МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) возведение в кв-т abc: $ab = k\cdot 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$, $k\in\mathbb{Z}$
$bc = t\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}$, $t\in\mathbb{Z}$
$ca = m\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$, $m\in\mathbb{Z}$

$(abc)^2 = ab\cdot bc\cdot ac \Rightarrow$

$(abc)^2 = ktm\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}$

$abc = \sqrt{ktm}\cdot 2^{21}\cdot 3^{\frac{41}{2}}\cdot 5^{\frac{53}{2}}$

$\Rightarrow abc = \sqrt{ktm}\cdot 2^{21}\cdot 3^{20,5}\cdot 5^{26,5}$

- $9+14+19$
  $10+20+12=42$
- $10+13+18$
  $10+20+11=41$
- ~~10~~ $10+13+30=53$

$\sqrt{ktm}$ должно быть представлено в виде числа $a\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$ минимум, при этом (т.к. abc — целое число, ведь оно состоит из произведений целых чисел) ~~$\sqrt{ktm}$~~ — тоже целое число

$\sqrt{ktm} = \sqrt{a\cdot 15} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} \Rightarrow$ ~~Отм~~ $(15\cdot x)$ ~~— полный квадрат~~
$\Rightarrow a = 15 \Rightarrow ktm = 15 \Rightarrow \sqrt{ktm}$ при этом не получаем

Пример следующий: $\boxed{\sqrt{ktm} = 3^{1,5} = 3\sqrt{3}\cdot 5^{3,5} = 3\cdot 5^3\cdot\sqrt{15}}$
$3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow \boxed{ktm = 3^3\cdot 5^7}$

~~$\Rightarrow ktm = 15\cdot 3^3\cdot 5^3 = 3^4\cdot 5^4$ — является полным~~
квадратом, минимальный пример при котором не нарушена целочисленность $\sqrt{ktm}$, $\Rightarrow$ числа $k, t, m \in\mathbb{Z}$
~~Например: $k = 15$, $t = 27$, $m = 125$, $\sqrt{ktm} = \sqrt{3^4\cdot 5^4} = 3^2\cdot 5^2 \Rightarrow$ подходит~~

$\Rightarrow$ Получим, что $ab = 15\cdot 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$, $bc = 27\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}$, $ca = 125\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{20}$

$\Rightarrow abc_{min} = 2^{21}\cdot 3^{22}\cdot 5^{30}$

, $\sqrt{ktm} = 3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow ktm = 3^3\cdot 5^7$
, $k\in Z$, $t\in Z$, $m\in Z$
$k = 3^3$, $t = 5^3$, $m = 5^4$
$\Rightarrow abc_{min} = 2^{21}\cdot 3^{22}$

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{22}\cdot 5^{30}$

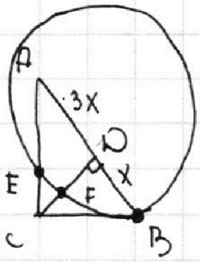
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

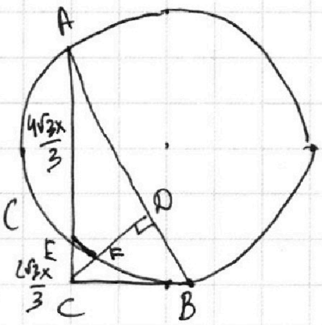
МФТИ

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$

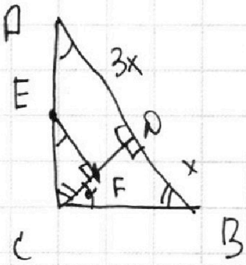


1) $EF \parallel AB$
$\Rightarrow CD \perp EF$, т.к. $CD \perp AB$
$\Rightarrow \angle EFC = \frac{\pi}{2}$

3) $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$

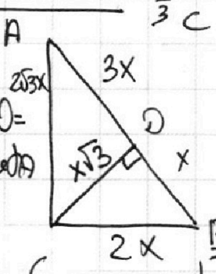


k-коэффициент подобия $\triangle ABC$ и $\triangle CFE$



2) $\angle DAC = \angle FEC$ (соотв. при пар. прямых AB и EF
$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$ по II углам
аналогично:
$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ по II углам
$\triangle CEF \sim \triangle ABC$ по II углам

4) Пусть $AD = 3x$, тогда $DB = x$



$h = \sqrt{AD \cdot DB}$ — среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу.

