



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \quad \Rightarrow \quad a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \cdot 5^{14+18+19}$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad \cdot \quad 5^{14+18+19} = 5^{51}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad = \quad 2^{39} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$c = 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}; \quad a = 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^{11}; \quad b = 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{12}; \quad 6$$

Т.к. ab, a, b, c - катеты треугольника, то ab делится на квадрат любого из чисел a, b, c .

Рассмотрим каждую из чисел a, b, c отдельно (очевидно, что число ab делится на $2, 3, 5$ и т.д. и наоборот).

$$2 : (a \cdot b \cdot c)^2 : 2^{39} \Rightarrow \text{предположим, что есть такая } a, b, c, \text{ что}$$

$abc : 2^{12}$, покажем, что это невозможно.

$$a = 2^4 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}; \quad b = 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{12}; \quad c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^{12}$$

ум. задачи все.

$$3 : (abc)^2 : 3^{43} \text{ из указанного выше} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 3^{44}, \text{ покажем, что такая сст.}$$

$$\text{возможна } abc : 3^{22}. \quad abc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14+18+19}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{11}; \quad b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{12}; \quad c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$$

ум. выполняется

$$5 : \text{замечим, что } ab \cdot bc : 5^{14} \cdot 5^{18} = 5^{32} \quad \Rightarrow$$

$$\text{но в то же время } a \cdot c : 5^{43}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 5^{86} \text{ точно} \Rightarrow abc : 5^{43}, \text{ докажем}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Что закая ишугуция возмощко
ишисер:

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

ишовишка

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$$

$$ca = 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array}$$

максиме образам
авс = 2²²

минимално возмощко
авс = 2¹⁷ · 3²² · 5⁴³

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

P.S. Кажденное значение авс
наименьшим, потому что они удовлетво-
ряют минимальной ишовишке. Деления,
меньше в трошо невозможно. для данного условия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

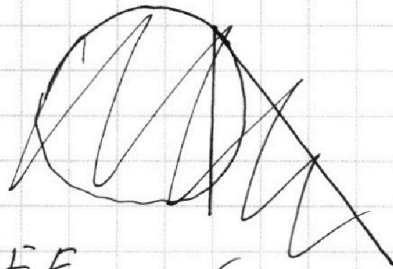
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\sqrt{2}$~~



$$CO^2 = (3x \cdot 10x)$$

$$CO = \sqrt{30x}$$

$\triangle CEF \sim \triangle CAB$

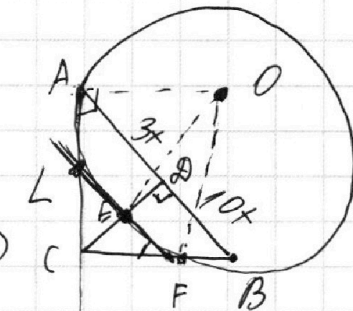
$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

Пусть $BD = 10x$
 $AB = 13x \Rightarrow AD = 3x$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot AD}{\frac{1}{2} CE \cdot EF}$$

$$= \frac{3x \cdot 30x^2}{CE^2 \cdot 10x} = \frac{9x^2}{CE^2}$$



$$CO = \frac{3x \cdot CD \cdot CD}{CE \cdot \frac{EF \cdot DB}{CO}}$$

$$CO = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{30x}$$

Пусть $\angle CAF = \angle$, тогда $\angle FAO = 90^\circ - \angle$

$\angle CFA = 2\angle = \angle AOF$

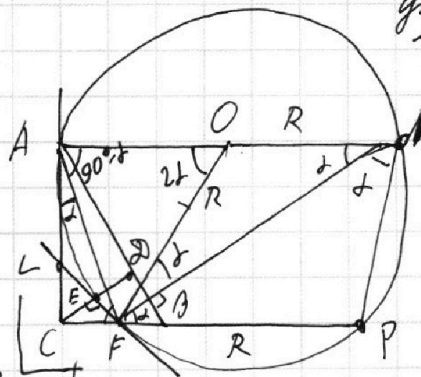
$\angle AOF = \angle$

$\triangle AFH$ - углы $\angle F$ - $\angle AFH = 90^\circ$ - $\angle F$ - $\angle AFH = 90^\circ$

