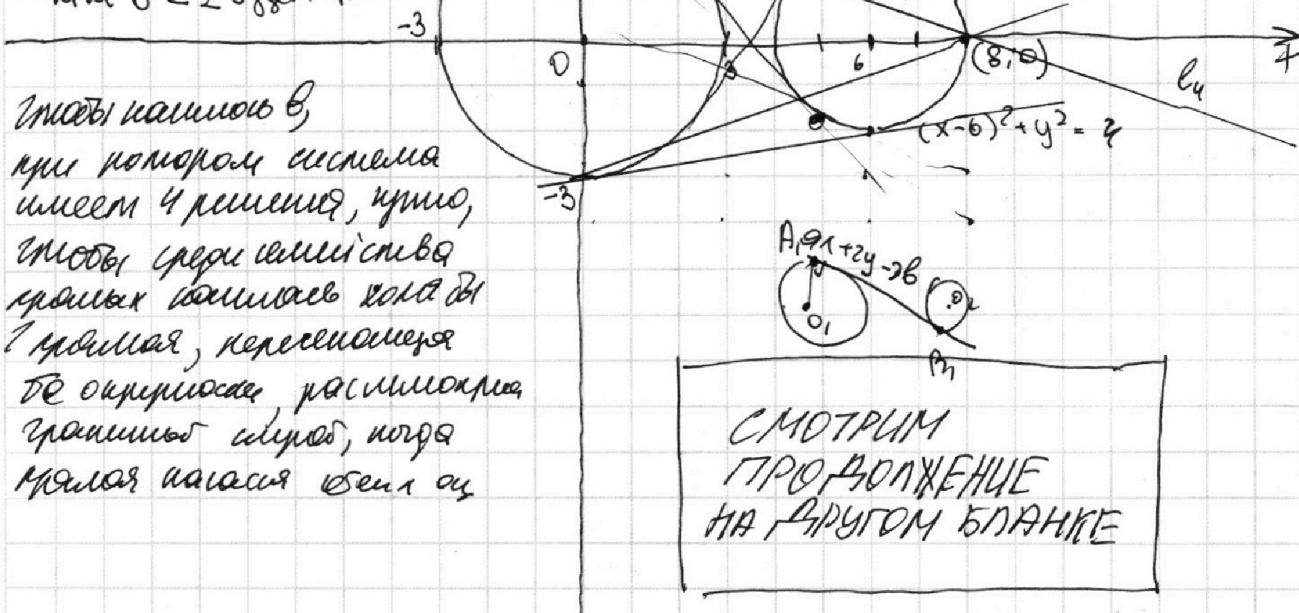
$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - 3x(4 + a) + 41 = 0$$

$$9(16 + 8a + a^2) - 16(4 + a) = 0$$

$$9(16 + 8a + a^2) - 41(4 + a^2) = 0$$

$$9 \cdot 16 + 72a + 9a^2 - 164 - 41a^2 = 0$$

$$36 \cdot 4 + 72a - 32a^2 - 41 \cdot 4 = 0$$



$\alpha = \frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + dy - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

? ровно 4 решения

$$- x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 /+4$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

(1) Перенесем как совокупность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

3) Построим в  $\mathbb{R}^2$  в координатах  $x$  и  $y$

$$ax + dy - 3b = 0$$

1.1 - прямая, проходящая  $x^2 + y^2 = 3^2$  от  $a, b$

1.1.1 - окружность  $(0; 0)$ ,  $R = 3$

1.1.2 - окружность  $(6; 0)$ ,  $R = 2$

5) задача решена так:

1) линии  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,

то прямая  $ax + dy - 3b = 0$

пересекает окружности в 4 точках.

