



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}), bc : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}), ac : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}); (abc)^2 : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52});$$

Стерень входящая тройки в число abc - целое число, не меньшее
30 (в противном случае $(abc)^2$ имеет степенные более чем 58)

т.е. вывод: $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, при этом $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28}$.

Итого, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ (т.к. делится на это число)

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

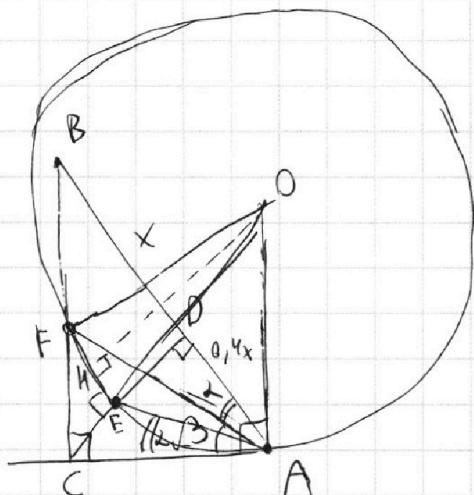
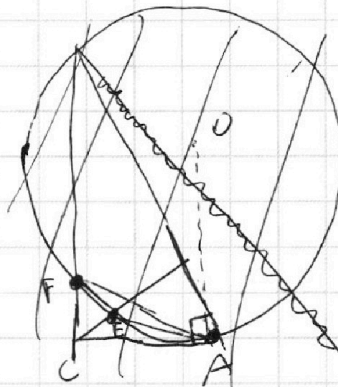
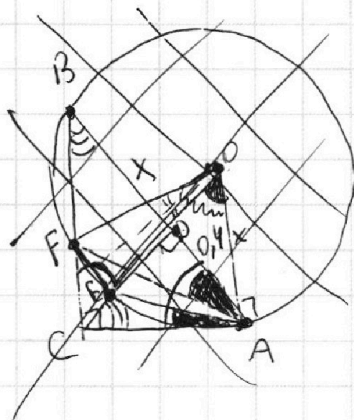
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BD = x, DA = 0,4x$. O - центр окр.



Пусть также $\angle CAE = \alpha, \angle CAF = \beta$
 $\angle FPA = 2\angle FAC; \angle EOA = 2\angle CAE$
 $= 2\beta \qquad = 2\alpha$

Проведем OH - медиану $\triangle BOE$ ^{одноименно}

$\angle FOH = \angle HOE$. При этом $AK \perp CD \perp BA$

$FE \parallel BA (\Rightarrow FE \perp CD), OH \perp FE, \text{ но } OH \parallel CD. \textcircled{1}$

а также $CA \perp OA$ и $CA \perp BC \Rightarrow BC \parallel OA \textcircled{2}$. Из $\textcircled{1}$ и $\textcircled{2}$ следует, что $\angle HOA = \angle BCD$

$\angle BCD = 90 - \angle B = \angle BAC$. Итого $\frac{\angle HOA + \angle AOE}{2} = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \angle AOH = \angle BAC$

то $\angle BAC = \alpha + \beta = \angle FAC + \angle FAB$, а значит $\angle FAB = \alpha$.

По двум углам подобны $\triangle CAE$ и $\triangle BAF$ ($90 - \angle BAC = \angle B = \angle DCA, \alpha = \angle EAC = \angle FAB$)

1. $\frac{AC}{BA} = \frac{BF}{CE}$ $CD = AD \cdot DB; CD = \sqrt{0,4x}$. По м. Пиф.: $AC = \sqrt{(0,4x)^2 + (0,4x)^2} = \sqrt{0,56}x$

$BC = \sqrt{(1,4x)^2 + (0,56x)^2} = \sqrt{2,25}x$; Из 1. $CE = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} BF$; $CF = CE \cdot \frac{BC}{CD}$

$CF = \frac{\sqrt{0,56} BF \cdot \sqrt{1,4}}{0,4} = BF$

$\triangle (FE \sim \triangle AC)$ по 2 углам \Rightarrow медиана

выполняет как $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{0,56x^2}{1,4^2x^2} = \frac{0,28 \cdot 4}{2} = \textcircled{1,6}$ ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \begin{cases} 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k), k \in \mathbb{Z} \\ 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

м.к. \arccos принимает значения от 0 до π .

