



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}), bc : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}), ac : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}) \Rightarrow \\ \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}); (abc)^2 : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52});$$

Степень входящих членов в чиле abc - целое число, не меньшее

30 (в противном случае $(abc)^2$ имеет степень более чем 58)

н.е. будем: $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, при этом $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28}$.

Итог, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ (н.к делится на это чило)

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}; b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0; c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

$$\underline{abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

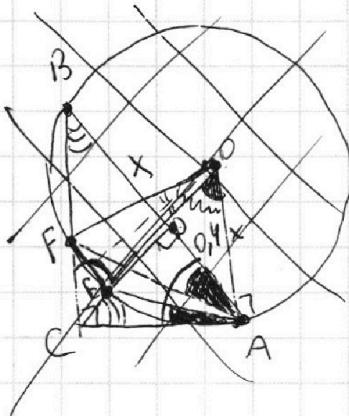
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

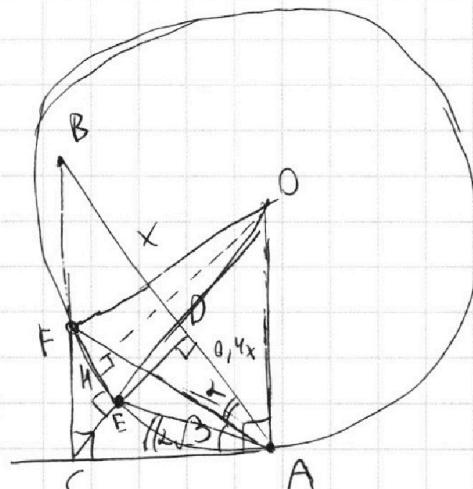
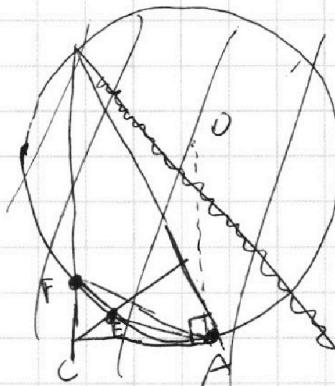


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BD = x$, $DA = 0.4x$. O -центр окр.

4



Пусть также $\angle CAE = \alpha$, $\angle CAF = \beta$

$$\angle FPA = 2\angle FAC; \angle EOA = 2\angle CAE = 2\beta = 2\alpha$$

Проведем OH - медиана ^{диаметр} и биссектриса $\angle OFE$

$\angle FOH = \angle HOE$. При этом $OH \perp CD \perp BA$,

$FE \parallel BA (\Rightarrow FE \perp CD), OH \perp FE$, но $OH \parallel CD$. ①

а также $CA \perp OA$ и $CA \perp BC \Rightarrow RC \parallel OA$ ② ② . Из ① и ② следит, что $\angle HOA = \angle BCD$

$\angle BCD = 90 - \angle B = \angle BAC$. $\text{Т.к. } \angle HOA + \angle AOE = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \angle AOB = \angle BAC$

но $\angle BAC = \alpha + \beta = \angle FAC + \angle FAB$, а значит $\angle FAB = \alpha$.

Но для этого надо доказать $\angle AEF = \angle BAF$ ($90 - \angle BAC = \angle B = \angle DCA$, $\angle = \angle EAC = \angle FAB$)

1. $\frac{AC}{BA} = \frac{BF}{CE}$ $\angle CD = AD \cdot DB; CD = \sqrt{0.4x}$. $\text{По м. Thg.: } AC = \sqrt{(0.4x)^2 + (\sqrt{0.4x})^2} = \sqrt{0.56}x$

$BC = \sqrt{(0.4x)^2 + (\sqrt{0.56}x)^2} = \sqrt{0.56}x \sqrt{1.4x};$ Из 1. $CE = \frac{\sqrt{0.56}}{1.4} BF; CF = CE \cdot \frac{BC}{CD}$

$CF = \frac{\sqrt{0.56}}{1.4} BF \cdot \frac{\sqrt{1.4}}{\sqrt{0.4}} = BF$ $\angle (FE \sim \triangle ACD) \text{ по 2-ому критерии} \Rightarrow \text{мы доказали}$

что $\left(\frac{AC}{CP}\right)^2 = \frac{0.56x^2}{1 \cdot 1.4x^2} = \frac{0.56}{2} = 0.28 = 0.16$ Ответ: 16.