3b определяет начальную ординату:

$$\frac{a}{2}x + b = \frac{3b}{2} \quad \frac{ax}{2} + y = \frac{3b}{2}; y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

В определяет высоту прямой

$$6) l_1: A \in l_1, B \in l_1, y = -\frac{x}{6} + 3$$

$$l_2: C \in l_2, D \in l_2, y = \frac{x}{6} - 3$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \left\{ \text{то 2 точки} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{6} &= \frac{y-3}{-1} \quad \frac{x}{6} = \frac{y+3}{2} \\ y &= -\frac{x}{6} + 3 \quad y = \frac{x}{6} - 3 \end{aligned}$$

СМОТРИ ПРОДОЛЖЕНИЕ  
на обратной стороне

2) перепишем систему:

$$\begin{cases} ax + dy - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$1) \text{АНАЛИЗ } ax + dy = 3b$$

$$f(x) = \text{const} \quad y = 3b - ax$$

$$y = 3b - ax \quad y = \frac{3b - ax}{2}$$

$$(\text{направ. нод}) \quad f(x) = \frac{3b - ax}{2}$$

$$0 = 3b, b = 0 \quad f(x) = \frac{ax}{2}$$

$$x = \frac{3b}{a}, \rightarrow \text{путь } f(x)$$

$$ax + dy - 3b = 0$$

$$4.1) \boxed{a=0} \quad y = \frac{3b}{2}$$

такие в существующих

$a = \frac{1}{3}$  при  $a = \frac{1}{3}$  и  $y = \frac{3b}{2}$  пересекают

$b = 6, \frac{1}{2} \times 6 = 3$  обух от-мн 4 раза (шести)

$b = -2, \frac{1}{2} \times -2 = -1$  начало 4 раза

б = 0, например

$l_1'$

$B(6; 2)$

$l_1$

$O(6; -2)$

$l_2$

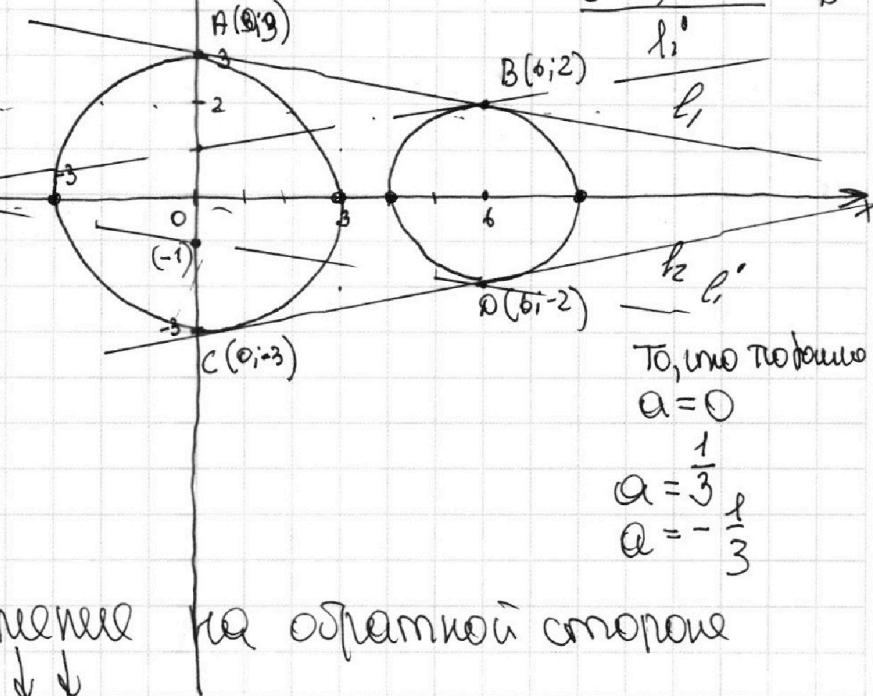
$l_2'$

то, что нужно

$a = 0$

$a = \frac{1}{3}$

$a = -\frac{1}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \int 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 7 = 0 \quad (\cdot) \\ & \int 1 \log_3 y^5 + 16 \log_3 y - 7 = 0 \quad (\cdot) \\ & \text{расши. } f(t) = \begin{cases} t > 0 \\ t \neq 1 \\ t \neq \frac{1}{5} \end{cases} \\ & = \log_3 t + 8 \log_3 t \end{aligned}$$

(.) + (.) Найти xy

$$= 2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x + 2 \log_3 y^5 + 16 \log_3 y = 0$$

$$2 \log_3 x^5 + 16 \log_3 x = -2 \log_3 y^5 - 16 \log_3 y$$

$$\log_3 x^5 + 8 \log_3 x = \log_3 y^5 + 8 \log_3 y$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 5 \log_3 t \cdot \frac{1}{t \ln 3} + \frac{8}{t \ln 3} \\ f'(t) &= \frac{1}{t \ln 3} (5 \log_3 t + 8) \end{aligned}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$f'(t)$  положительно  
если  $t > 0$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \quad , \text{т.к.} \text{ вспомогательная} \\ \text{теорема о корне}$$
$$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{y}{5}\right) \Leftrightarrow x = \frac{y}{5},$$

Надо найти  $x \cdot y$ ;  $x = \frac{y}{5}; xy = \frac{y}{5}y = \frac{y^2}{5}$ .