1) $5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x; 8x = 20\pi k - 4\pi; x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$

Вспомогательное $\arccos t \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 10\pi k - 4\pi \leq 10\pi$

Значит $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2}; 0 \leq 5k \leq 10; k \in \mathbb{Z}; k = 0, 1, 2$

$k=0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; 10 \arccos(\cos \pi) = 9\pi + \pi; 10\pi = 10\pi$ - верно

$k=1 \rightarrow x = 2\pi; 10 \arccos(\cos(-\frac{3\pi}{2})) = 9\pi - 4\pi$ - верно

$k=2 \rightarrow x = \frac{9\pi}{2}; 10 \arccos(\cos(-\frac{5\pi}{2})) = 9\pi - 9\pi$ - верно

2) $5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x; 12x = -20\pi k + 4\pi; x = -\frac{5}{3}\pi k + \frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{5}{3}\pi k + \frac{\pi}{3} \leq \frac{9\pi}{2}; -3\pi \leq -10\pi k + \pi \leq 27\pi; -10 \leq -10k \leq 20; k \in \mathbb{Z}; k = -1, 0, 1, 2$

$k=-2 \rightarrow x = \frac{10}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}; 10 \arccos(\cos \frac{27\pi}{6}) = 9\pi - \frac{27\pi}{3}$ - неверно

$k=-1 \rightarrow x = \frac{17}{6}\pi; 10 \arccos(\cos \frac{14\pi}{6}) = 9\pi - \frac{14\pi}{3}$ - верно

$k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3}; 10 \arccos(\cos \frac{4\pi}{6}) = 9\pi - \frac{4\pi}{3}$ - верно

$k=1 \rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi; 10 \arccos(\cos \frac{8\pi}{6}) = 9\pi + \frac{8\pi}{3}$ - верно

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{27}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

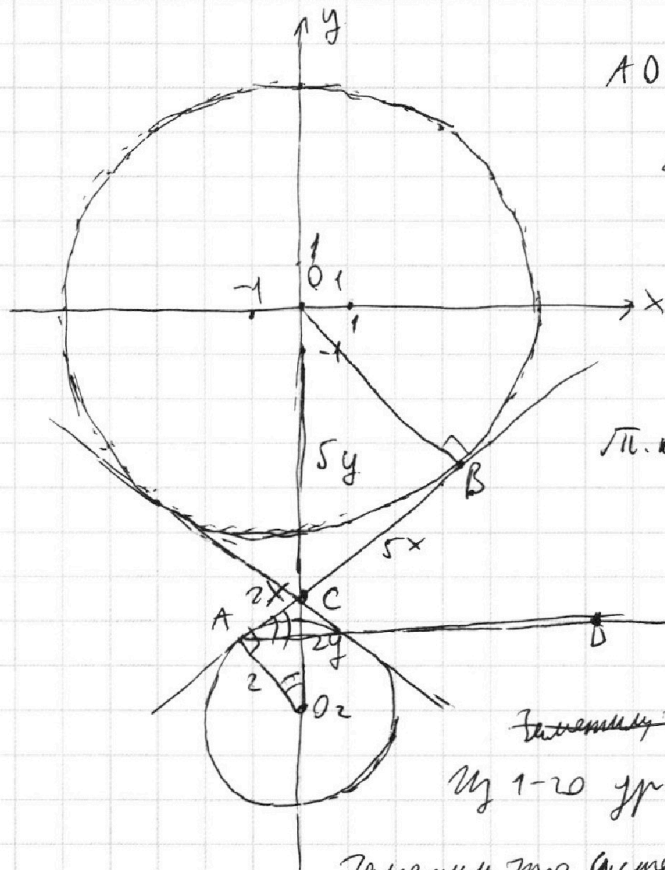
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нарисуйте графики функций: $x^2 + y^2 = 25$
 $x^2 + (y+9)^2 = 4$



$AO_2 \parallel$ параллельно оси Ox .

$\triangle O_1BC \sim \triangle O_2AC$ по $\angle ACO_2 = \angle O_1CB$
 и $\angle O_2AC = \angle O_1BC$

$AO_2 = 5$
 $\frac{1}{2}$; $O_1B = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$

Пусть $CO_2 = 2y$, $O_1C = 5y$,
 $AC = 2x$, $CB = 5x$.