$\angle OFH = \angle = \angle HFP$
 $OH \parallel FP$ ($AO \perp CP$) \Rightarrow

$OH \parallel FP$
 $\Rightarrow OF \parallel HP$
 $OF = OH = R$

$\Rightarrow OFHP$ - параллелограмм $\Rightarrow HP = R$
 $AFPH$ - вписанный четырехугольник $\Rightarrow AF = HP = R$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle AFO: AF = AO = FO = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ - \alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle CAF: CF = AC : \sqrt{3} \\ AC = \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39x} \end{aligned} \Rightarrow CF = \sqrt{13x} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle CAF: CF = AC : \sqrt{3} \\ AC = \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39x} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$
$$CB = \sqrt{10x \cdot 13x} = \sqrt{130x}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{13x}}{\sqrt{130x}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ACB \text{ (т.к. } AB \parallel CF) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\& \text{ т.к. } CF \perp CD \text{ т.к. } CF \parallel AB.$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{30x} \cdot 3x$$

$$\& \text{ т.к. } S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DB.$$

$$\& \triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = k = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{S_{ACD}}{k^2 \cdot S_{CDB}} =$$

$$= \frac{AD}{k^2 \cdot DB} = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot 10} = 3$$

Ответ: 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$.

$$5 \arccos(\sin 4x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\arccos(\sin 4x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$$

$$\sin 4x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right).$$

$$\sin 4x = \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$4x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad | \cdot 5.$$

$$4x = \pi - \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad | \cdot 5$$

$$5x - x = \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n.$$

$$5x - x = -\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 5\pi + 10\pi n.$$

$$4x = -\pi + 10\pi n.$$

$$6x = -4\pi + 5\pi + 10\pi n, \quad 6x = \pi + 10\pi n.$$

1. К. $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}n \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}.$$

$$-3 \leq \frac{1}{2} + 5n \leq 7$$

$$-3,5 \leq 5n \leq 6,5 \Rightarrow n = -3; -2; -1; 0; \dots; 6.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi k}{3} \leq \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow -4,5 \leq k \leq 10,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; \dots; 9; 10.$$

ODS.

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}.$$

\cup
 $\sin 4x$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$X = +\frac{\pi}{6} + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pi + 2,5\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ИД Т.К. $-\frac{3\pi}{2} \leq X \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ИД.}$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2,5\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5\pi}$$

$$-\frac{3}{5} \leq -\frac{1}{10} + n \leq \frac{7}{5}$$

$$-0,6 \leq -0,1 + n \leq 1,4 \Rightarrow n = 0; 1.$$

$$X = -\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$$

$$\text{ИД} -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2,5\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5\pi}$$

$$-0,6 \leq \frac{2}{5} + k \leq 1,4$$

$$-1 \leq k \leq 1 \Rightarrow X = -\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} X = \pi + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ X = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{ИД Т.К. } X \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

ИД. ① $-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + 2,5\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$

$$-0,6 \leq 0,4 + n \leq 1,4$$

$$-1 \leq n \leq 1 \Rightarrow n = 0; \pm 1 \Rightarrow X = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}$$

② $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$

$$-3,6 \leq 1 + 2,5k \leq 7,3 \quad \rightarrow k = -1; 0; 1 \Rightarrow$$

$$X = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$-9 \leq 1 + 10k \leq 21$$

$$X = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{2\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Иском. видное 59 ур-ние; оно равносильно совокупности 59 ур.