Ответ: 0,2

Ограничение:

$$\begin{array}{ll} x > 0 & x \neq 1 \\ y > 0 & 5y \neq 1 \\ & y \neq \frac{1}{5} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_x^2 243 - 8 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 y + 2 \log_3 y = \log_{243} (3^{\prime\prime}) - 8 \end{cases}$$

$$y = ?$$

1) напишем ограничения

$$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$y \in (0; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$$

$$\log_3 x = a \quad \log_3 x = a, a \neq 0$$

$$(1) a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$

$$2a^5 + 12 = 5 - 16a$$

$$2a^6 + 16a + 7 = 0$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad (3) \\ 2b^5 + 16b - 7 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$(3) + (4) 2a^5 + 2b^5 + 16a + 16b = 0$$

$$\log_3 5y = 6$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \quad / \cdot 2b$$

$$2b^5 + 4 = 11 - 16b$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

$$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

$$a^8 - b^8 = (a-b)(a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7)$$

$$a^9 - b^9 = (a-b)(a^8 + a^7b + a^6b^2 + a^5b^3 + a^4b^4 + a^3b^5 + a^2b^6 + ab^7 + b^8)$$

Второй способ - неполной квадратом  $\Rightarrow$  ведра почесище

$$= \boxed{a = b} \quad \log_3 x = \log_{53} 5y \Rightarrow x = 5y; \quad x \cdot y = \cancel{5y} = \frac{y^2}{5}$$

$$T.K.f(t) = \log_3 t \quad \log_3 P = \log_3 d \quad y = \frac{d}{5}$$

$$\log_3 x \quad \cancel{\log_3 x} \quad \Leftrightarrow P = d$$

$$\text{(перетишили: 1) } \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_x^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cancel{\log_3 x} - 8 \quad / \cdot 2 \log_3 x$$

$$2 \log_3^5 x + 12 - 5 + 8 \log_3 x = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

$$2) \log_3^4 y + \frac{2}{\log_3 y} = \frac{1}{2} \cancel{\log_3 y} - 8 \quad / \cdot 2 \log_3 y$$

$$2 \log_3^5 y + 4 = 11 - 16 \log_3 y$$

**СМОТРИМ  
ПРОДОЛЖЕНИЕ  
на следующей  
(на другой)  
странице**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

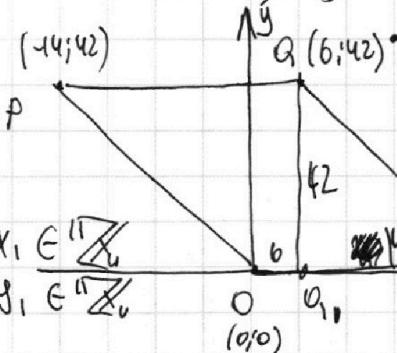


- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O(0,0) P(-14,42) \cdot Q(6,42) \cdot R(20,0) A(x_1, y_1)$$



$$1) x_2 - x_1 \in \mathbb{Z} \\ y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$$

$$33 = 3k + p$$

$$3k + p = 33$$

$$k=11; p=0$$

$$\underline{3(k-11) + (p-0)}$$

$$33 = 0 + 33$$

$$33 = 3 + 30$$

$$33 = 6 + 27$$

$$33 = 9 + 24$$

$$33 = 12 + 21$$

$$33 = 15 + 18$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \\ 3(x_2 - x_1) + 1 \cdot (y_2 - y_1) = 33 \end{cases}$$