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \begin{cases} 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z} \\ 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10\left(-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

в зависимости от $\frac{\pi}{2} - x$
арккос принимает значения от 0 до π .

$$1) 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x; 8x = 20\pi k + 4\pi; x = \frac{5}{2}\pi k + \frac{\pi}{2}$$

Значит, что $\arccos \leq [0, \pi] \Rightarrow 10\pi k + 9\pi - 2x \geq 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$\text{тогда } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi k + \frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2}; 0 \leq \frac{5k}{2} \leq 4; k \in \mathbb{Z}, k=0, 1, 2$$

$$k=0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, 10 \arccos(\cos \sqrt{\pi}) = 9\sqrt{\pi} + \pi; 10 \arccos(\cos \sqrt{\pi}) = 9\sqrt{\pi} + \pi - \text{верно}$$

$$k=1 \rightarrow x = 2\pi, 10 \arccos(\cos(-\frac{15}{2}\pi)) = 9\pi - 4\pi = 5\pi - \text{верно}$$

$$k=2 \rightarrow x = \frac{9\pi}{2}, 10 \arccos(\cos(-\frac{85}{2}\pi)) = 9\pi - 9\pi = 0 - \text{верно}$$

$$2) 5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x; 12x = -20\pi k + 14\pi; x = -\frac{5}{3}\pi k + \frac{7}{6}\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{5}{3}\pi k + \frac{7}{6}\pi \leq \frac{9\pi}{2}; -3\pi \leq -10\pi k + 7\pi \leq 27\pi; -10 \leq -10k \leq 20, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1, 0, 1, -2.$$

$$k = -2 \rightarrow x = \frac{10}{3}\pi + \frac{7}{6}\pi = \frac{27}{6}\pi; 10 \arccos(\cos \frac{27}{6}\pi) = 9\pi - \frac{27}{6}\pi - \text{неверно}$$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{17}{6}\pi; 10 \arccos(\cos \frac{17}{6}\pi) = 9\pi - \frac{17}{6}\pi - \text{верно}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{7}{6}\pi; 10 \arccos(\cos \frac{7}{6}\pi) = 9\pi - \frac{7}{6}\pi - \text{верно}$$

$$k = 1 \rightarrow x = -\frac{3}{6}\pi; 10 \arccos(\cos(-\frac{3}{6}\pi)) = 9\pi + \frac{3\pi}{2} - \text{верно}$$

~~какое значение~~

Ответ: ~~10π~~ $-\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{27}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

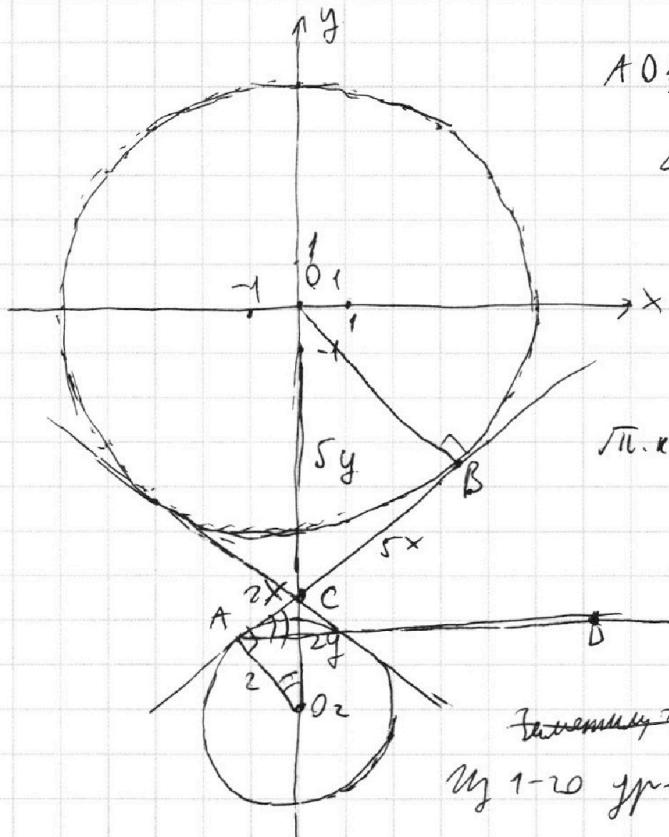


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдите уравнение румбов: $x^2 + y^2 = 25$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$