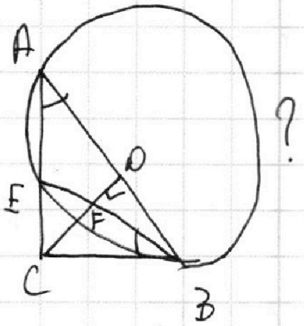
$\boxed{CD = x\sqrt{3}}$
$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2}$

по т. Пифагора ($\triangle CDA$) $\boxed{AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x}$

по т. Пифагора ($\triangle CDB$) $\boxed{CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = \sqrt{4}x = 2x}$

(доказано в (5))

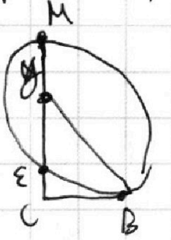
5) Необходимо доказать, что $A \in$ окружности



?

Пусть A не принадлежит
$\Rightarrow BA \cap$ окр $= M$
Тогда по т. о касательной и секущей: $CB^2 = CE \cdot CA$

~~$CB^2 = B$~~ $4x^2 = CE \cdot AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}x \cdot 2\sqrt{3}x$
$4x^2 = 4x^2$
Теорема выполняется для случая $A \in$ окруж.



$BC^2 = CE \cdot CM$ — противоречие)
$CB = CE \cdot AC$
$CM > AC$

6) Допущение: $A \in$ окружности
Тогда: $\angle EAB = \smile BE \cdot \frac{1}{2}$ вписанный
$\angle EBC = \smile BE \cdot \frac{1}{2}$ угол между кас + хорда
$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle CEB$
Пусть $\angle CAB = \alpha$
$tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ т.к. $tg\,\alpha = \frac{CE}{BC}$
$\frac{CE}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $CE = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

Тогда: $k = \frac{AB}{CE} = \frac{4x \cdot 3}{2\sqrt{3}x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$ $\boxed{= 2\sqrt{3}}$
($\triangle ABC$ и $\triangle CEF$)

тогда: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

Ответ: 12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi t}{2} \end{array}\right.$ $t = -1; 0; 1$ $k = -2; -1; 0; 1$

$x = -3\pi;$ $x = -\frac{4\pi}{3};$ $x = \frac{\pi}{3};$ $x = 2\pi;$

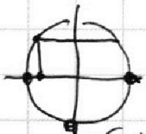
$x = -3\pi;$ $x = -\frac{\pi}{2};$ $x = 2\pi;$

Теперь следует проверить получившиеся корни:

1) $x = -3\pi$

$5\cdot\arcsin(\cos(-3\pi)) = -\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$



$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

2) $x = 2\pi;$

$5\cdot\arcsin(\cos(2\pi)) = \frac{5\pi}{2}$

$\cos(2\pi) = 1$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

3) $x = -\frac{4\pi}{3}; = -\frac{8\pi}{6};$

$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$5\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6};$

$5\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6};$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$

4) $x = \frac{\pi}{3};$ $5\arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$

5) $x = -\frac{\pi}{2};$ $5\arcsin(0) = 0$

Ответ: $-3\pi; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5\cdot\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2}$$

$\frac{10}{\pi}=\frac{10}{6}>\frac{5}{3}$ 1) распишем ограничения уравнения

$\frac{10}{8}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$x+\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ $\qquad \cos x\in[-1;1]\ \forall x$

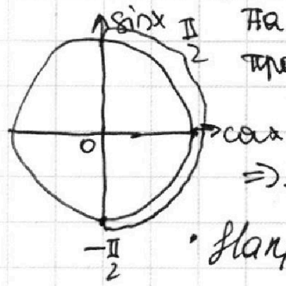
$-\frac{5\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{2}\le\frac{5\pi}{2}$

• $5\cdot\arcsin(\cos x)\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

т.к.

$\arcsin(\cos x)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{-3\pi\le x\le 2\pi}$



На этом пром-ке $\sin$ монотонно $\Rightarrow$ по окр.

2) ~~$\arcsin(\sin x)=x$~~

~~$\arcsin(1-\cos^2 x)=\arcsin\cos x$~~

~~$5(1-x^2)=x+\frac{\pi}{2}$~~

~~$5-5x^2=x+\frac{\pi}{2}$~~

~~$5x^2+x-5+\frac{\pi}{2}=0$~~ 3.1]

~~$D=1+20\left(5-\frac{\pi}{2}\right)=100+1-10\pi=10(10-\pi)+1$~~

~~$10-\pi>6$ $\quad D>61$ $\quad x_1=\frac{-1+\sqrt{61}}{10}$~~

~~$\sqrt{61}\approx 7,\dots$ $\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{61}}{10}$~~

• Например:

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$

$\arcsin(\sin\alpha)=\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

$\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$

$\boxed{\arcsin(\cos x)=\frac{2x+\pi}{10}\text{, возьмем от обеих частей } \sin}$