П.к. $5y + 2y = 9$, $y = \frac{9}{7}$ по по м. Лип:

$(2x)^2 = \left(\frac{9}{7} \cdot 2\right)^2 - 2^2$;

$x^2 = \frac{49}{49} - 1$; $x = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\angle BAD = \angle O_2AC = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$

Запишем то же уравнение

из 1-го уравн: $y = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

Запишем, что система имеет решение в точке пересечения

сечения прямой и окружности, при этом \angle может достигаться только в случае когда касательная принадлежит промежуткам $(-\infty; \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9})$
 $\cup (\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}; +\infty)$

т.к. в зависимости от b можно подобрать нужную прямую; при

$k \in [\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}; \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}]$ ^{перес.} \rightarrow не более двух.

1) $-\frac{5}{6a} < -\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}$; левая часть $< 0 \Rightarrow -\frac{5}{6a} < 0$; $a > 0$

возможна тогда: $\frac{5}{\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}} > 6a$; $\frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}} > a > 0$

2) $-\frac{5}{6a} > \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9} > 0$; $6a < 0$; $a < 0$.

$-\frac{5}{\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}} < 6a$; $-\frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}} < a < 0$

3) $a = 0$; $5x - b = 0$ - не более 1 перес.

Ответ: $(-\frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}}; 0)$
 $\cup (0; \frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заменим, $t = \log_{11} x$ и $n = \log_{11} 0,5y$

$t^5 - \frac{16}{3t} + 5 = 0; t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

и $n^5 + \frac{16}{3n} + 5 = 0; n^5 + 5n + \frac{16}{3} = 0$

тогда при t, n $n^5 + 5n = -(t^5 + 5t)$

$$n^5 + t^5 + 5(n+t) = 0.$$

$$n+t = \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = \log_{11} xy \cdot 0,5 = \log_{11} \frac{1}{2} + \log_{11} xy;$$

$$xy = 11$$



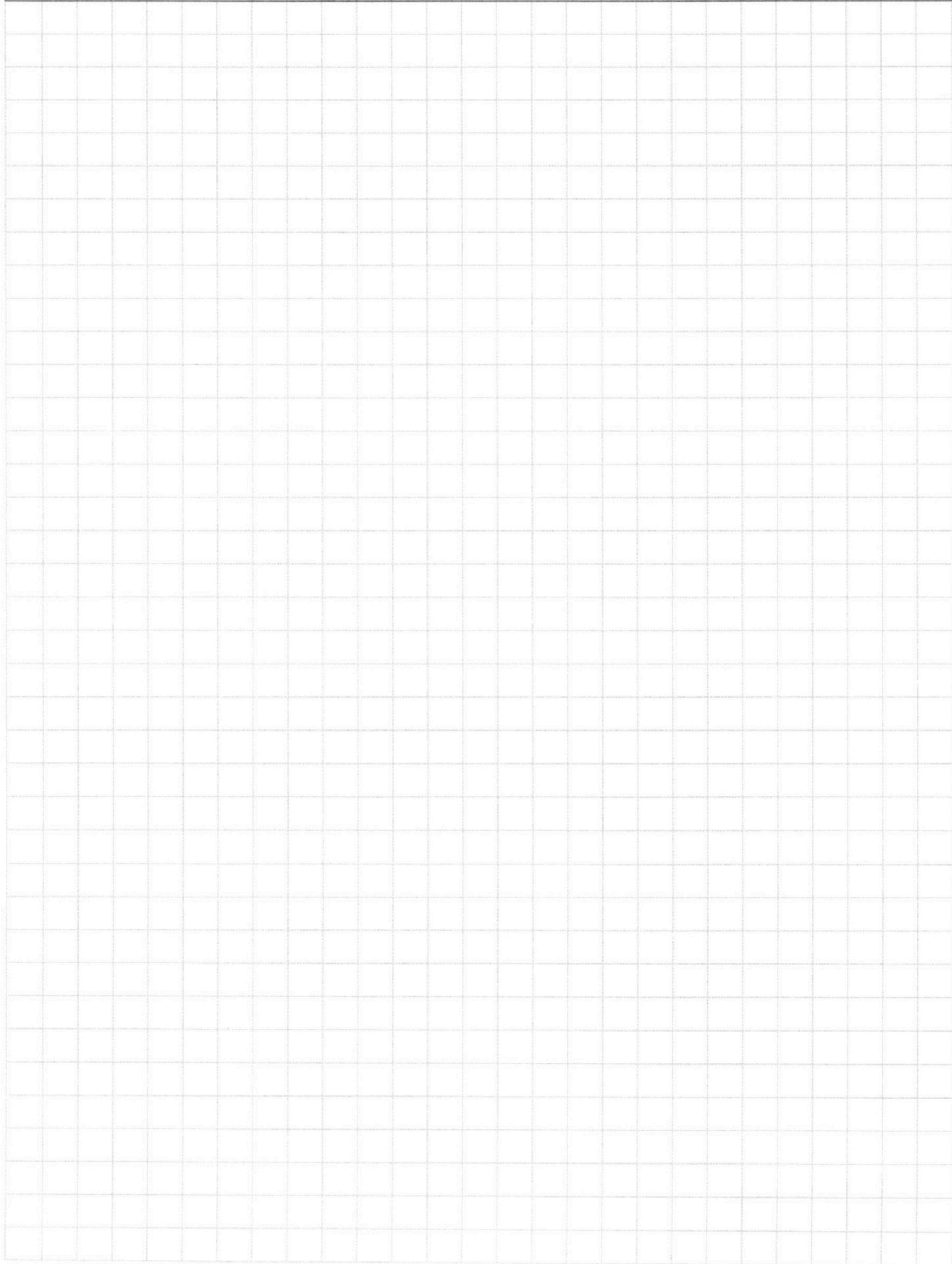
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



