



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длии медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

\sqrt{t}

$$AB : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \alpha^2 \cdot 6^2 \cdot C^2 : 2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17}$$

$$BC : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 5^{14+18+19} = \frac{19}{-15+93} = \frac{18}{+93}$$

$$AC : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} = 2^{39} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \quad t^5$$

$C = 2^{43} \cdot 3^{B_3} \cdot 5^{t_3}; \alpha = 2^{41} \cdot 3^{B_1} \cdot 5^{t_1}; B = t^2 \cdot 3^{B_2} \cdot 5^{t_2}; 6$

Т. к AB, α, B, C - натуральные, то t возможно квадратом такого числа, потому что t делится единицей на кв-т деления \Rightarrow делимость t делениями единицы (очевидно, что t делит AB и BC , т.к. t делит AC)

$$2 : (\alpha \cdot BC) : 2^{34} \Rightarrow \text{покажем, что есть такой } \alpha, B, C, \text{ что}$$

$$ABC : 2^{12}, \text{ покажем что это возможно:}$$

$$\alpha = 2^4 \cdot 3^{B_1} \cdot 5^{t_1}; B = 2^3 \cdot 3^{B_2} \cdot 5^{t_2}; C = 2^{10} \cdot 3^{B_3} \cdot 5^{t_3}$$

Уд. задачи реш.

$$3 : (ABC)^2 : 3^{43} \text{ т.к. узлового выше } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ABC)^2 : 3^{44}, \text{ покажем, что такое есть.}$$

$$\text{возможна } ABC : 3^{22}. \quad ABC = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{41+4+43}.$$

$$\alpha = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{t_1}; B = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{t_2}; C = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{t_3}$$

Уд. Следует

$$q5: \text{запишем, что } AB \cdot BC : 5^{14} \cdot 5^{18} = 5^{32}.$$

$$\text{но } 6 \text{ не делит } \alpha \cdot C : 5^{43}$$

$$\Rightarrow (ABC)^2 : 5^{86} \text{ можно } \Rightarrow ABC : 5^{43}, \text{ докажем}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Что показывает минимально возможное
число:

$$\alpha = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ - 14 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

наиболее однозначно

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

авторитет
минимально возможное

человека

$$abc = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{43}$$

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$$

$$ca = 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43}$$

Ответ: ~~100~~ $2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{43}$

P. S. найденное значение $\overset{abc}{\text{abc}}$ является
наименьшим, потому что оно удовлетво-
ряет минимальному условию. Делаясь,
меньше в пропорции невозможно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

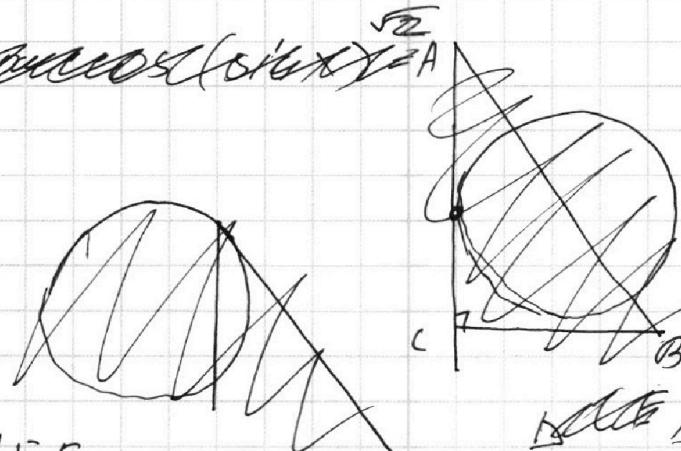
- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача (см. рис.)



$$\begin{aligned} CD^2 &= \\ &= (3x \cdot 10x) \end{aligned}$$

$$CD = \sqrt{30x}.$$

$\triangle CEF \sim \triangle CAB$.