3) произведем отбор корней

$\sin(\arcsin(\cos x))=\sin\left(\frac{2x+\pi}{10}\right)$

$\cos x=\sin\left(\frac{2x+\pi}{10}\right)$ условие равенства двух функций

$\cos x=\cos(-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi+2x}{2}\right)=\sin\left(\frac{2x+\pi}{10}\right)$

$\sin\left(\frac{5\pi+10x}{10}\right)=\sin\left(\frac{2x+\pi}{10}\right)$

~~$5\pi+10x=2x+\pi$~~

~~$8x=-4\pi$ $\quad x=-\frac{\pi}{2}$~~

1) $\frac{6\pi+12x}{10}=\pi+2\pi k$

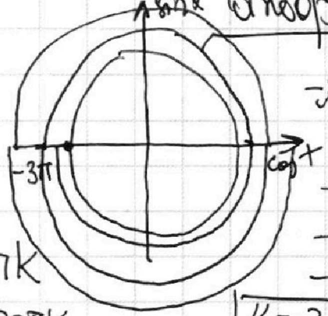
$6\pi+12x=10\pi+20\pi k$

$12x=4\pi+20\pi k$

$\boxed{x=\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi k}{3},\ k\in Z}$

2) $\frac{4\pi+8x}{10}=2\pi t$ $\quad 4\pi+8x=10\pi t$

$\boxed{x=-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi t}{2}}$, $t\in Z$



$-3\pi\le\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi k}{3}\le 2\pi$ $\quad\cdot 3$

$-9\pi\le\pi+5\pi k\le 6\pi$ $\quad :\pi$

$-9\le 1+5k\le 6$ $\quad -1$

$-10\le 5k\le 5$ $\quad k$

$-2\le k\le 1$

$\boxed{k=-2;\ k=-1;\ k=0;\ k=1}$

$-3\pi\le-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi t}{2}\le 2\pi$ $\quad \cdot\frac{2}{\pi}$

$-6\le -1+5t\le 4$ $\quad +1$

$-5\le 5t\le 5$

$-1\le t\le 1$ $\quad \boxed{t=-1;\ t=0;\ t=1}$

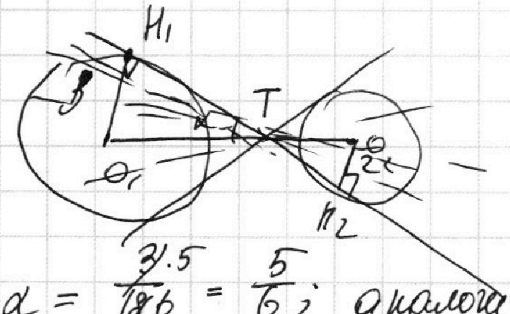
$\boxed{\text{Смотри продолжение}}$ $\boxed{\text{на других листах}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

рассм. случай, когда прямая касается обеих окр-тей.



$O_1O_2 = 6;$

$\triangle O_1H_1T \sim \triangle TO_2H_2$

$k = \frac{3}{2}$; $\frac{O_1T}{TO_2} = \frac{3}{2}$

$tg\alpha = \frac{3\cdot 5}{18} = \frac{5}{6}$; аналогично $a = \frac{5}{3}$ в силу симм.

$\frac{O_1T}{6-O_1T} = \frac{3}{2}$

$2O_1T = 18 - 3O_1T$

$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$ $\quad tg\alpha = -\frac{a}{2}$; $\quad a = -\frac{5}{3}$

$5O_1T = 18$; $O_1T = \frac{18}{5}$

изменяя b, изменяем высоту этой прямой, её начальную ординату => изменяя a, меняем угловой коэффициент то есть наклон прямой => при отклонении будут возникать пересечения вместо касания.

$a \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$

=> Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Из полученных a, подошли следующие. $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

$a = 0$

$a = \frac{1}{3}$ при $b \in [-\frac{2}{3}; 2]$

$a = -\frac{1}{3}$ при $b \in [-2; \frac{2}{3}]$

8) зафиксируем начальную ординату: по бишь, при $b = \cancel{8}\,2$

при каком a, прямая t пройдет через $(0;3)$ + коснется второй окружности.

