



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- 3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- 7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим кол-во двоек в  $a$ ,  $b$  и  $c$  как  $a_2$ ,  $b_2$  и  $c_2$ .

тогда  $a_2 + b_2 \geq 16$ , так как  $ab \geq 2^6$ .

Аналогично:  $b_2 + c_2 \geq 14$  и  $c_2 + a_2 \geq 16$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 & 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 36 \\ b_2 + c_2 \geq 14 & a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_2 + c_2 \geq 16 & \end{cases} \quad \text{или } (a_2 + b_2 + c_2 = 18 \text{ при } a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = 12)$$

количество троек обозначим  $a_3$ ,  $b_3$  и  $c_3$ .

тогда:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 13 & 2a_3 + 2b_3 + 2c_3 \geq 59 \\ b_3 + c_3 \geq 21 & a_3 + b_3 + c_3 \geq 29,5 \\ c_3 + a_3 \geq 25 & \end{cases} \quad \text{— } a_3, b_3, c_3 \text{ — целые числа}$$

значит их сумма не может равняться не целому числу, а значит  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$ .

это возможно при  $a_3 = 9$ ,  $b_3 = 5$ ,  $c_3 = 16$ .

кол-во пятерок обозначим  $a_5$ ,  $b_5$  и  $c_5$ .

$$a_5 + c_5 \geq 28 \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq 28 \quad \text{это возможно}$$

при  $a_5 = 14$ ,  $c_5 = 14$ ,  $b_5 = 0$ .

$$\text{Итого: } a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \Rightarrow abc \geq 3^{30}$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \Rightarrow abc \geq 5^{28}$$

$$\text{Наименьшее значение } abc = \underline{2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$$

← Ответ.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

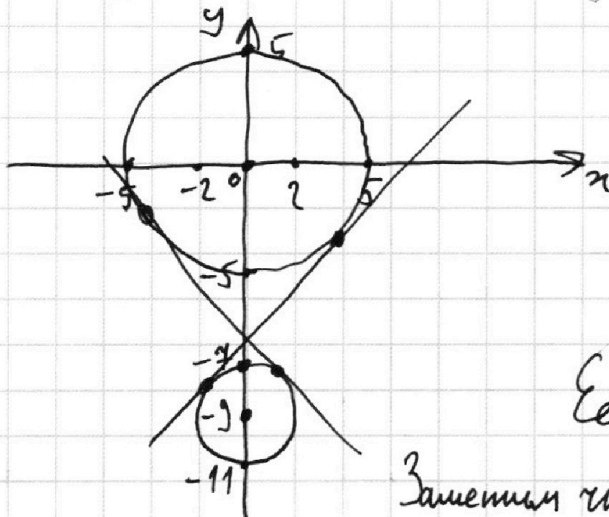
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

Нарисуем  $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$



Заметим что  $5x + 6ay - b = 0$

это прямая.

$$x = \frac{b}{5} - \frac{6a}{5}y$$

Ее угловой коэффициент  $-\frac{6a}{5}$ .

Заметим что если ее угловой меньше

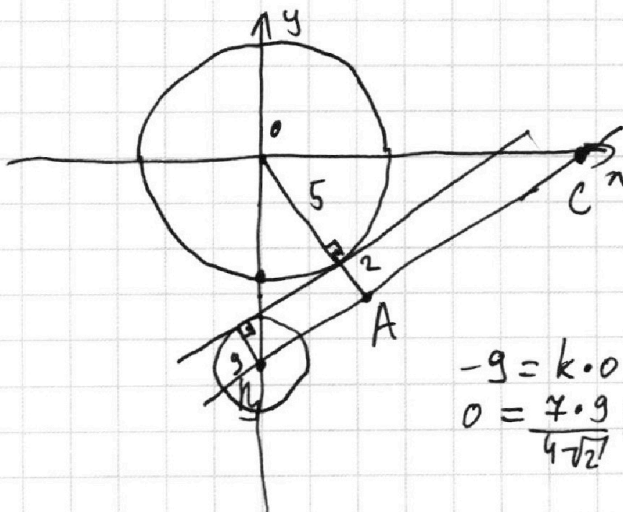
чем у касательной к обеим окружностям (как на рисунке)

то всегда можно найти ~~касательную~~ прямую которая

будет пересекать обе окружности а значения будут

4 <sup>корня</sup> ~~радикала~~. Если угловой больше, ~~то~~ <sup>корней</sup> больше 2 ~~радикала~~