$AB \parallel EF$

$$\frac{SACD}{SCEF} - ?$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

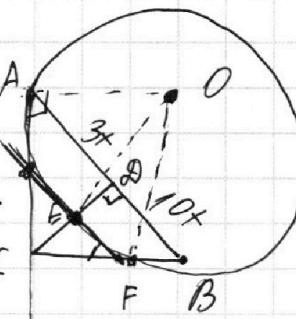
Пусть

$$\frac{BD}{AB} = \frac{10}{13} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} BD &= 10x \\ AB &= 13x \\ AD &= 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{SACD}{SCEF} &= \frac{\frac{1}{2} CD \cdot AD}{\frac{1}{2} CE \cdot EF} = \\ &= \frac{3x \cdot 30x^2}{CE^2 \cdot 10x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{9x^2}{CE^2} \quad CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{30x} \\ &CD = \frac{3x \cdot \sqrt{180x}}{CE \cdot \frac{CE \cdot DB}{CD}} = \end{aligned}$$



Пусть $\angle CAF = l$, тогда

угол $\angle FAO = 90^\circ - l$,
так как $\angle VCF = 2l = \angle AOF$;

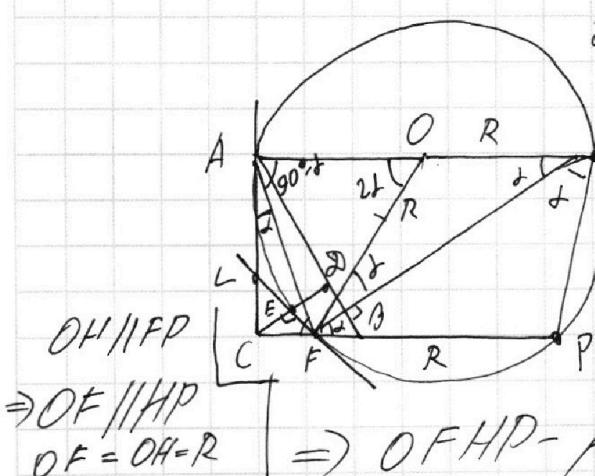
$$\angle AHF = l = \frac{\angle CEF}{2}$$

$\triangle AFH$ - илг, FE^2 - виньетка
 $\angle AFH = 90^\circ$. VCF

$$\angle OFH = l = \angle HFD \Rightarrow$$

$OH \parallel FD$ ($AC \perp AO$)

($CP \perp AC$)



$OH \parallel FD$

$\Rightarrow OF \parallel HP$

$OF = OH = R$

$\Rightarrow OFHP$ - паралл. трап.

$AFPH$ - виньетка \Rightarrow паралл. трап. $\Rightarrow AF = HP = R$.

вокр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle AFO: AF = AO = FO = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\angle = 90^\circ - \angle = 60^\circ \Rightarrow \angle = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle CAF: CF &= AC : \sqrt{3}. \\ AC &= \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39x} \quad \Rightarrow \quad CF = \sqrt{13x}. \\ CB &= \sqrt{10x \cdot 13x} = \sqrt{130x}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{13x}}{\sqrt{130x}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\triangle CCF \sim \triangle ACB (\text{т.к. } AB \parallel CF) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \text{ и } \cancel{CE}$$

§ ~~КФ~~ $CF \perp CD$ т.к $CF \parallel AB$.

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \cancel{\frac{1}{2} \sqrt{30x} \cdot 3x}.$$

$$\text{§ } \cancel{K} \text{ } S_{DCB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DB.$$

$$\text{§ } \triangle CEF \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{CE}{CD} = K = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{DCB}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{S_{ACD}}{K^2 \cdot S_{DCB}} =$$

$$= \frac{AD}{K^2 \cdot BD} = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot 10} = 3$$

Задача 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√3.

$$5 \operatorname{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

0,05.

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right).$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}.$$

u

$\sin x$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi u, \\ 0 \leq u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi u, \\ 0 \leq u \end{cases} \cdot 5$$

$$\begin{cases} 5x + x = \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 10\pi u, \\ 6x = 5\pi + 10\pi u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + x = -\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} + 5\pi + 10\pi u, \\ 6x = -5\pi + 5\pi + 10\pi u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = -\pi + 10\pi u, \\ 6x = 10\pi u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = -\pi + 10\pi u, \\ 6x = 10\pi u. \end{cases}$$

$$T.K. - \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ ид}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 3\frac{\pi}{2}u, \\ u \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}u \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x = \frac{7\pi}{3} + 6\pi u, \text{ ид}$$

$$-3 \leq \frac{1}{2} + u \leq 7 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$-3,5 \leq u \leq 6,5 \Rightarrow u = -3, -2, -1, 0, \dots, 6.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k \leq \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow -4,5 \leq k \leq \frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -4; -3; -2; -1; \dots, 9; 10.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = +\frac{\pi}{8} + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2,5\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

