МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$ab \vdots 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}$

$bc \vdots 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$

$ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$

$\Rightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2 \vdots 2^{7+13+14}\cdot 3^{11+15+17}\cdot 5^{14+18+43} = 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75}$

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$; $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$; $b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$; ...

Т.к ~~ab~~ a, b, c – натур числа, что ~~очевидно~~ квадрат такого числа ~~может~~ обязан делится на кв-т делителей $\Rightarrow$ рассмотрим каждый делитель отдельно (очевидно, что чтобы abc было мин кроме $2, 3, 5$ число не из что не может соот)

2: $(a\cdot bc)^2 \vdots 2^{34} \Rightarrow$ предположим, что есть такой ~~abc~~ a,b,c, что $abc \vdots 2^{17}$, покажем что это возможно:

$a = 2^4\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$; $b = 2^3\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$; $c = 2^{10}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$ усл. задачи вып.

3: $(abc)^2 \vdots 3^{43}$ из указанного выше $\Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{44}$, покажем, что такая сит. возможна $abc \vdots 3^{22}$. $abc = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$

$a = 2^4\cdot 3^7\cdot 5^{\gamma_1}$; $b = 2^3\cdot 3^4\cdot 5^{\gamma_2}$; $c = 2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{\gamma_3}$ усл. выполняется

5: заметим, что $ab\cdot bc \vdots 5^{14}\cdot 5^{18} = 5^{32}$ но в то же время $a\cdot c \vdots 5^{43}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2 \vdots 5^{86}$ точно $\Rightarrow abc \vdots 5^{43}$, докажем

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

что такая ситуация возможно приведя

пример:

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$

$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$

$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$

проверка

$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$

$ca = 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43}$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array}$$

таким образом ~~$abc = 2^{17}$~~ минимально возможна $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

P.S. найденное значение abc является наименьшим, потому что они удовлетворяют минимальному условию. Деления, для данного условия меньше в прошло невозможно.

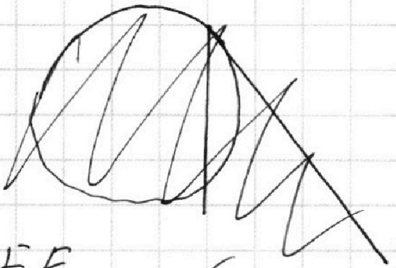
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

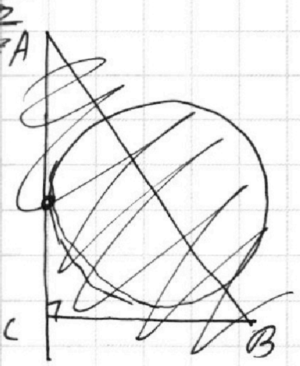
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~[illegible]~~





$CD^2 = (3x\cdot 10x)$

$CD=\sqrt{30x}$.

$\triangle CLF \sim \triangle CAB$.

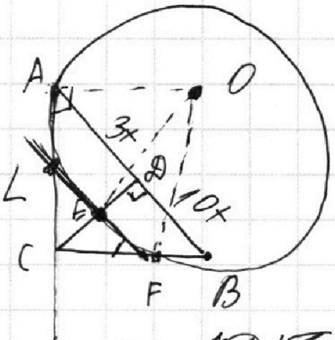
$AB \parallel EF$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$

$\frac{AB}{BD}=\frac{13}{10}$

Пусть

$\frac{BD}{AB}=\frac{10}{13} \Rightarrow$ $BD=10x$, $AB=13x \Rightarrow AD=3x$



$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} CD\cdot AD}{\frac{1}{2} CE\cdot EF} = \frac{3x\cdot CD}{CE\cdot \frac{CE}{CD}\cdot DB} =$

$= \frac{3x\cdot 30x^2}{CE^2\cdot 10x} = \frac{9x^2}{CE^2}$.