$y = \frac{-ax}{2} + 3 = 3 - \frac{ax}{2}$

$x^2 - 12x + 36 + \frac{a^2x^2}{4} + 9 - 3ax = 4$

$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - 3x(4+a) + 41 = 0$

$9(16 + 8a + a^2) - 16\cancel{4}(1 + \frac{a^2}{4}) = 0$

$9(16 + 8a + a^2) - 41(4 + a^2) = 0$

$9 \cdot 16 + 72a + 9a^2 - 164 - 41a^2 = 0$

$36 \cdot 4 + 72a - 32a^2 - 41 \cdot 4 = 0$

$32a^2 - 72a + 20 = 0$

$16a^2 - 36a + \cancel{3}10 = 0$

$8a^2 + 18a + 5 = 0$

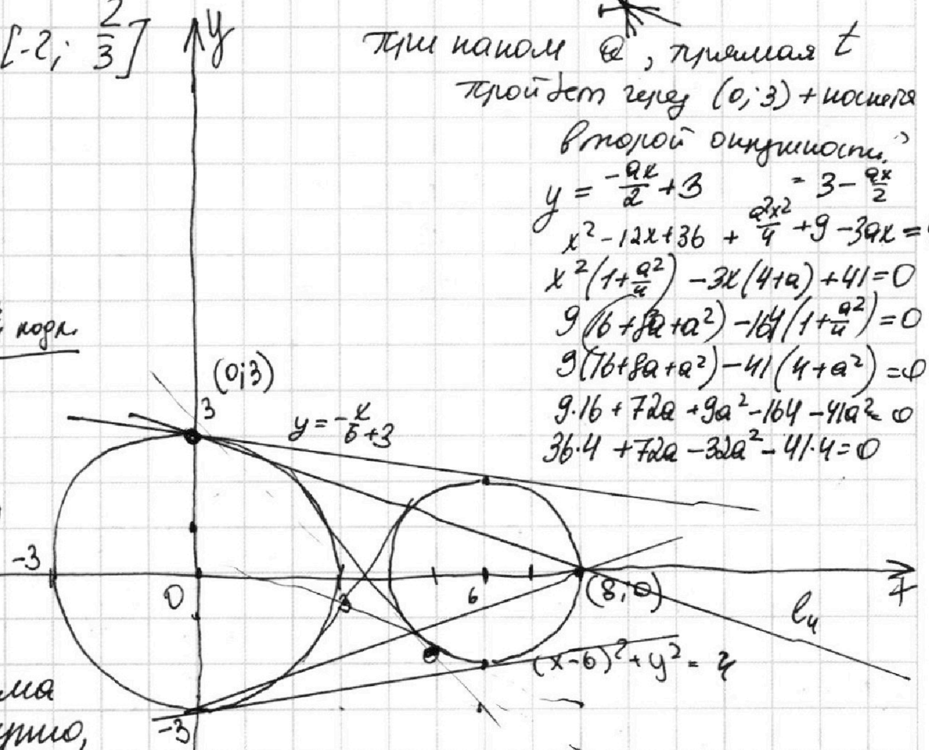
$D = 324 - 160 = 164$

$l_4: \frac{x}{8} = \frac{y-3}{-3}$ $\quad a = \frac{3}{4}$ подх.

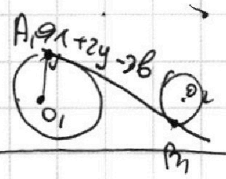
$-\frac{3}{8}x + 3 = y$

$a = -\frac{3}{4}$; $\Rightarrow$ подходит

при $b < 2$ будет череп



Чтобы найти b, при котором система имеет 4 решения, нужно, чтобы среди семейства прямых нашлась хотя бы 1 прямая, пересекающая обе окружности. рассмотрим граничные случаи, когда прямая касается обеих ок



СМОТРИМ ПРОДОЛЖЕНИЕ НА ДРУГОМ БЛАНКЕ

Ответ: a: $\cancel{\pm\frac{1}{3}}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \quad (1) \end{cases}$$

a? ровно 4 решения

$\cdot\ x^2+y^2-12x+32=0 \ /+4$

$(x-6)^2+y^2=2^2$

перепишем как совокупность (1)

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right.$$

2) перепишем систему:

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\cdot\ x^2+y^2-2\cdot 6x+36=4$

$(x-6)^2+y^2=2^2$

3) Построим всё в координатах xOy

всё = графики функций $ax+2y=3b$

|·| - прямая, зависящая от a, b $\quad$ |··| $x^2+y^2=3^2$

|··| - окружность $(0;0)$, $R=3$ $\quad$ |···| $(x-6)^2+y^2=2^2$

|···| - окружность $C(6;0)$; $R=2$

4) АНАЛИЗ $\quad ax+2y=3b$

$\cancel{f(x)=ax}$ $\quad 2y=3b-ax$

$2y=3b-ax$ $\quad y=\frac{3b-ax}{2}$

(начало коорд) $\quad f(x)=\frac{3b-ax}{2}$

$0=3b,\ b=0$ $\quad f(0)=\frac{3b}{2}$

$x=\frac{3b}{a}$; → нуль $f(x)$

5) задача звучит так:
при каких a, найдется b,
что прямая $ax+2y-3b=0$
пересечет окружности в 4 точк.