но $\pi - \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{2}$, и.о.

$$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2,5\pi n \leq \frac{2\pi}{2} \quad | \text{ добав. } \frac{2}{5}\pi$$

~~$$-\frac{3\pi}{5} \leq \frac{\pi}{4} + 2,5\pi n - \frac{3}{5} \leq -\frac{1}{10} + u \leq \frac{7}{5}$$~~

~~$$-0,6 \leq -0,1 + u \leq 1,4 \Rightarrow u = 0; 1.$$~~

$$\pi \quad x = -\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\pi.$$

~~$$\pi - \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2,5\pi k \leq \frac{2\pi}{2} \quad | \text{ добав. } \frac{2}{5}\pi$$~~

~~$$-0,6 \leq \frac{2}{5} + k \leq 1,4$$~~

~~$$-1 \leq k \leq 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{2\pi}{2}$$~~

Однако: $-\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\pi; -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{2\pi}{2}$.

$$\begin{cases} x = \pi + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

но Т.К. $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{2}\right]$

$$\text{и.о. } ① -\frac{3\pi}{2} \leq \pi + 2,5\pi n \leq \frac{2\pi}{2}$$

$$-0,6 \leq 0,4 + u \leq 1,4$$

$$-1 \leq u \leq 1 \Rightarrow u = 0; \pm 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{2\pi}{2}$$

$$② -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{2\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{5}\pi$$

$$-\frac{3 \cdot 6}{2} \leq 1 + 2,5k \leq 7 \cdot 3 \Rightarrow k = -1; 0; 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \quad \text{Однако}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: - $\frac{3\pi}{2}$; ~~$\frac{\pi}{2}$~~ ; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача. Второе ур-ние; оно расположено на
⁵⁹
своему конечное.
уравнение.

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

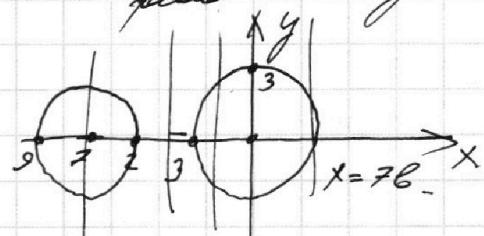
(\Leftrightarrow)

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & -\text{окружность с центром} \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (-7; 0) \text{ и } R_1 = 2 \\ & -\text{окружность с центром } (0; 0) \text{ и } R_2 = 3. \end{cases}$$

$x + 3ay - 7b = 0$ - уравнение задания

Следовательно, что $x = -7b$ - верн. уравнение.

очевидно, что решения может быть 2 (или 1, если
равенство)



Следовательно, что

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

прямая, имеющая

ур-ние имеет вид

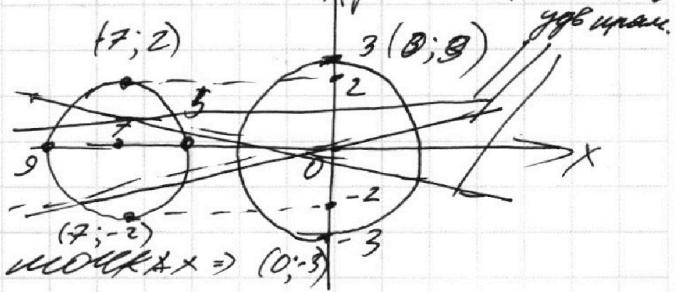
Чтобы, нумеруя, чтобы

прямая пересекала

коэффициент a в двух точках $x = (0, b)$

\Rightarrow оно должно быть лежать между крайними точками

на окр., т.е. коэффициент a не меняется.