$CD=\sqrt{AD\cdot DB}=\sqrt{30}x$

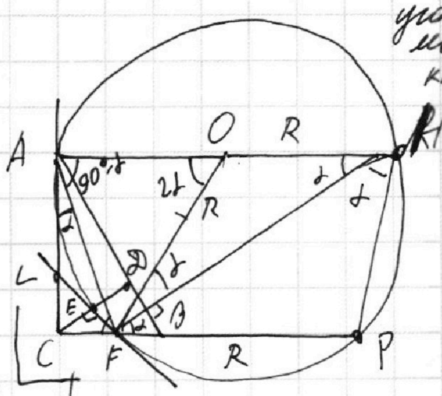
Пусть $\angle CAF=\alpha$, тогда $\angle FAO = 90^\circ-\alpha$,

угол между касат. и хорд.

$\cup CF = 2\alpha = \angle AOF$;

$\angle AHF = \alpha = \frac{\cup CF}{2}$ — впис. опир. на $\cup CF$

$\triangle AFH$ – п/у, т.е. $\angle AFH = 90^\circ$.



$\angle OFH = \alpha = \angle HFP$

$OH \parallel FP$ ($AC \perp AO$, $CP \perp AC$) $\Rightarrow$

$OH \parallel FP \Rightarrow OF \parallel HP$

$OF=OH=R$ $\Rightarrow$ $OFHP$ – ромб. $\Rightarrow HP=R$.

$AFPH$ – впис. в окр. трапеция $\Rightarrow$ р/б трапеция $\Rightarrow AF=HP=R$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle AFO$: $AF = AO = FO = R \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ - \alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$\triangle CAF$: $CF = AC : \sqrt{3}$.

$AC = \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39}x$ $\Big| \Rightarrow CF = \sqrt{13}x$. $\Big| \Rightarrow$

$CB = \sqrt{10x \cdot 13x} = \sqrt{130}x$.

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{13}x}{\sqrt{130}x} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\triangle CLF \sim \triangle ACB$ (т.к. $AB \parallel LF$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \cancel{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}}$.

$\cancel{CF \parallel}$ $LF \perp CD$ т.к $LF \parallel AB$.

$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AD \cancel{= \frac{1}{2}\sqrt{30x \cdot 3x}}$.

$\cancel{BA}$ $S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DB$.

$\triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{CE}{CD} = k = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$\frac{S_{CEF}}{S_{CBD}} = k^2 \Rightarrow \cancel{\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}}} = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{k^2 \cdot S_{CBD}} =$

$= \frac{AD}{k^2 \cdot BD} = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 10} = 3$

Ответ: 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right).$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad |\cdot 5 \\ x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad |\cdot 5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x - x = \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n. \\ 5x + x = -\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} + 5\pi + 10\pi n. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = -\pi + 10\pi n. \\ 6x = -4\pi + 5\pi + 10\pi n \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 4x = 4\pi + 10\pi n \\ 6x = \pi + 10\pi n. \end{array}\right.$$

ОДЗ.

$$0 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \le \pi$$

$$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}.$$

и $\sin x$

Т.к. $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$, то

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \le \frac{7\pi}{2} \quad \Big|\cdot\frac{2}{\pi}.$$

$$-3 \le \frac{1}{2} + n \le 7$$

$$-3{,}5 \le n \le 6{,}5 \Rightarrow n = -3; -2; -1; 0; \ldots 6.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi k}{3} \le \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow -4{,}5 \le k \le \frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -4; -3; -2; -1 \ldots 9; 10.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l} x = +\frac{\pi}{6} + 2{,}5\pi n, \ n \in Z \\ x = \pi + 2{,}5\pi k, \ k \in Z \end{array}\right.$$

но т.к. $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$, то.

$-\frac{3\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + 2{,}5\pi n \le \frac{7\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{5\pi}$

$\cancel{-\frac{3\pi}{5} \le \frac{\pi}{10}}\ -\frac{3}{5} \le -\frac{1}{10} + n \le \frac{7}{5}$

$-0{,}6 \le -0{,}1 + n \le 1{,}4 \Rightarrow n = 0; 1.$

$x = -\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\pi.$

$-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2{,}5\pi k \le \frac{7\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{5\pi}$

$-0{,}6 \le \frac{2}{5} + k \le 1{,}4$

$-1 \le k \le 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2{,}5\pi n, \ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, \ k \in Z \end{array}\right.$$ но т.к. $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