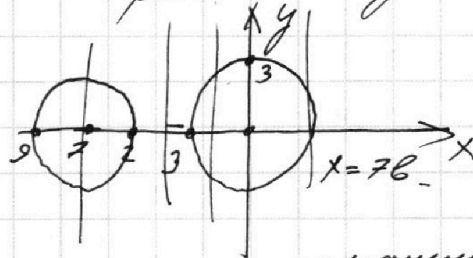
$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & \text{— окружность с центром } (-7; 0) \text{ и } R_1 = 2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & \text{— окружность с центром } (0; 0) \text{ и } R_2 = 3. \end{cases}$$

$x + 3ay - 7b = 0$ — уравнение прямой

Если $a = 0$, то $x = 7b$ — верт. прямая.

Очевидно, что решение есть 2 (или 1 или 0) точек



Если $a \neq 0$, то

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

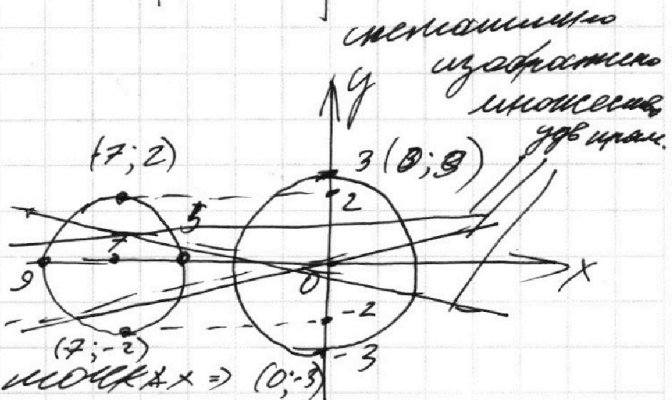
прямая, тогда

ур-ние имеет

4 реш, нужно, чтобы

прямая пересекала каждую окр в двух точках \Rightarrow

\Rightarrow она должна быть между крайними точками окр., т.е. должна содержать



методом изобразить множество ур-н

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} -2 < y(-7) < 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

$$\begin{cases} -2 < \frac{7}{3a} + \frac{7b}{3a} < 2 \\ -3 < \frac{7b}{3a} < 3 \end{cases}$$

нравится
вместо арифметической
проверки можно
использовать

① Если $a > 0$

$$\begin{cases} -6a < 7 + 7b < 6a \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 7 < 7b < 6a - 7 \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

в существуют
всех.

$$\begin{cases} -9a < 6a - 7 \\ -6a - 7 < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a > 7 \\ 15a > -7 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{7}{15} > 0 \Rightarrow a > \frac{7}{15}$$

② Если $a < 0$.

$$\begin{cases} 6a < 7b + 7 < -6a \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a < 7b < 6a + 7 \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

в существуют
всех.

$$\begin{cases} 6a - 7 < 7b < -6a - 7 \\ 9a < 7b < -9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 7 < -9a \\ 9a < -6a - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a < 7 \\ 15a < -7 \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{7}{15} < 0$$

$$\text{Итого } a \in (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7^5 6x = \log_7 36x^2 - 343 - 4. \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7 y^2 - 7^5 - 4. \end{cases}$$

Ка ODS:

Пусть $\log_7 6x = t$, а $\log_7 y = u$, тогда $t \neq 0, u \neq 0$. (каждому x можно подобрать y и наоборот, или наоборот с u)

$$\begin{cases} t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \cdot t & t \neq 0 \\ u^4 + 6 \cdot \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{u} - 4 \cdot u & u \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - 3,5t + 4t = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases} \quad \text{Положим } y = f(a) = a^5 + 4a$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - 3,5 = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} f'(a) &= 5a^4 + 4 \\ f'(a) &= 0 \\ 5a^4 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Ф-ция монотонно возрастает. на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ф-ция $f'(a) = 5a^4 + 4 > 0$