$3b$ определяет начальную ординату:

$\frac{a}{2}\cdot x+y=\frac{3b}{2}$ $\quad \frac{ax}{2}+y=\frac{3b}{2}$; $y=-\frac{ax}{2}+\frac{3b}{2}$

b определяет высоту прямой

$ax+2y-3b=0$

4.1) $\boxed{a=0}$ $\quad y=\frac{3b}{2}$

такие b существуют, что $y=\frac{3b}{2}$ пересекает 4 раза (имеем 4 решения)

$b=0$, например

7) l_1: $-\frac{1}{6}=-\frac{a}{2}$

$a=\frac{1}{3}$, при $a=\frac{1}{3}$, $b=6$, касание двух окр-ей

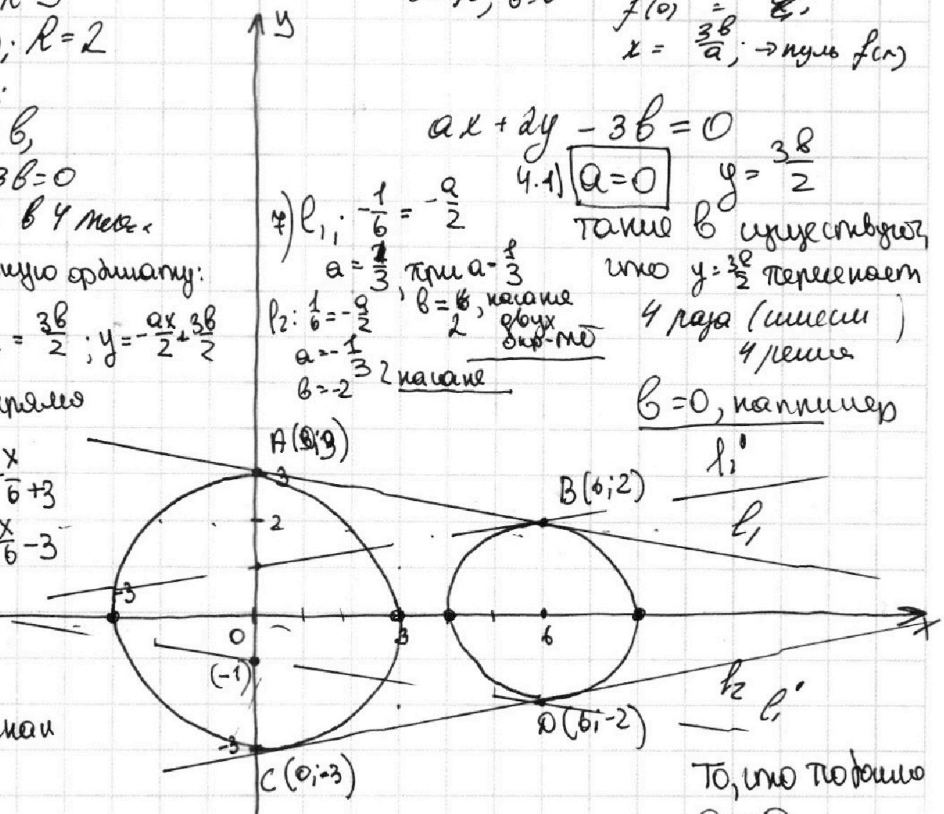
l_2: $\frac{1}{6}=-\frac{a}{2}$

$a=-\frac{1}{3}$

$b=-2$ 2 касание

6) $l_1: A\in l_1, B\in l_1$ $\quad y=-\frac{x}{6}+3$

$l_2: C\in l_2; D\in l_2$ $\quad y=\frac{x}{6}-3$



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Big\} \text{ по 2 точкам}$$

$\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-1}$ $\quad \frac{x}{6}=\frac{y+3}{1}$

$y=-\frac{x}{6}+3$ $\quad y=\frac{x}{6}-3$

То, что подошло

$a=0$

$a=\frac{1}{3}$

$a=-\frac{1}{3}$

Смотри продолжение на обратной стороне листа ↓↓↓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
				X		

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \quad (\cdot) \\ 2\log_3^5 5y + 16\log_3 5y - 7 = 0 \quad (\cdot\cdot) \end{cases}$$