то. ① $-\frac{3\pi}{2} \le \pi + 2{,}5\pi n \le \frac{7\pi}{2}$

$-0{,}6 \le 0{,}4 + n \le 1{,}4.$

$-1 \le n \le 1 \Rightarrow n = 0; \pm 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}.$

② $-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \le \frac{7\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{6}{\pi}$

$-\frac{3 \cdot 6}{2} \le 1 + 2 \cdot 5k \le 7 \cdot 3.$

$-9 \le 1 + 10k \le 21$

$k = -1; 0; 1 \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}.$

$x = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$ Ответ далее

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$; $\cancel{2}\pi$; $\frac{2\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

№4

Рассм. второе ур-ние; оно распад на совокупность ур.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$

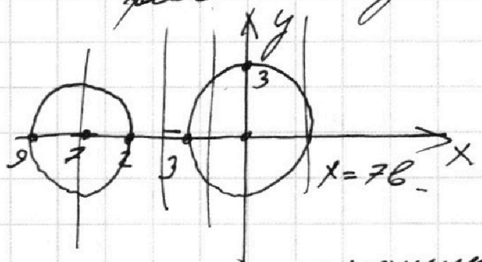
$(x+7)^2+y^2=2^2$ — окружность с центром $(-7;0)$ и $R_1=2$

$x^2+y^2=3^2$ — окружность с центром $(0;0)$ и $R_2=3$.

$x+3ay-7b=0$ — ~~уравнение задает~~

Если $a=0$, то $x=7b$ — верт. прямая.

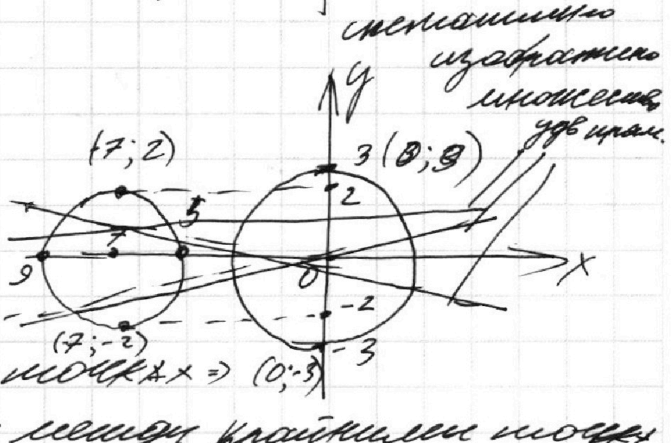
Очевидно, что решений макс 2 (см. рис далее)



Если $a \neq 0$, то

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

прямая, чтобы ур-ние имело 4 реш, нужно, чтобы прямая пересекала каждую окр в двух точках



$\Rightarrow (0;-3)$

$\Rightarrow$ она должна лежать между крайними точками окр., т.е. должна выполняться такая система.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} -2 < y(-7) \le 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases} \qquad y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

$$\begin{cases} -2 < \frac{7}{3a} + \frac{7b}{3a} \le 2 \\ -3 < \frac{7b}{3a} < 3 \end{cases}$$

~~т.к. [illegible] $a \neq 0$. В силу [illegible]~~

① Если $a > 0$

$$\begin{cases} -6a < 7 + 7b < 6a. \\ -9a < 7b < 9a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 7 < 7b < 6a - 7 \\ -9a \le 7b < 9a \end{cases}$$

b существует если.

$$\begin{cases} -9a < 6a - 7 \\ -6a - 7 < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a > 7. \\ 15a > -7. \end{cases} \Rightarrow a > \frac{7}{15} > 0 \Rightarrow a > \frac{7}{15}$$

② Если $a < 0$.

$$\begin{cases} 6a < 7b + 7 < -6a. \\ -9a > 7b > 9a. \end{cases}$$

~~$\begin{cases} 6a - 7 < 7b < 6a + 7 \\ -9a \le 7b < 9a \end{cases}$~~

$$\begin{cases} 6a - 7 < 7b < -6a - 7. \\ 9a < 7b < -9a \end{cases}$$

b существует если.

$$\begin{cases} 6a - 7 < -9a. \\ 9a < -6a - 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a < 7. \\ 15a < -7. \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{7}{15} < 0$$

итого $a \in \left(-\infty; -\frac{7}{15}\right) \cup \left(\frac{7}{15}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{15}\right) \cup$
$\cup \left(+\frac{7}{15}; +\infty\right)$.