$$33 = 18 + 15$$

$$33 = 21 + 12$$

$$33 = 24 + 9$$

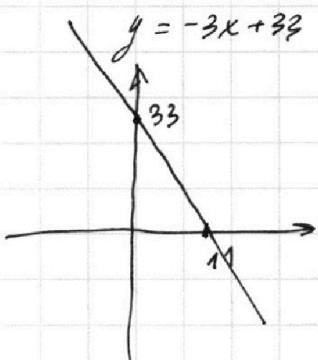
$$33 = 27 + 6$$

$$33 = 30 + 3$$

$$33 = 33 + 0$$

$$33 = 3x + y$$

$$y = -3x + 33$$



$$\operatorname{tg} \angle QRO = \frac{42}{14} = 3$$

$$\operatorname{tg} \angle (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2$   
переставив ~~уравнение~~ уравнение  
~~пункта~~

$$y = 33 - y_2 + 3x_2 - 3x_1$$

$$\text{Пусть } x_1 = x, y_1 = y.$$

очень похоже на уравнение прямой, уравнение которой имеет вид  $y = kx + b$ ,  
которое совпадает с уравнением прямой  $AQ$  и  $OR$   
⇒ это прямая, // стороны  $\triangle PQR$

$y = 33$  — на прямой лежат точки  $O$  и  $R$

2D координатных плоскостей  $\Rightarrow$  прямая  $PQ$  // стороне  $PR$   
Пересекают ось  $X$ , будем иметь пару членов  $(x; y)$  ~~свердующих~~ из 2D плоскости, которые вместе с членами

Объем: 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB, \angle BB_1, \angle CCl_1 = M$$

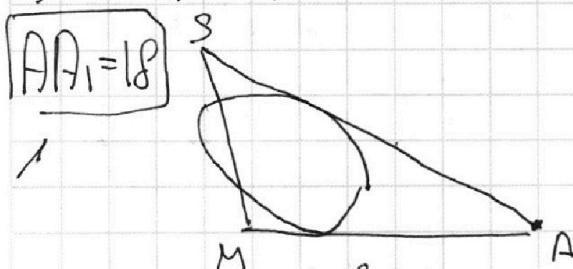
(медиана)

$$S_{\triangle ABC} = 90$$

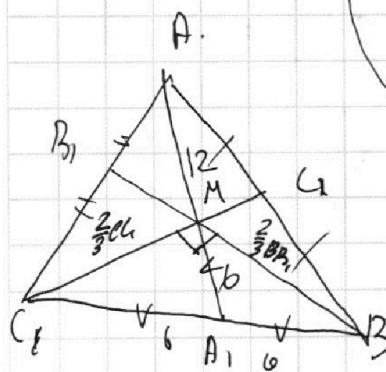
$$AA_1 = BB_1 = 12$$

$$SP = MQ$$

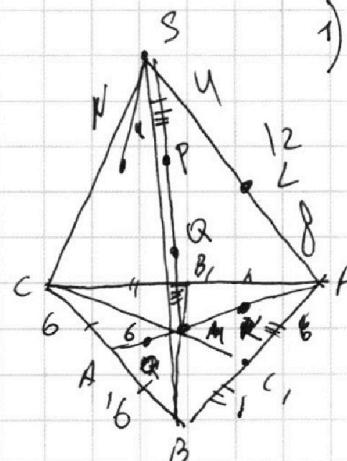
a)  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$



4)  $AA_1 \cdot M_1 = 6$   
расч.  $\triangle CAB$



A.



1)  $S_{\triangle ABC} = h \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$

$$90 = h(CB) \cdot 6$$

$$h = 15$$

2)  $h$  исчезает

$AP \parallel m, L$

$SP$  исчезает

$AA_1, B \in m, K$

$\Rightarrow$  исчезают

из одной точки

равны

$$\Rightarrow AK = AL$$

3)  $PLKM$  - вписанный

Также  $SP = QM = x, PQ = y$   
но 7. О исчезают

и сущует

$$A \cdot PL^2 = x(2x+y)$$

$$MK^2 = x(2x+y)$$

$$\Rightarrow MK = PL$$

$$\Rightarrow AM = AB$$

$MA_1$ -медиана  
 $MA_1 = 6, CA_1 = A_1B = MA_1$ , т.к.  $AP = 12, AM = \frac{2}{3} \cdot M_1 = 12$   
 $\Rightarrow \angle CM_1B = \frac{\pi}{2}$  (медиана =  $\frac{2m-10}{2}$ )  $m_1 = 18;$