$(\cdot)+(\cdot\cdot)$ Найти xy

$= 2\log_3 x^5 + 16\log_3 x + 2\log_3 5y^2 + 16\log_3 5y = 0$

$2\log_3 x^5 + 16\log_3 x = -2\log_3^5 5y - 16\log_3 5y$

$\log_3^5 x + 8\log_3 x = \log_3^5 \frac{1}{5y} + 8\log_3 \frac{1}{5y}$

расм. $f(t) = \boxed{t>0}$

$= \log_3^5 t + 8\log_3 t \quad t \neq 1, \ t \neq \frac{1}{5}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln e}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{t \ln a}$

$f'(t) = 5\log_3^4 t \cdot \frac{1}{t \ln 3} + \frac{8}{t \ln 3}$

$f'(t) = \underbrace{\frac{1}{t\ln 3}}_{>0}\underbrace{(5\log_3^4 t + 8)}_{>0}$

$f'(t)$ монотонно возрастает на $D(t)$

$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$, т.к. вышеизложенная теорема о корне

$\Rightarrow f(x) = f(\frac{1}{5y}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5y}$;

Необходимо найти $x \cdot y$; $x = \frac{1}{5y}$; $xy = \frac{y}{5y} = \frac{1}{5}$;

Ограничение:
$x > 0 \quad x \neq 1$
$y > 0 \quad 5y \neq 1 \quad y \neq \frac{1}{5}$;

Ответ: 0,2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad (1) \\ \log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

xy - ?

1) напишем ограничения

$x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$y \in (0;\frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5};+\infty)$

$\log_3 x = a$, $a \neq 0$ *

(1) $a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot \frac{1}{a} - 8$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \quad | 2a$

$2a^5 + 12 = 5 - 16a$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$\log_3 5y = b$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2}\frac{1}{b} - 8 \quad | \cdot 2b$

$2b^5 + 4 = 11 - 16b$

$2b^5 + 16b - 7 = 0$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$

(3)+(4) $2a^5 + 2b^5 + 16a + 16b = 0$

$$\begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad (3) \\ 2b^5 + 16b - 7 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$2(a^5+b^5) + 16(a+b) = 0$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+b^4+a^3b+a^2b^2+ab^3)$

$2(a-b)(a^4+b^4+a^3b+a^2b^2+ab^3) + 16(a-b) = 0$

$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) + 8(a-b) = 0$

$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4+8) = 0$

вторая скобка – неполный квадрат => всегда положительное

$\Rightarrow \boxed{a = b}$ $\log_3 x = \log_3 5y \Rightarrow x = 5y$; $x \cdot y = \frac{x^2}{5}$

т.к. $f(t) = \log_3 t \nearrow$ на $D(t) \Rightarrow \log_3 p = \log_3 d \Leftrightarrow p = d$

$y = \frac{x}{5}$

~~$\log_3^4 x$~~

Перепишем: (1) $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad | \cdot 2\log_3 x$

$2\log_3^5 x + 12 - 5 + 8\log_3 x = 0$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0$

(2) $\log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2}\frac{1}{\log_3 5y} - 8 \quad | \cdot 2\log_3 5y$

$2\log_3^5 5y + 4 = 11 - 16\log_3 5y$

2 log

Смотрим продолжение на следующей (на другой) странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

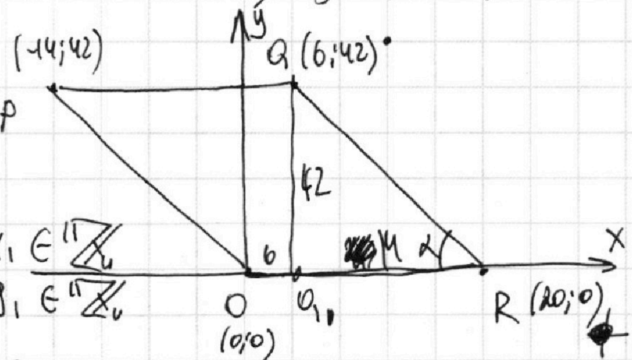
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$ $P(-14;42)$; $Q(6;42)$; $R(20;0)$ $A(x_1;y_1)$

$B(x_2;y_2)$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$



1) $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$
$y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$\boxed{3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33}$

$\boxed{3(x_2 - x_1) + 1\cdot(y_2 - y_1) = 33}$

$33 = 3k + p$

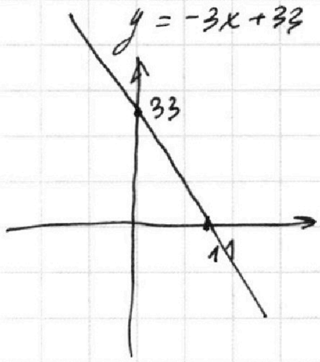
$3k + p = 33$
$k = 11$; $p = 0$

$3(k-11) + (p-0)$

$33 = 0 + 33$
$33 = 3 + 30$
$33 = 6 + 27$
$33 = 9 + 24$
$33 = 12 + 21$
$33 = 15 + 18$

$33 = 18 + 15$
$33 = 21 + 12$
$33 = 24 + 9$
$33 = 27 + 6$
$33 = 30 + 3$
$33 = 33 + 0$

$33 = 3x + y$



$tg\angle QRO = \frac{42}{14} = 3$

$tg\,\alpha(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$

очень похоже на уравнение прямой, угловой коэффициент которой совпадает с угловым коэффициентом прямых RQ и OR => это прямая, // сторонам параллелограмма.