№5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4. \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}7^5 - 4. \end{cases}$$

xy - ? На ОДЗ:

Пусть ~~log~~ $\log_7 6x = t$, а $\log_7 y = u$, тогда $t \neq 0$, $u \neq 0$. (к каждому x соотв. ровно 1 знач. t и наоборот, аналогично с y и u (u) в силу монотонности $\log_7 b$)

$$\begin{cases} t^4 - 2\cdot\frac{1}{t} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} - 4 \,\Big|\cdot t & t \neq 0, \\ u^4 + 6\cdot\frac{1}{u} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{u} - 4 \,\Big|\cdot u & u \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - 3{,}5 + 4t = 0 \\ u^5 + 4u + 3{,}5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - 3{,}5 = 0 \\ u^5 + 4u + 3{,}5 = 0 \end{cases}$$

Рассм $y = f(a) = a^5 + 4a$

$f'(a) = 5a^4 + 4$.

$f'(a) = 0$

$5a^4 + 4 = 0$

$a^4 = -\frac{4}{5}$ $\varnothing \Rightarrow$

$f'(0) > 0$

ф-ция монотонно возраст. на R $\Rightarrow$ ~~ур-ние~~ ур-ния

$t^5 + 4t - 3{,}5 = 0$ и $u^5 + 4u + 3{,}5$ имеют ровно 1 реш, а т.к. ~~$\log_7 b = k(b)$~~ $\log_7 b = k(b)$ тоже монотонно возраст $\Rightarrow$ существует только одна пара действ. x и y.

Заметим, что ~~$h(-a) = -h(a)$~~ ф-ции g и l

$g(t) = t^5 + 4t - 3{,}5$ и $l(u) = u^5 + 4u + 3{,}5$.

$g(-t) = 0$ и $l(t) = 0$ равносильны.

$-t^5 - 4t - 3{,}5 = 0 \Leftrightarrow t^5 + 4t + 3{,}5 = 0 = l(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ что ~~корни~~ ~~корни такие~~ ур. корни уравнения ~~по~~ по модулю равны и

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и противоположны по знаку, и это единств. решение.

т.е. $u = -t \Rightarrow \log_7 6x = -\log_7 y$.

т.е. $\log_7 6x + \log_7 y = 0$

$\Rightarrow \log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1$, т.е. $xy = \frac{1}{6}$.

и это единственное возможное знач. xy (в других случаях оно не удов).

Ответ: $\frac{1}{6}$.

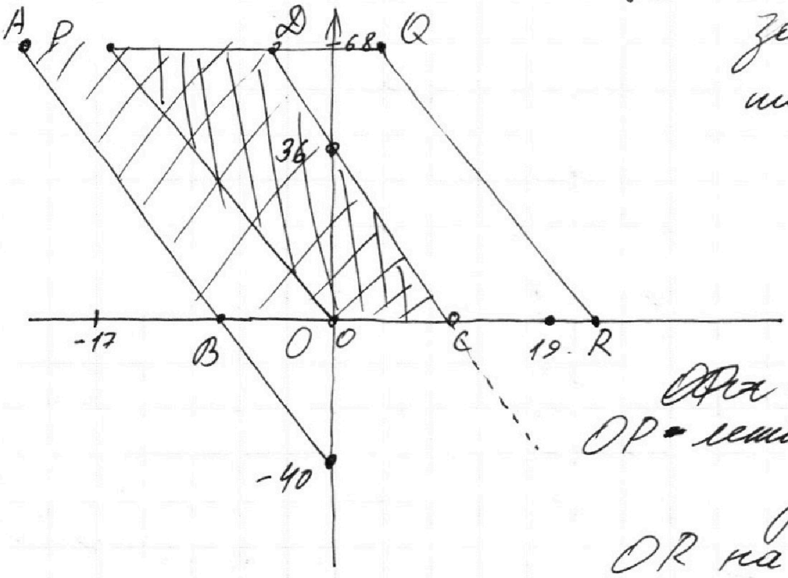
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6



Зафиксируем $A(x_1;y_1)$

тогда $4x_2+y_2=40+4x_1+y_1$.