следовательно
изображено
имеющиеся
уравнение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -2 < y(-7) \leq 2 \\ -3 \leq y(0) \leq 3 \end{cases}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{78}{3a}$$

$$\begin{cases} -2 < -\frac{7}{3a} + \frac{78}{3a} \leq 2 \\ -3 \leq \frac{78}{3a} \leq 3 \end{cases}$$

Изменяя a ,
влияет на пересечение
прямой с осями.
также на y .

$$\begin{cases} -6a < 7 + 78 \leq 6a \\ -9a < 78 \leq 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 7 < 78 < 6a - 7 \\ -9a < 78 < 9a \end{cases} \quad \text{в существенном смысле.}$$

$$\begin{cases} -9a < 6a - 7 \\ -6a - 7 < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a > 7 \\ 15a > -7 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{7}{15} > 0 \Rightarrow a > \frac{7}{75}$$

② Если $a < 0$.

$$\begin{cases} 6a + 78 + 7 < -6a \\ -9a + 78 < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a + 85 < 6a + 7 \\ 9a < 88 + 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 7 < 78 \leq -6a - 7 \\ 9a < 78 \leq -9a \end{cases}$$

в существенном смысле.

$$\begin{cases} 6a - 7 < -9a \\ 9a < -6a - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a < 7 \\ 15a < -7 \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{7}{15} < 0$$

итого $a \in (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -\frac{7}{15}) \cup$

$\cup (\frac{7}{15}; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_7 7^5 - 4 \end{cases}$$

xy - ?

на ODS;

Пусть $\log_7 6x = t$, а $\log_7 y = u$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \end{array} \right| \cdot t \quad t \neq 0, \text{ т.к. } \log_7 x \text{ не равен 0} \text{ и } \log_7 y \text{ не равен 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^4 + 8 \cdot \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \end{array} \right| \cdot 4 \quad u \neq 0, \text{ т.к. } \log_7 y \text{ не равен 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^5 - 3,5t + 4t = 0 \end{array} \right. \quad \text{также } y = f(t) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{array} \right. \quad = x + 4u$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^5 + 4t - 3,5 = 0 \end{array} \right. \quad f'(t) = 5t^4 + 4.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{array} \right. \quad f'(t) = 0$$

$$5t^4 + 4 = 0$$

Ф-члены мономовно возврат. $t^5 = -\frac{4}{5}$ ϕ

на R \Rightarrow др. кр. ур-ние $f'(t) > 0$

$t^5 + 4t - 3,5 = 0$ и $u^5 + 4u + 3,5$ несекунд.

равно 1 разу, т.к. $\log_7 x = \log_7 y$ (б) мономы мономовно возврат. \Rightarrow существует

меньше одна пара корней x и y .

заметим, что $f(t) = g(t)$ для ф-ции $f(t)$

$$g(t) = t^5 + 4t - 3,5 \text{ и } f(t) = u^5 + 4u + 3,5.$$

$g(t) = 0$ и $f(t) = 0$ равносильны.

$$-t^5 - 4t - 3,5 = 0 \Leftrightarrow t^5 + 4t + 3,5 = 0 = g(t) \Rightarrow$$

\Rightarrow что первые корни ур-ния

уравнения по методу гасения с



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и прописано значение из знака y , и это
т.е. $y = -t \Rightarrow \log_7 6x = -\log_7 y$. ^{единственное} _{решение}

$$7. E \quad \log_7 6x + \log_7 y = 0 \text{ т.к.}$$

$$\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1, \text{ т.е. } xy = \frac{1}{6}.$$

и это единственное возможное значение
 xy (в других случаях это не удов).

Ответ: $\frac{1}{6}$.



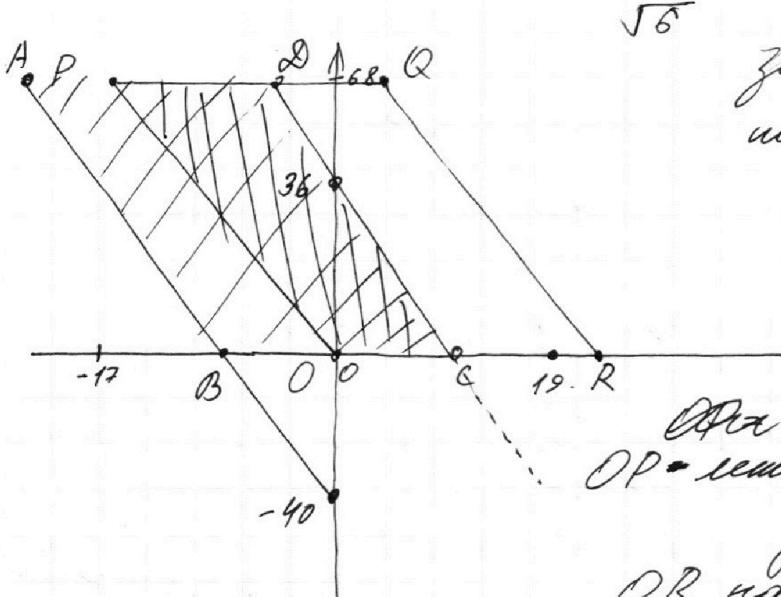
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



56

задано $A(x_1, y_1)$
штока $y_2 = 40 + 4x_1 + y_1$.
 $y_2 = \cancel{40} - 4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$
имеет, что
имеет
шток B.