AO \neq лежит на оси Ox.

$$\triangle O_1BC \sim \triangle O_2AC \Rightarrow \angle ACO_2 = \angle O_1CB$$

$$4 \angle O_2AC = \angle ABC$$

$$AO_2 = 2x; O_1B = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

Лучше CO_2 = 2y, O_1C = 5y,
AC = 2x, CB = zx.

$$\text{П.к. } 5y + 2y = 9, y \geq \frac{9}{7} \text{ но на М. тип:}$$

$$(2x)^2 = \left(\frac{9}{7} \cdot 2\right)^2 - 2^2;$$

$$x^2 = \frac{81}{49} - 1; x = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\angle BAD = \angle O_2AC = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$$

Задача решена

$$\text{У 1-го ур-ия: } y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Задача решена и имеет решение в виде линейного

секущих прямой в однозначном, при этом $2x$ или $2y$ достигаются только в
одной из которых лежат приведенные прямые $(-\infty; \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9})$
 $\cup (\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}; +\infty)$

п.к. б) зависящими от б можно подобрать нужную прямую; при

$k \in [\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}; +\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}]$ таких может не быть двух.

$$1) -\frac{5}{6a} < -\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}; \text{ правое неравенство } \Leftrightarrow -\frac{5}{6a} < 0; a > 0$$

$$\text{последнее неравенство: } \frac{5}{\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}} > 6a; \frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}} > a > 0$$

$$2) -\frac{5}{6a} > \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9} \Leftrightarrow 0; 6a < 0; a < 0.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}}, 0\right)$$

$$3) a = 0; 5x - b = 0 - \text{не более 1 реш.}$$

$$V\left(0, \frac{5}{6 \arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Заменим } t = \log_{11} x \text{ и } n = \log_{11} 0,5y$$

$$\text{Найдем 2 ур-ия: } t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0; t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$
$$\text{и } n^4 + \frac{16}{3n} + 5 = 0; n^5 + 5n + \frac{16}{3} = 0.$$

тогда для нахождения t^{4n} удобно неравн., $n^5 + 5n = -(t^5 + 5t)$

$$n^5 + t^5 + 5(n+t) = 0.$$

$$n+t = \log_{11} X + \log_{11} 0,5y = \log_{11} XY \cdot 0,5 = \log_{11} \frac{1}{2} + \log_{11} XY;$$
$$XY = 11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\text{Ansatz: } \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\text{解集 } -5\pi \leq y \sqrt{t} - 2x \leq 5\pi \quad -\pi t \leq x \leq -2\pi$$

$$-10 \leq -10k \leq 10$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7,75 \leq k \leq 9,5$$

$$-15,5 \leq -2k \leq -10,5$$

f, 6

$$x = 9\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi k = \pi(8.5 - 2k) \in [7\pi, 2\pi]$$

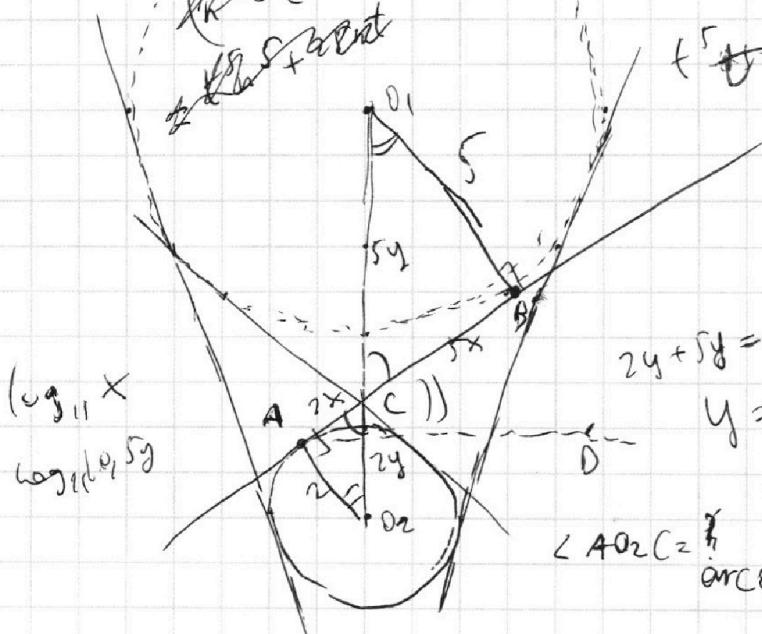
$$\left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x + 5 \right) + 10 \left(\frac{\pi}{2} + x + 2\sqrt{k} \right) = 9\pi - 2x$$