$y_2=-4x_2+40+4x_1+y_1$

прямая, явл. множеством точек B.

OP лежит на прямой $y=-4x$

OR на. $y=-4x+76$

PQ на $y=68$

OR на $y=0$.

Заметим, что

$y_2=-4x_2+40+4x_1+y_1$

и $y=-4x+76$ и $y=-4x$ наклонены под одним углом, а т.к B лежит внутри пар-мма, то необходимо выполнение такого:

$0\le 40+4x_1+y_1\le 76$

$-40\le 4x_1+y_1\le 36$, т.е $\begin{cases} y_1\le 36-4x_1 \\ y_1\ge -40-4x_1 \end{cases}$

На каждой прямой проход через пар-мм прямое вида $y=-4x+c$, где $c\in\mathbb{Z}$ лежит. $\frac{68}{4}+1=17+1=18$ точек, осталось лишь рассмотреть, сколько точек A задают прямую множество B, проход через пар-мм с цел коорд-ч. ~~правильн~~ (~~равно~~ но т.к. $A(y_1;x_1)\in OPQR$, то $y_1\in[0;68]$ (4n).

~~все a $36-4x_1$ ⇒ $x_1\in$~~

P.S $A\equiv B$ (в условии ~~это~~ про это ничего не сказано).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$8 = -40 x_1 - 4x$~~

~~$108 \geq x_1$, но из ограничения, что $x_1 \in [-17; 19]$~~ $\Rightarrow$

~~$4x \geq -108$, $x \geq -27$~~

система неравенств
$$\begin{cases} y_1 \geq 36 - 4x_1 \\ y_1 \leq 40 - 4x_1 \\ y_1 \in [0; 68] \end{cases}$$ — другие условия не имеют

задает множество таких x_1 и y_1, что множество B проходит через OPQR

задает множество точек A внутри параллелограмма (назовем его ABCD) — заштрихованная область, т.к. $y_1 \in [0; 68]$

но т.к. $A(x_1; y_1) \in OPQR$, то точки должны удов. двум условиям, т.е. находиться внутри пар-мма PDCO (внутри учитываем и точки и на границах в моем понимании). двойная штриховка.

DC — лежит на прямой $y = 36 - 4x$.

D: $68 = 36 - 4x$ $\quad x = -8$ $\quad D(-8; 68)$.

C: $0 = 36 - 4x$ $\quad x = 9$. $\quad C(9; 0)$.

внутри этой области: $(8 + 1 + 9) \cdot 18 = 18^2$ точек A, каждая из которых задает множеству 18 точек B $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Всего пар $(A; B)$ различных $= 18^2 \cdot 18 = 324 \cdot 18 = 6832$.

Ответ: 6832 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$\sqrt{5}$.

$\times\begin{array}{r}324\\18\end{array}$

$\times\begin{array}{r}18\\18\\\hline 144\\18\\\hline 324\end{array}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=3^2 \\ (x^2+14x+49)-49+y^2+45=0 \end{cases}$$

$(x+7)^2+y^2=2^2$.

$x^2+y^2=3^2$.

7^3

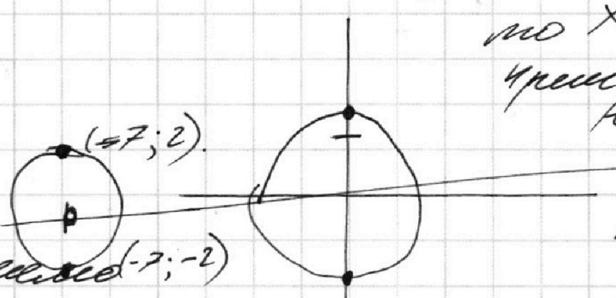
$8+10=18$.

$7\varepsilon\, y=-\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}$.

если $a=0$.

то $x=7b$.

Чрез ... неводм ... верти прям.



чтобы ур. имело 3 реш. прямая должна лежать.

$\frac{12}{4}+1$. 1

2

3

4

5

6

7

$$\begin{cases} -2<y(-7)<2 \\ -3<y(0)<3 \end{cases}$$

$\underbrace{0;4}_{};8;\ldots 68$

$\frac{4}{4}+1\ \frac{8}{4}+1$

Пусть $(\log_7 6x)=t$.