Одна из
OP - линии на прямой
 $y = \cancel{-4x_1} - 4x$
OR на $y = \cancel{-4x_1} - 4x + 76$

PQ на $y = 68$
OR на $y = 0$.

Задано, что
 $y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$.

и $y = -4x + 76$ и $y = -4x$ наклонены под
одинаковыми углами, а т.к. B лежит вдали
от A, то необходимо выполнить неравенство:

$$0 \leq 40 + 4x_1 + y_1 \leq 76$$

$$-40 \leq 4x_1 + y_1 \leq 36, \text{ т.е. } \begin{cases} y_1 \leq 36 - 4x_1, \\ y_1 \geq -40 - 4x_1. \end{cases}$$

Находит прямой проход через параллельные прямые $y = -4x + c$, где $c \in \mathbb{Z}$
лемши. $\frac{68}{4} + 1 = 17 + 1 = 18$ шток, остается.
шток распределен, скажем, шток A задает прямую имеет B, ^{имеет} шток
имеет ^{имеет} шток A, ^{имеет} шток B, ^{имеет} шток
(имеет) т.к. A(y_1, x_1) \in [0; 68] \text{ ид.} \quad \text{через штоки}

Что A A 36 - 4x_1 \Rightarrow x_1 \in [0; 18]

P.S. A = B (в условии это что эмоции
не сказали).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$68 = 36 - 4x$

108 > x, но из ограничения что

$$\begin{cases} f(x) \geq -198 \\ f(x) \geq 227 \end{cases}$$

задача имеет такое значение x, что оно лежит в промежутке

система линейных
неравенств

$$\begin{cases} y \leq 36 - 4x \\ y \geq -40 - 4x \end{cases}$$

задача имеет такое значение x, что оно лежит в промежутке
[0; 68] - задача имеет такое значение x, что оно лежит в промежутке
[0; 68] - задача имеет такое значение x, что оно лежит в промежутке
(назовем его ABCD) -

- замыкающаяся область $A(0; 68)$
то т.к. $A(x_1; y_1) \in OPQR$, то точка должна
удовлетворять условиям, например, параллелограмма $PDCE$ (внешним условиям с точкой
внешним условиям). Внешние условия
имеют вид

DC-линии на прямой $y = 36 - 4x$.

$$D: 68 = 36 - 4x \quad x = -8$$

$$C: 8 = 36 - 4x \quad D(-8; 68).$$

$$x = 9.$$

$D(-8; 68), C(9; 0)$.

внешние засечки одинаковы: $18 \cdot 18 = 324$.

$= 18^2$. Точки находятся из координат

заданы множеством из 18 точек B \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{Всего пар. } (A; B) = 18^2 \cdot 18 = 324 \cdot 18 = 6832.$$

Ответ: 6832 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 + 19x + 49) - 49 + y^2 + 45 = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{5}.$$

$$\times \frac{32}{18}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2.$$

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

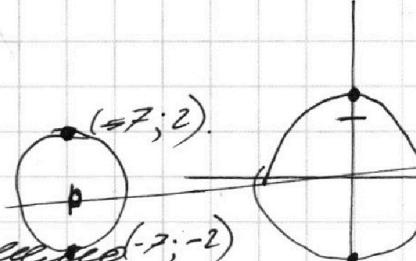
$$8^2 + 10^2 = 18^2.$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{76}{3a}.$$

если $a=0$.

то $x=76$.