$t^5 + 4t - 3,5 = 0$ и $u^5 + 4u + 3,5 = 0$ имеют ровно три корня, от т.к. в левых частях \log_7 в ф-ции монотонно возрастает \Rightarrow существуют

по крайней мере одна пара действ. x и y .
Заметим, что $\forall t \in \mathbb{R}$ для ф-ции f и g

$$g(t) = t^5 + 4t - 3,5 \text{ и } f(u) = u^5 + 4u + 3,5$$

$$g(t) = 0 \text{ и } f(u) = 0 \text{ равносильны}$$

$$-t^5 - 4t - 3,5 = 0 \Leftrightarrow t^5 + 4t + 3,5 = 0 = f(t) \Rightarrow$$

\Rightarrow что корни как-то уравнения по модулю равны и

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и $\log_7 6x = -\log_7 y$, и это единственное решение.

т.е. $\log_7 6x + \log_7 y = 0$ ~~ка~~

~~ка~~ $\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1$, т.е. $xy = \frac{1}{6}$.

и это единственное возможное значение xy (в других случаях оно не целое).

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

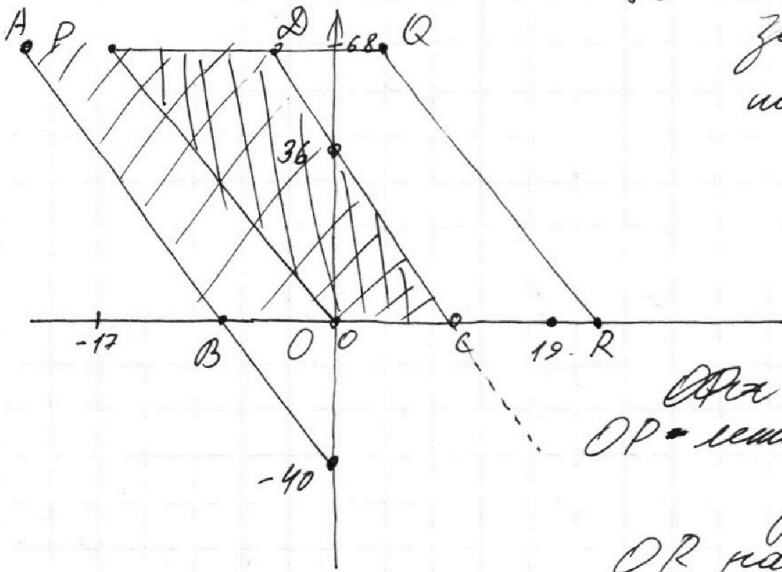
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√6



зафиксируем $A(x_1; y_1)$
 тогда $4x_2 + y_2 = 4x_1 + y_1$
 $y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$
 прямая, явл.
 множеством
 точек B.

Для OR
 OR - линия на прямой

$y = -4x$

OR на $y = -4x + 76$

PQ на $y = 68$

OR на $y = 0$.

Заметим, что

$y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$

и $y = -4x + 76$. и $y = -4x$ наклонены под одним углом, а т.к. B лежит внутри кар-ми, то необходимо выписать условие:

$0 \leq 40 + 4x_1 + y_1 \leq 76$

$-40 \leq 4x_1 + y_1 \leq 36$, т.е. $\begin{cases} y_1 \leq 36 - 4x_1 \\ y_1 \geq -40 - 4x_1 \end{cases}$

Каждая прямая пройдет через кар-ми прямой всегда $y = -4x + c$, где $c \in \mathbb{Z}$ лежит. $\frac{68}{4} + 1 \neq 17 + 1 = 18$ точек, однако,

мы рассуждая, скажем точка A задает точку множества B, и наоборот. (хотя т.к. $A(y_1; x_1) \in$, $y_1 \in [0; 68]$ и т.д.)

и тогда $A(36 - 4x_1) \Rightarrow x_1 \in [0; 18]$

P.S. $A \equiv B$ (в условии еще что это можно не сказать).