$k = 6, 7$

$$\cancel{t_{6x}} y = \frac{-5}{6a} x + \frac{6}{6a}$$

$$y = (x+9)^2 + (y+3)^2$$

$$(2y)^2 = (2x)^2 + 2^2$$



$$2y + 5y = 9$$

261 181

$$\left(\frac{9}{7}\right)^2 = x^2 + 1$$

$$\angle AOD = \arcsin \left(\frac{4\sqrt{2}}{9} \right) = \angle BAO = \text{deg}$$

$$\text{解} \quad t^4 - \frac{6}{t^4} = \frac{2}{3t} - 5; \quad n^4 + \frac{1}{n^4} = \frac{-13}{3n} - 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0.$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

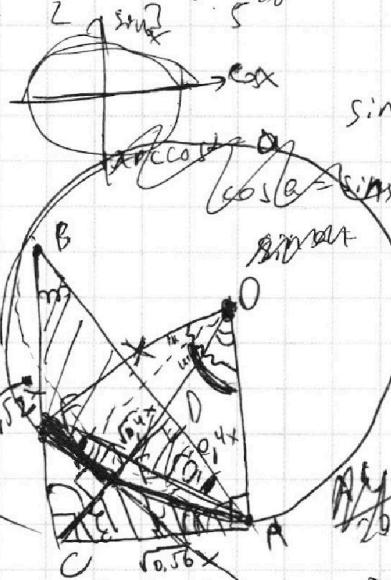
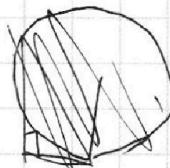
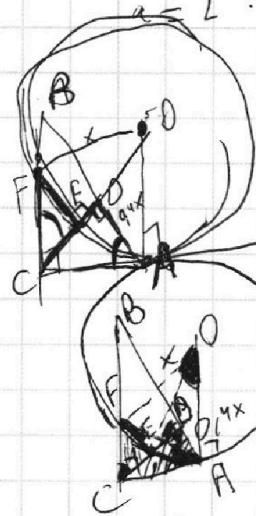
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик. №1 $abc \approx 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$, $bcd \approx 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$, $acd \approx 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{23}$
 $(abc)^2 \approx 2^{12} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$; см. бк. 38 (abc) - учим, $b(bcd)^2$ - учим.

а дальше $(bcd)^2 \approx 3^{60}$; $abc \approx 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, $ab \approx 5^{28} \Rightarrow abc \approx 5^{28}$

$a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^1 \cdot 3^6 \cdot 5^{15}$
 $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$



$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$



также

$$CD = \sqrt{0,1} x$$

$$\sin x = CD$$

1,16

$$AT \cdot \tan 32^\circ = \frac{1}{0,1x}; \quad AT^2 = 1 + \frac{1}{0,4^2} = 1 + \frac{1}{0,16} = 1,0625$$

$$AC^2 = (0,4 + 0,6)x^2; \quad AC = \sqrt{0,56}x$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{DE}{EC}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{1,14}{0,56}$$

$$1,14 + 0,56 =$$

$$2,52$$

$$\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{BF} = \frac{CE}{BF}$$

$$CE = \frac{1,14}{0,56} BF, \quad \frac{1}{c}$$

$$(F = CE \cdot \frac{BC}{CD}) = \frac{1,14}{0,56} (BF) \cdot \frac{\sqrt{0,56}}{0,4}$$

$$\frac{BF \cdot \frac{1,14}{0,56}}{0,4} = 6,3 \cdot 0,56 = 0,72 \cdot 0,8$$

$$CF = \frac{4,2}{0,8} \cdot BF$$

$$CF = \frac{21}{6,4} \cdot \sqrt{0,8} BF = 1,6\sqrt{0,8} BF$$

(F)