$3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2$

перепишем ~~ее~~ уравнение прямой

$y = 33 - y_2 + 3x_2 - 3x_1$

пусть $x_1 = x$, $y_1 = y$;

~~$y = 33$~~ на промежутке между точками O и R 20 целочисленных точек => любая прямая // стороне п-ма пересекающая ось X будет иметь пару целочисленных $(x;y)$ ~~двадцать раз~~ 20 раз, это считая вместе с границ

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

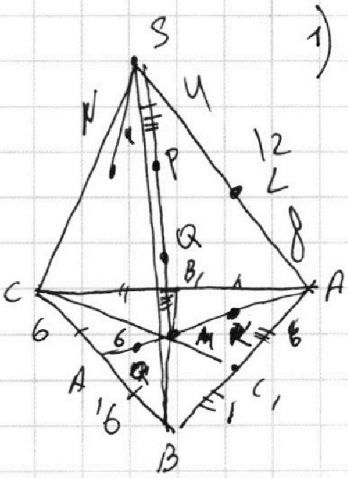
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$
(медианы)
$S_{\triangle ABC} = 90$
$SA = BC = 12$
$SP = MQ$

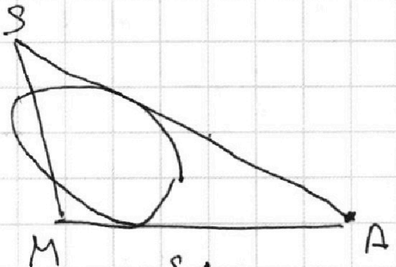
а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

$\boxed{AA_1 = 18}$

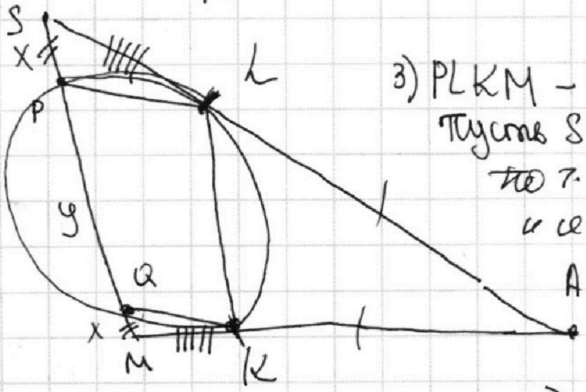


1) $S_{\triangle ABC} = h \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$
$90 = h_{(CB)} \cdot 6$
$\boxed{h = 15}$

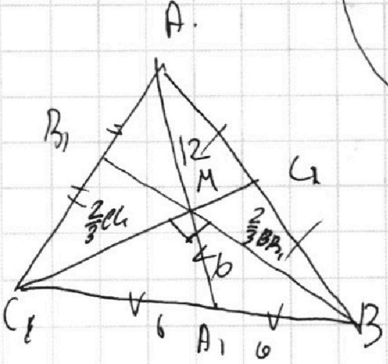
2) Сф касается AS в т. L
Сф касается AA_1 в т. K
$\Rightarrow$ касательные из одной точки равны
$\boxed{\Rightarrow AK = AL}$



4) $A_1M = 6$
рассм. $\triangle CAB$

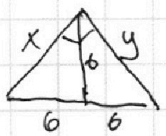


3) PLKM – вписанный
Пусть $SP = QM = x$, $PQ = y$
по т. о касательной и секущей
$SL^2 = x(2x+y)$
$MK^2 = x(2x+y)$
$\Rightarrow MK = SL$
$\Rightarrow \boxed{AM = AS}$



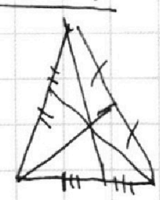
в $\triangle C_1MB$
MA_1 – медиана
$MA_1 = 6$, $C_1A_1 = A_1B = MA_1 = 6$
$\Rightarrow \angle C_1MB = \frac{\pi}{2}$ (медиана $= \frac{\text{гип-за}}{2}$)

$AS = 12$; $AM = \frac{2}{3} \cdot m_1 = 12$
$m_1 = 18$.