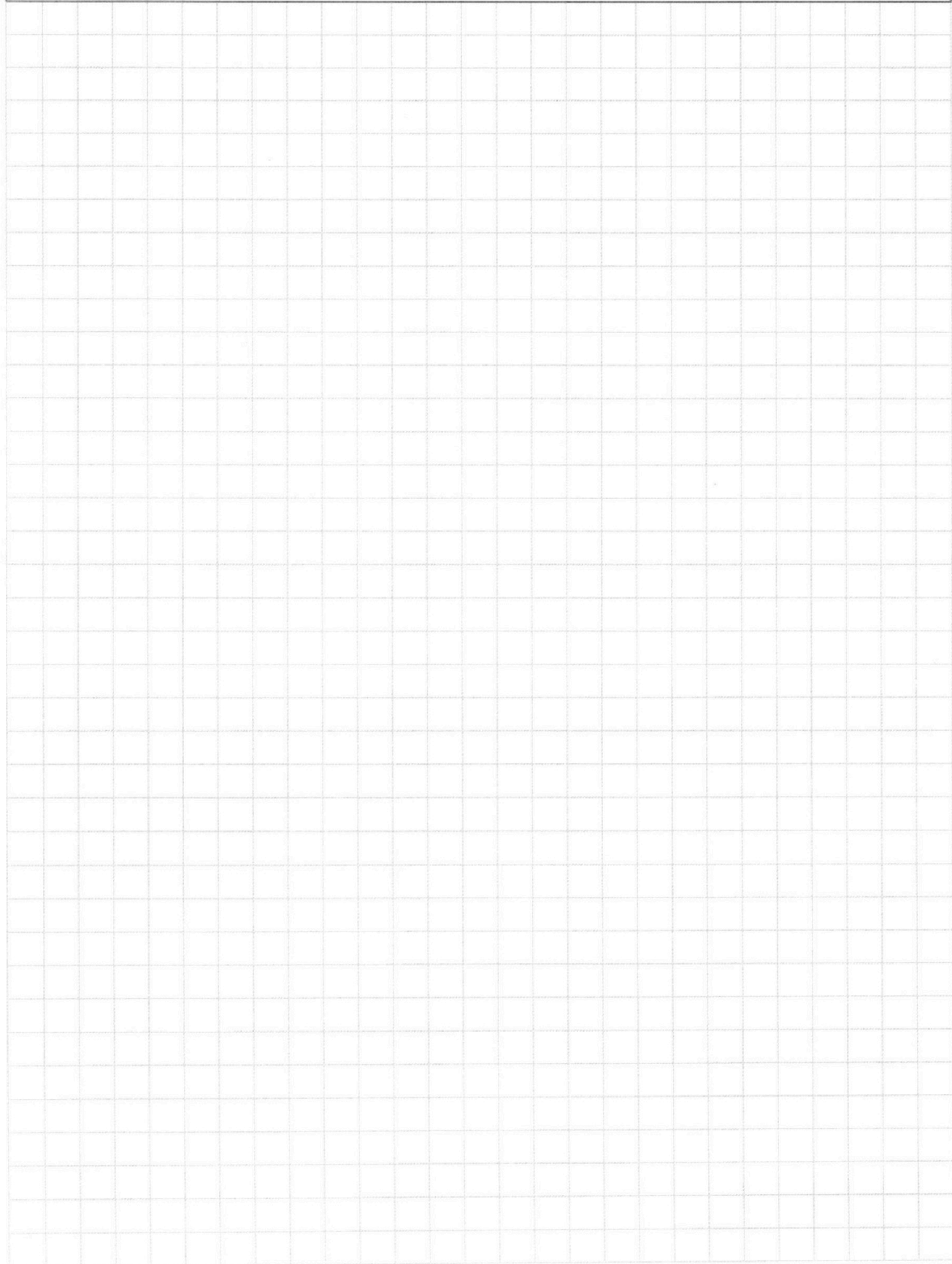
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