$$\boxed{\angle CM_1B = 90^\circ}$$



$$S_{\triangle ABC} = S$$

$$S_{\triangle BB_1C} = \frac{S}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle BMC_1}}{S_{\triangle CM_1B}} = \frac{h \cdot \frac{2}{3} BA_1 \cdot \frac{1}{2}}{h \cdot \frac{1}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CM_1B} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle BB_1C}$$

$$\boxed{S_{\triangle CM_1B} = \frac{1}{3} S = 30}$$

6)  $\frac{2}{3} \cdot CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2} = 30 = S_{\triangle CM_1B}$

$$\frac{2 \cdot CC_1 \cdot BB_1}{9} = 30 \quad CC_1 \cdot BB_1 = \frac{270}{2}$$

$$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = \frac{18 \cdot 270}{2} = 9 \cdot 9 \cdot 30 = 81 \cdot 30 = 243 \cdot 10 = 2430$$

Ответ: а) 2430

Быстро прохождение из буфера

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

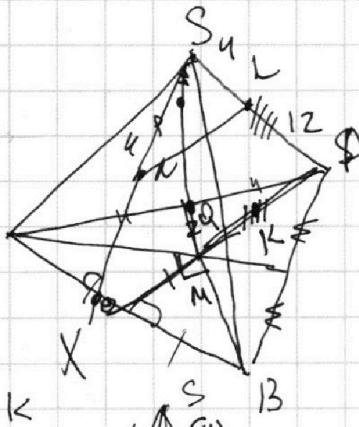
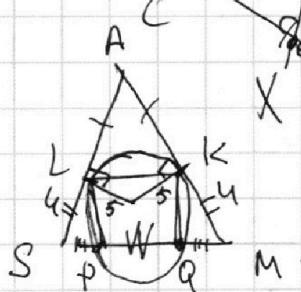
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5)  $\text{Cos} \text{ наимен} (BSC) = N$

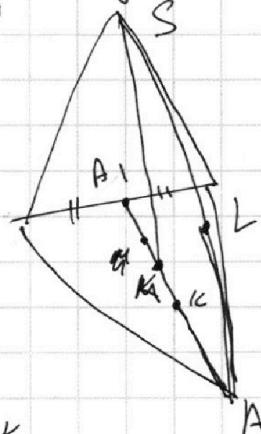
$$SN = 4;$$

$$KQ = 5;$$

$\angle \text{ при } BC - ?$



1) Средра  
вписаны в  
треугольник  
угол при верхне BC



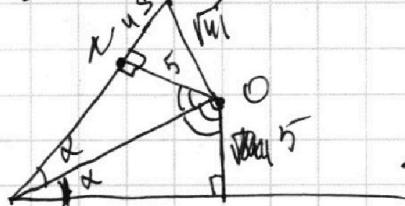
2)  $\triangle ALK \sim \triangle SAM$ , по  $\angle A$  и  $\frac{AL}{AS} = \frac{LK}{AM}$

$\rightarrow LK \parallel SM \Rightarrow [PQKL - \text{трапеция}]$  (-)  $\angle KPL$  доказать  
что  $ASX = \text{Прам}$

3)  $SN = 4$  - наименшее  $\Rightarrow SL = 4$  (наименшее из одног. трея.)  
 $\Rightarrow AK = 4$

Пусть D-центр средра:  $DN = R$ ,  $SN = r$   $\Rightarrow \angle SNO$   
—треугольник  $DN + SN$ , то т. пиромиды  $SO = \sqrt{r^2 + R^2}$   
 $\Rightarrow$  пункта (-)

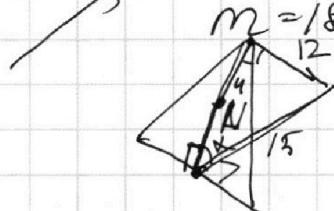
$O$  — биссектриса гипотенузы катета (исходного  
угла).



$\leftarrow$  это линейный угол биссектрисы  
угла

4) Вспоминаем, что  $\sin C = \frac{15}{17}$

$$\frac{324}{285} = \frac{12}{15}$$



$$m = 18; (AA)$$

(\*)  
по допущению  
 $SN \cap CB = X$ ,

$$\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$



$\triangle ASX$  трапеци-  
 $SX = 9$  (коц. Пир-я)

Онбем:  $\arcsin \frac{4}{5}$