$t^4-2\cdot\frac{1}{t}=\frac{3}{2t}-4$.

$u^4+6\frac{1}{u}=\frac{5}{2}\frac{1}{u}-4$.

$$\begin{cases} t^5+4t-3{,}5=0 \\ u^5+4u+3{,}5=0 \end{cases}$$

$5t^4+4=0$

$t^4=-\frac{4}{5}$ $\varnothing$.

$\log_7 y=u$.

$-t=u$.

$\log_7 y=-\log_7 6x$.

$\log_7(6yx)=0$.

$6yx=1$.

$yx=\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

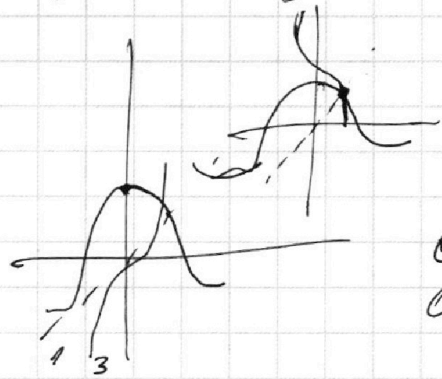
№1

$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $\qquad a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $\qquad abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$11 + 15 + 17 = 43$ $\qquad 14 + 18 = 32$, $32 + 43 = 75$ $\qquad 76 \mid 2 = 38$



$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{44}$

$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$

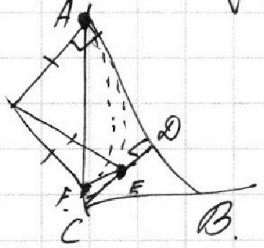
$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$

$43 - 24 = 19$

$14 + 18 = 32$

$324 \times 18 = 92$

$43 - 14 = 29$



№2.

$\frac{5\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10-1}{4} = \frac{9}{4}$

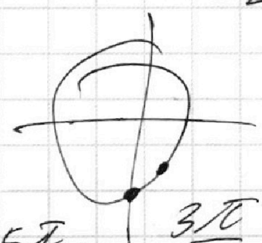
№3.

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

5

$\frac{3\pi}{2} \approx \frac{9}{2} \approx 4{,}5$

$\cos(5\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$



$\frac{5\pi}{6}$ $\qquad \frac{3\pi}{2}$

$\cos \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$\sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

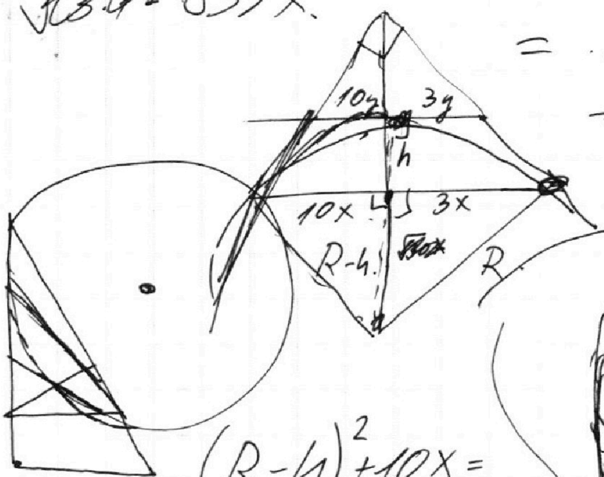
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

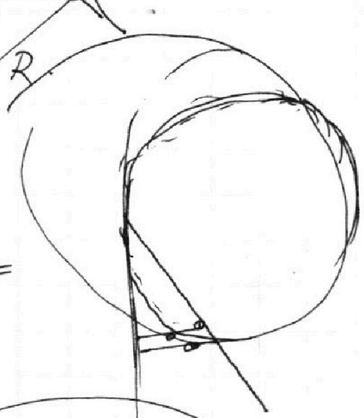
$$\begin{array}{r} 324 \\ \times\ 18 \\ \hline 2592 \\ 324\ \ \\ \hline 6832 \end{array}$$

$(20-2)^3 = 8000 - 6\cdot 400 + 12\cdot 20 - 8 = 8000 - 2400 + 240 - 8 = 6600 + 240 - 8 = 6832.$