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AB = 2 - 40x_1 = 4x_1$

$108 \geq x_1$, но мы ограничиваем, что $x_1 \in [0; 68]$

$$\begin{cases} 4x_1 \leq 108 \\ x_1 \leq 68 \end{cases}$$

система линейных неравенств

$$\begin{cases} y_1 \leq 36 - 4x_1 \\ y_1 \leq 40 - 4x_1 \\ y_1 \in [0; 68] \end{cases}$$

удов. задающим такие x_1 и y_1 , что множество B многоугольник $OPQR$

задан внутри так же как множество A (назовем его $ABCD$) - замкнутое множество

- замкнутое множество $OPQR$, но точки должны удовлетв. двум условиям, внутренн. пар. линия $PD \subset O$ (внутри учитывая и точки на границах в том числе).
двойная вычитовка.

DC - лежит на прямой $y = 36 - 4x$.

$D: 68 = 36 - 4x \quad x = -8$
 $D(-8; 68)$

$C: 0 = 36 - 4x \quad x = 9$

$D(-8; 68), C(9; 0)$
внутри этой области: $108 \cdot 18 = 18^2$ точек A каждая из которых

Задан множеством 18 точек $B \Rightarrow$
 \Rightarrow всего пар. $(A; B) = 18^2 \cdot 18 = 324 \cdot 18 = 6832$

Ответ: 6832 пар



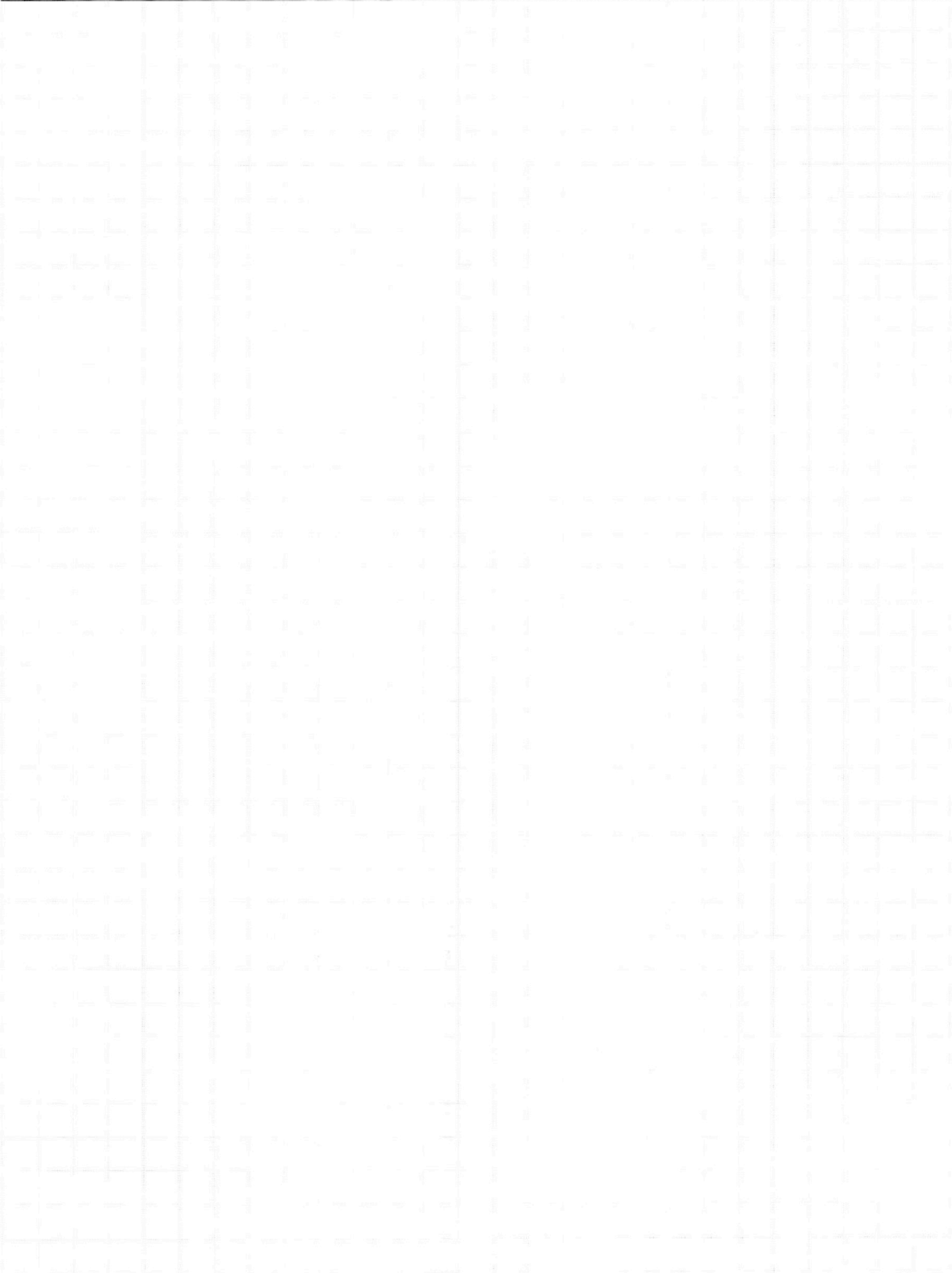
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 + 14x + 49) - 49 + y^2 + 45 = 0 \end{cases}$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$8 + 10 = 18$$