Черновик
квадрат
Ваш
вершина



шары ср. общая

3 реш. чистая

решает.

$$\{-2 < y(-7) \leq 2\}$$

$$0 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \geq 63$$

$$\{-5 < y(0) < 3\}$$

$$\frac{1}{4} + 1 \frac{8}{4} + 1$$

$$\text{тогда } (\log_2 6x) = t.$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2t} - 4.$$

$$U^4 + 6 \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \frac{1}{t} - 4.$$

$$\begin{cases} t^5 + 4t - 3,5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^5 + 4U + 3,5 = 0. \end{cases}$$

$$5t^4 + 4 = 0$$

$$t^4 = -\frac{4}{5} \quad \emptyset.$$

$$\frac{12}{4} + 1.$$

$$2$$

$$3$$

$$4$$

$$5$$

$$6$$

$$7$$

$$\log_2 y = t.$$

$$-t = t.$$

$$t = 0.$$

$$\log_2 y = -\log_2 6x.$$

$$\log_2 (6x) = 0.$$

$$6x = 1.$$

$$yx = \frac{1}{6}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab = 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$\sqrt{1}$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 32^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$abc : 2^{12} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ + 11 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ + 14 \\ \hline 94 \end{array} \quad \begin{array}{r} 76 \\ + 12 \\ \hline 88 \end{array}$$

$$+ 15 \quad + 18 \quad + 43$$

$$\hline 43 \quad \hline 75$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{44}$$

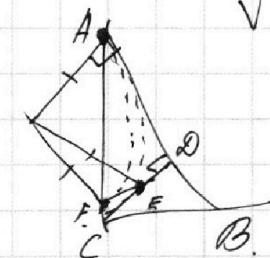
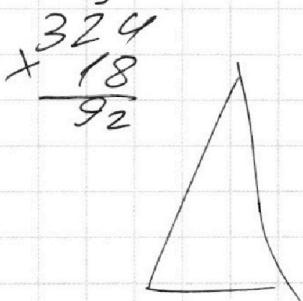
$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$$

$$93 - 24$$

$$19$$

$$88 + \frac{18}{32}$$



$$\sqrt{2} \cdot \frac{28}{5\pi} - \frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 1}{4} \cdot \frac{279}{4} = \frac{279}{4}$$

$$\sqrt{3}$$

$$\sin \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

~~3π/2 + x~~

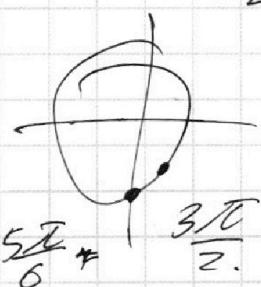
5

1

$$\frac{3\pi}{10} \approx \frac{9}{2} \approx 9.5$$

$$\Rightarrow \sin \cos(\sin \cos(\sin x)) = \frac{3\pi}{10} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$$

$\sin x = \sin x$



$$\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x + 2\pi n$$

$$\cos \sin x = \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right)$$

$$\sin \cos(\sin x) = \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\times \frac{324}{\cancel{18}}$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 2592 \\ 324 \\ \hline 6832 \end{array}$$