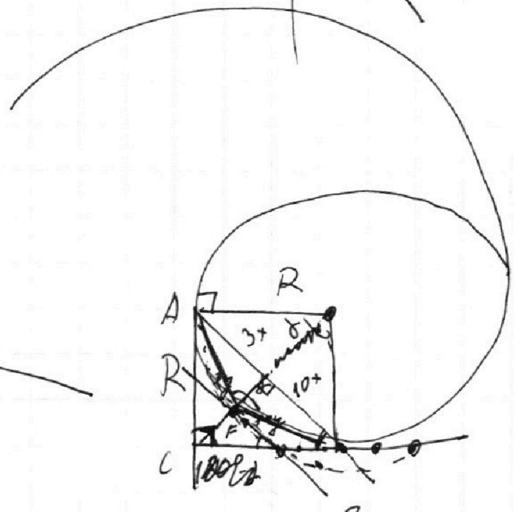
$AC = \cancel{\sqrt{3}} \sqrt{39}x.$



$(R-4)^2 + 10x =$



$A + B =$



$R^2 = CE \cdot (CE + 2R)$

$\cancel{R^2 = 3x \cdot 13x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

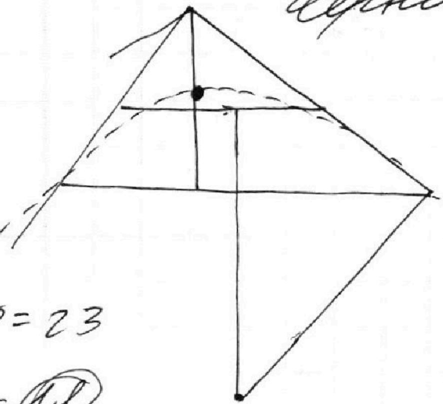
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

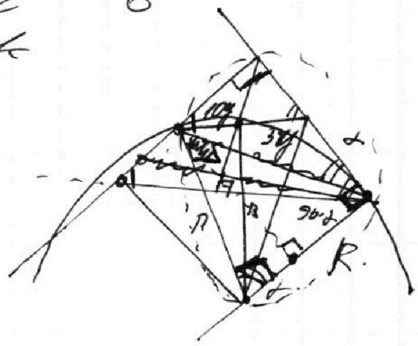
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{5\pi}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 10\pi$

Черновик



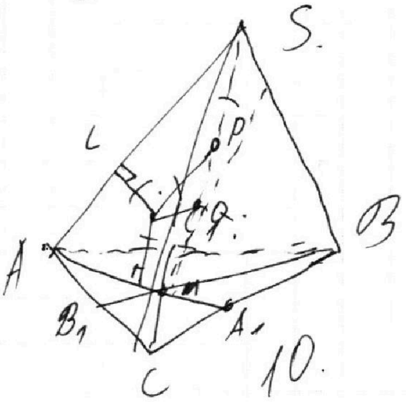


$4 + 4 + 5 \cdot 3 =$

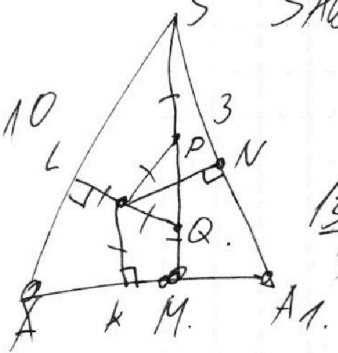
$= 15 + 8 = 23$

$5 + 6 = 11$

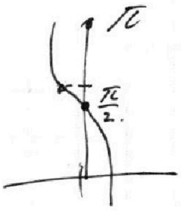
ABC=60.



SABC=60



$\frac{13\pi}{4}$



$\frac{5\pi}{2}$ $\quad \frac{3\pi}{2} + \pi$

$-1.$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{7\pi}{2}$

$\frac{13\pi}{4}$ $\quad \frac{6\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

5π $\quad \cancel{3\pi}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad -\frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{13\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ $\quad \frac{9\pi}{4}$ $\quad \frac{5\pi}{4} =$

$\frac{9\pi}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{5\pi}{4}$ $\quad \frac{5\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$