$\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ 144 \\ \hline 324 \end{array}$$

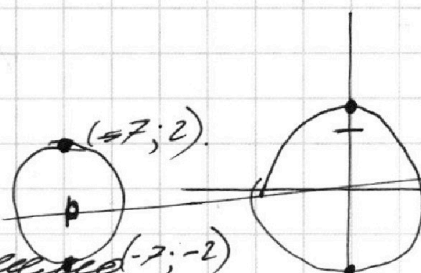
$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

если $a=0$.

то $x=7b$.

Чрез точку невозможна
Верхняя часть



Иногда упр. система

3 реал. прямая должна

решать.

$$\begin{cases} -2 < y(-7) < 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases}$$

$$0,4 \cdot 8 = 6,8$$

$$\frac{7}{4} + 1 = \frac{8}{4} + 1$$

$$\log_7(6x) = t$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$u^4 + 6 \cdot \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{u} - 4$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - 3,5 = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases}$$

$$5t^4 + 4 = 0$$

$$t^4 = -\frac{4}{5} \phi$$

$$4x = \frac{1}{6}$$

$$\log_7(6y) = 0$$

$$\log_7 y = t$$

$$-t = u$$

$$\log_7 y = -\log_7 6x$$

$$6yx = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Шерковец

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \quad \sqrt{1} \quad a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

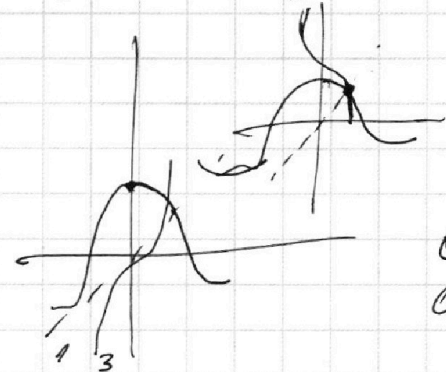
$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