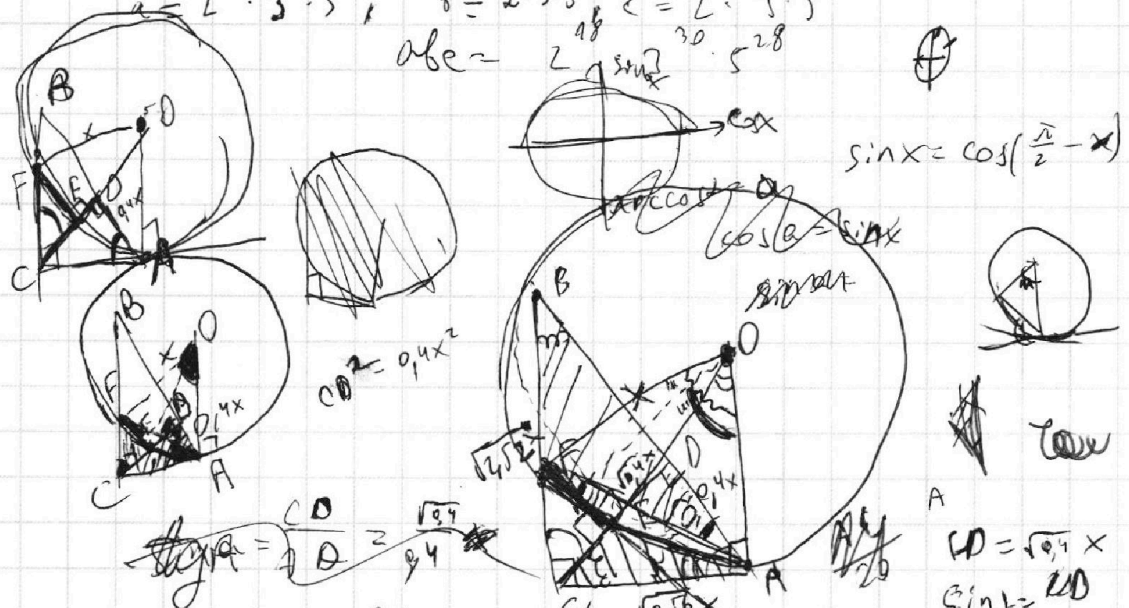
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик. $ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$, $ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{22}$
 $(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$; см. $bc \cdot 3^8 (abc)$ - умнож, $b(abc)^2 \cdot \sin \alpha$

а значит $(abc)^2 : 3^{60}$; $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, $ab : 5^{28}$ \rightarrow $ab : 5^{28} \cdot k$
 $abc : 5^{28}$

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{20}$; $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$
 $abc = 2^{28} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$



$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{94}}{94}$

$CD = \sqrt{94} \cdot x$
 $\sin \alpha = \frac{CD}{AD}$

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$
 $\tan 2x = \frac{1}{\cos 2x}$; $\cot 2A = 1 + \frac{94}{94} = 1 + \frac{1}{\sin 2A}$
 $AC^2 = (0,4 + 9(16)x^2)$; $AC = \sqrt{956}x$

$\frac{BF}{FC} = \frac{DE}{EC}$
 $1,96 + 9,56 = 2,52$

$\frac{BF}{FC} = \frac{AD}{CE} = \frac{BF}{CE}$

$\frac{2,52}{9,4} = \frac{6,3}{9,4}$
 $\frac{\sqrt{94}}{9,4} = \frac{6,3}{9,4}$
 $CF = CE \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{1,4}{\sqrt{9,56}} \cdot BF \cdot \frac{\sqrt{352}}{9,4}$
 $CF = \frac{4,2}{\sqrt{9,8}} \cdot BF$

(F)

$CF = \frac{21}{4,9} \cdot \sqrt{9,8} \cdot BF = 1,5\sqrt{2,8} \cdot BF$