Черновик
 $(20-2)^3 = 8000 -$

$$- 6 \cdot 400 + 12 \cdot 20 - 8 =$$

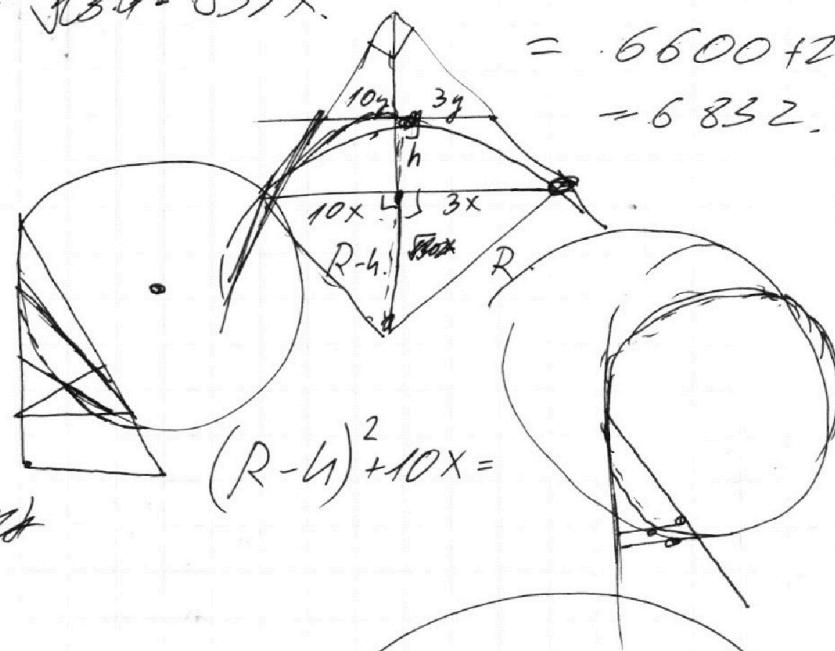
$$= 8000 - 2400 +$$

$$+ 240 - 8 =$$

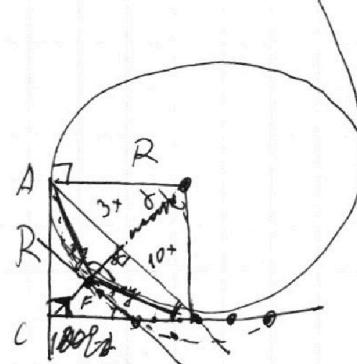
$$= 6600 + 240 - 8 =$$

$$= 6832.$$

$$AC = \sqrt{344^2 - 39^2}.$$



$A + B =$



$$R^2 = CE \cdot (CE + 2R)$$

$$R^2 = 3x \cdot 38.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

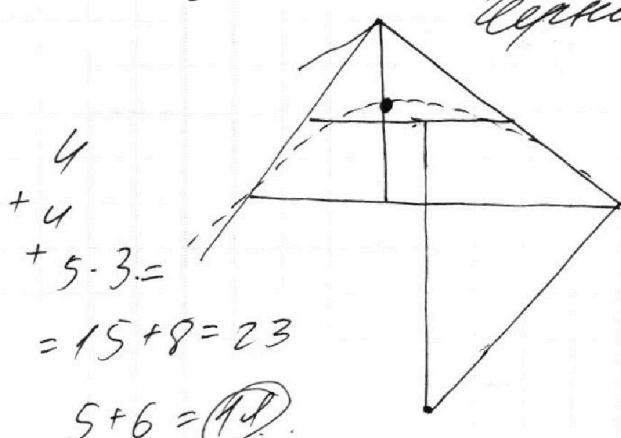
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

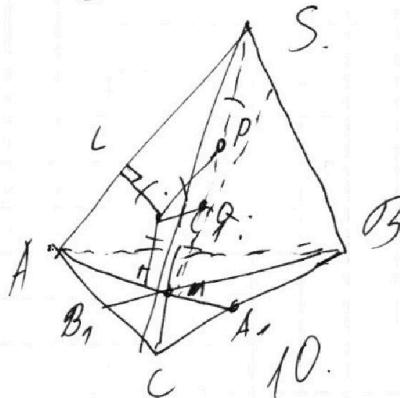
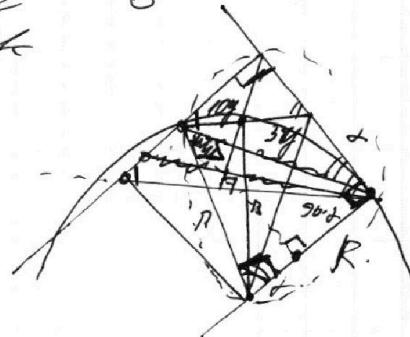
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1/2

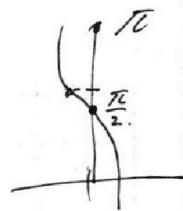
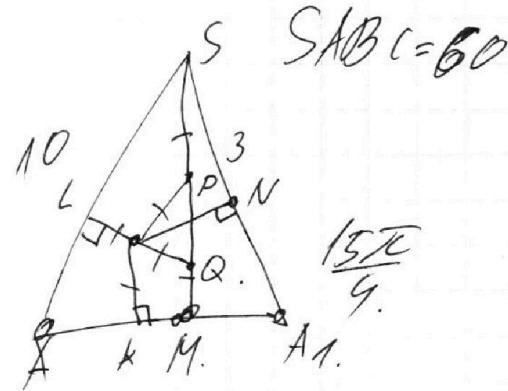


~~5π/2~~
~~3~~
Черновик

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \text{иск 10π}$$



$$ABC = 60^\circ$$



$$\frac{5\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$\frac{2\pi}{2}.$$

$$-1. \quad \left(-\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$5\pi. \quad \cancel{\frac{13\pi}{4}}. \quad \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

2/2.

$$-\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4}. \quad \frac{13\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}. \quad \frac{9\pi}{4}$$

$$\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{9\pi}{4}. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}.$$