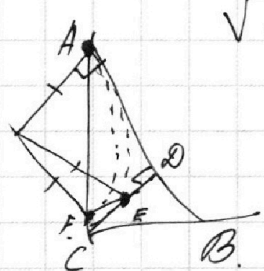
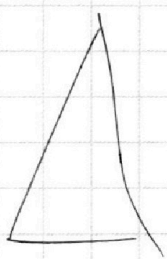
$$\begin{array}{r}
 24 \\
 + 11 \\
 + 17 \\
 \hline
 43
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 14 \\
 + 18 \\
 + 32 \\
 + 43 \\
 \hline
 75
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 26 \\
 + 12 \\
 \hline
 38
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 c &= 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{44} \\
 b &= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \\
 a &= 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 43 - 24 \\
 19 \\
 + 14 \\
 \hline
 33
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 324 \\
 + 18 \\
 \hline
 92
 \end{array}$$



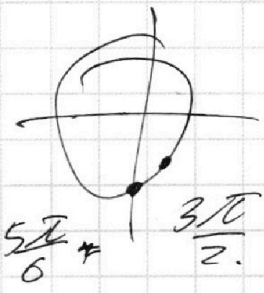
$$\sqrt{2} \cdot \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 12.79}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{3} \cdot \text{sarccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

3A AX 124

$$\cos(\text{sarccos}(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

(sin x = sin x)



$$\text{arcsin}(\sin x) = x + 2\pi k$$

$$\cos \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases}
 x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\
 x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k
 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

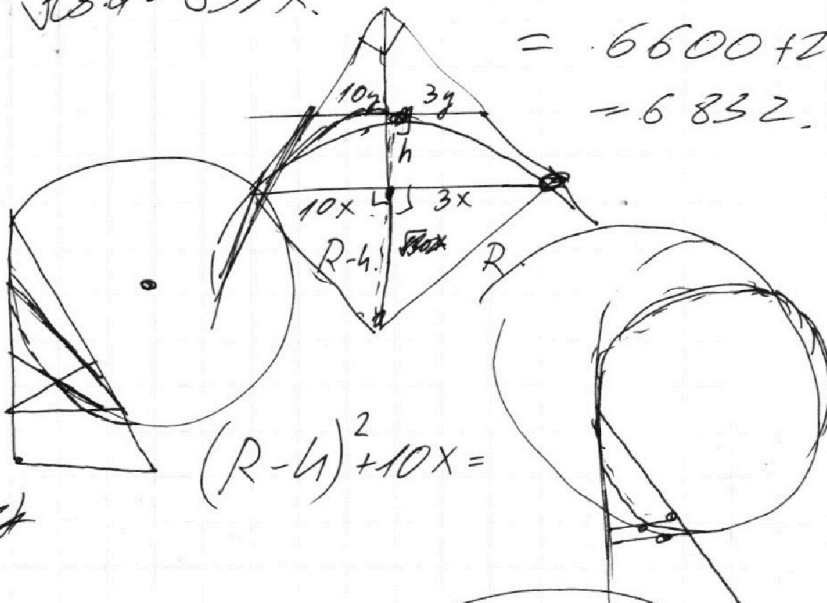
$$+ \begin{array}{r} 324 \\ 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 2592 \\ 324 \\ \hline 5832 \end{array}$$

Черковец

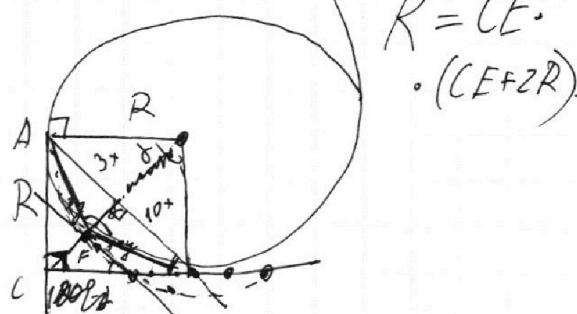
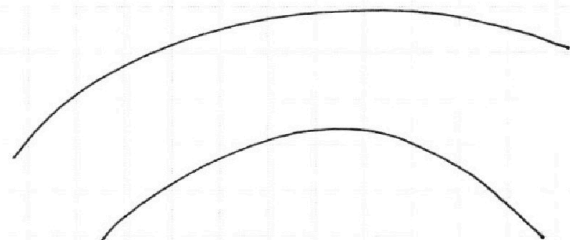
$$\begin{aligned} (20-2)^2 &= 8000 - \\ &- 6 \cdot 400 + 12 \cdot 20 - 8 = \\ &= 8000 - 2400 + \\ &+ 240 - 8 = \\ &= 6600 + 240 - 8 = \\ &= 6832. \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{324} \sqrt{39x}$$