$\boxed{\angle C_1MB = 90^\circ}$

5)



$S_{ABC} = S$
$S_{\triangle BB_1C} = \frac{S}{2}$
$\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle CMB_1}} = \frac{h \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{1}{2}}{h \cdot \frac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$
$\Rightarrow S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle BB_1C}$
$\boxed{S_{\triangle CMB} = \frac{1}{3}S = 30}$

6) $\frac{2}{3}CC_1 \cdot \frac{2}{3}BB_1 \cdot \frac{1}{2} = 30 = S_{CMB}$
$\frac{2 \cdot CC_1 \cdot BB_1}{9} = 30$ $\quad CC_1 \cdot BB_1 = \frac{270}{2}$

$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = \frac{18 \cdot 270}{2} = 9 \cdot 9 \cdot 30 = 81 \cdot 30 = 243 \cdot 10 = 2430$

Ответ: а) 2430

смотри продолжение на другом листе!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,.
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

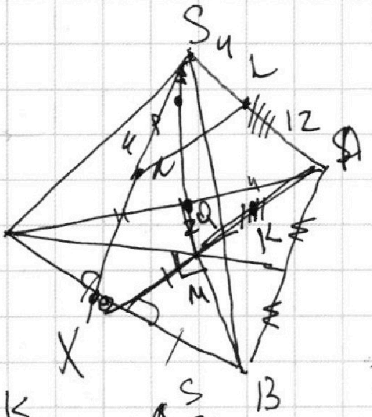
5) Т. касания $(BCS) = N$

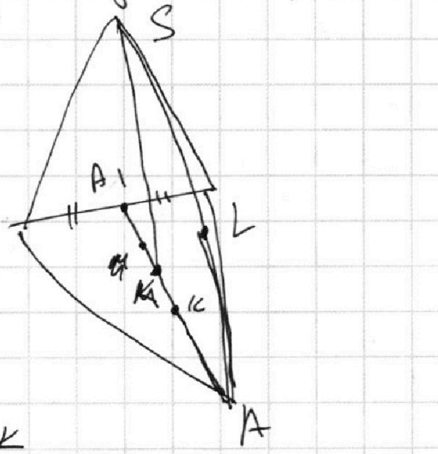
$SN = 4$;

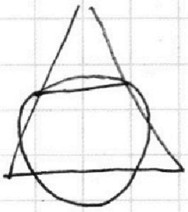
$R_{сф} = 5$;

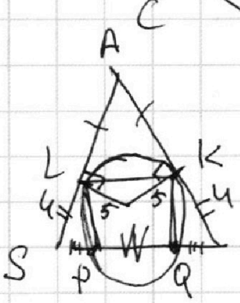
$\angle$ при BC — ?

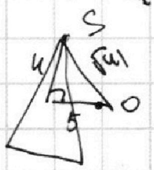
1) Сфера вписана в двугранный угол при ребре BC











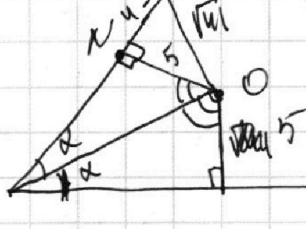
2) $\triangle ALK \sim \triangle SAM$, р/б, $\angle A$ - общ., $\frac{AL}{AS} = \frac{LK}{AM}$

$\Rightarrow LK \parallel SM \Rightarrow$ $\boxed{LPQK \text{ — трапеция р/б}}$

$\boxed{\text{(·) нужно доказать, что } ASX = \text{прям}}$

3) $SN = 4$ - касательная $\Rightarrow SL = 4$ (касательные из одной точки)
$\Rightarrow AK = 4$

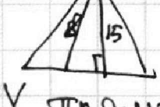
Пусть O - центр сферы. $ON - R$, $\perp SN \Rightarrow \triangle SNO$ - прямоугольн. $ON \perp SN$, по т. Пифагора $SO = \sqrt{41}$
$\Rightarrow$ из пункта (1)
$O \in$ биссекторной плоскости нашего (искомого угла).



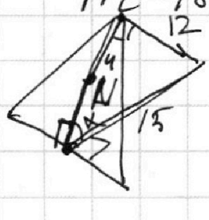
Сфера;

$\leftarrow$ это линейный угол двугранного угла

4) вспоминаем что h к CB равна 15



$m = 18$; (AA)



(·) по допущению $\triangle ASX$ прям-ый

$SN \cap CB = X$, $SX = 9$ (по т. Пиф-ра)

$\sin 2\alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Ответ: $\arcsin \frac{4}{5}$