$$(R-h)^2 + 10x =$$

Знач
 $A+B =$



$$R^2 = CE \cdot (CE + 2R)$$

$$R^2 = 3x \cdot 13x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

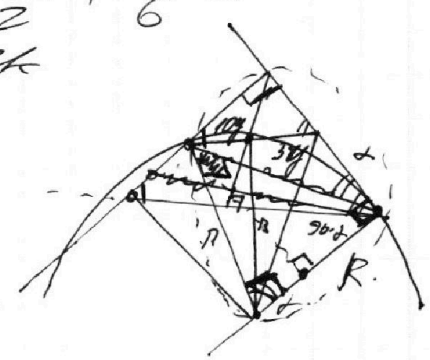
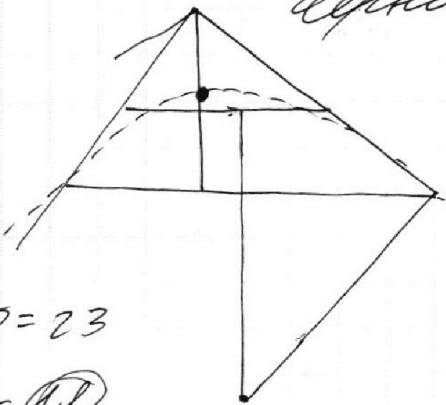


$\frac{1}{2}$

~~$\frac{5\pi}{3}$~~

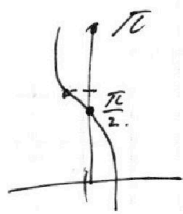
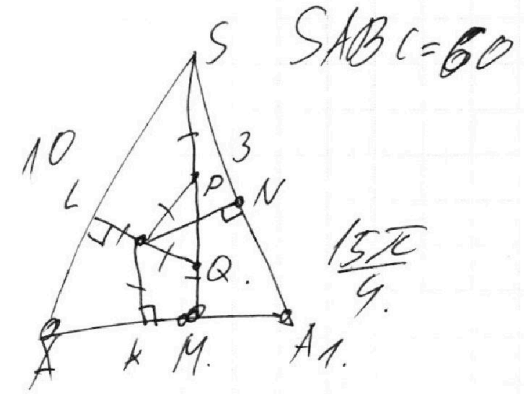
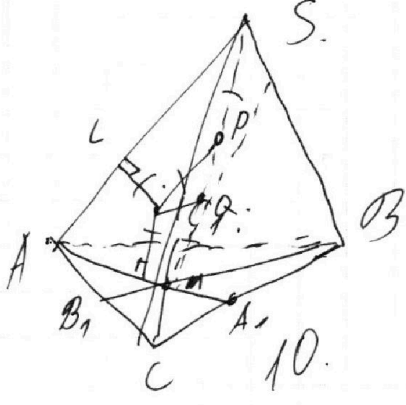
$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 10 \times 10\pi$

Черновик



4
 $+ 4$
 $+ 5 \cdot 3 =$
 $= 15 + 8 = 23$
 $5 + 6 = 11$

$\angle ABC = 60^\circ$



$\frac{5\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2} + \pi$

-1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{7\pi}{2}$

$\frac{15\pi}{4}$ $\frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

5π

$\frac{3\pi}{4}$ $\frac{13\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

~~$\frac{3\pi}{4}$~~

$\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ $\frac{9\pi}{4}$

$\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

$\frac{9\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{5\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$