быть не может.



$$AB = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}$$

~~OK = OA~~  
~~BC = OB~~

$$OC = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{7 \cdot 9}{4\sqrt{2}}$$

$$k = \frac{9 \cdot 4\sqrt{2}}{7 \cdot 9} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Угловой:  $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$$\begin{aligned} -9 &= k \cdot 0 + b \\ 0 &= \frac{7 \cdot 9}{4\sqrt{2}} k + b \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} 3 \cdot 11^{-2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x = 6 \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x - 5$$

$$\log_{11}^4 x = 5 \frac{1}{3} \frac{1}{\log_{11} x} - 5$$

Обозначим  $a = \log_{11} x$

$$a^4 = 5 \frac{1}{3} \frac{1}{a} - 5$$

$$a^5 + 5a = 5 \frac{1}{3}$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 11 = \log_{11} 3 (11^{-3}) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) = \left(-\frac{13}{3} - 1\right) \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5$$

$$\log_{11}^5 (0,5y) = \frac{16}{3} - 5 \log_{11} (0,5y)$$

Обозначим  $b = \log_{11} (0,5y)$

$$b^5 + 5b = -\frac{16}{3}$$

Заметим что функции  $x^5$  возрастающая и  $5x$  тоже возрастающая, значит  $x^5 + 5x$  возрастающая,

значит  $a$  и  $b$  имеют единственный корень.

$$\begin{aligned} a^5 + 5a &= 5 \frac{1}{3} \\ (-a)^5 + 5(-a) &= -5 \frac{1}{3} \\ b &= -a. \end{aligned}$$

$$\log_{11} x = -\log_{11} (0,5y)$$

$$x = \frac{1}{0,5y}$$

$$0,5xy = 1$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Посмотрим какими линиями ограничит параллелограмм.

Правая линия (точки Q и R)  $Q: 90 = k \cdot 2 + b$

$R: 0 = k \cdot 17 + b$

$$\begin{cases} 90 = 2k + b \\ -90 = 15k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 17k + b \\ k = -6, b = 102 \end{cases}$$

Правая линия:  $y = -6x + 102$

левая линия (точки O и P)  $O: 0 = k \cdot 0 + b$

$P: 90 = -15k + b$

$$\begin{cases} b = 0 \\ k = -6 \\ 90 = -15k + b \\ b = 0 \end{cases}$$

левая линия:  $y = -6x$

Верхние и нижние линии  $y = 90$  и  $y = 0$ .

Разделим весь параллелограмм на <sup>по</sup> линии  $6x + y = m$

получим ~~18~~ <sup>19</sup> линий в каждой из которых 16 точек с целыми координатами

Получим 18 линий в каждой из которых 16 точек и

еще 75 линий в каждой из которых 15 точек с целыми координатами.

ответ:  $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

Заметим что если мы берем две точки некоординатные на одной прямой ( $bx + y = m$ ), то  $bx_1 + y_1 = bx_2 + y_2$ .

Если точка В лежит на прямой  $\{bx + y = 102$ , то точка А должна лежать на прямой  $bx + y = 54$ .

Если точка В лежит на прямой  $bx + y = m$ , то точка А должна лежать на прямой  $bx + y = k$ ,  $m - k = 48$ .

Посчитаем сначала прямые на которых 16 точек.

Точка В может лежать на 10 из них. Всего пар точек тогда:  $16 \cdot 16 \cdot 10$ .

Посчитаем две прямые на которых 15 точек.

Точка В может лежать на  $102 - 48 + 1 - 10 = 45$  прямых

Всего пар точек тогда:  $15 \cdot 15 \cdot 45$

Всего пар А и В тогда:  $16 \cdot 16 \cdot 10 + 15 \cdot 15 \cdot 45 =$   
 $= 2^3 \cdot 5 + 3^4 \cdot 5^3 = 2560 + 10125 = 12685$ .

Ответ: 12685.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$a+b=13$$

$$a+b=11$$

$$b+c=21$$

$$b+c=13$$

$$a+c=25$$

$$a+c=29$$

$$a-b=4$$

$$c-a=2$$

$$2a=17$$

$$2c=30$$

$$a+b=6 \quad 3$$

$$b+c=14 \quad 7$$

$$a+c=16 \quad 8$$

$$a-b=2$$

$$2a=8$$

$$2a+2b+c=46+13$$

$$c=15$$

$$=59$$

$$30$$

$$+ \begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$26$$

~~$$a=18$$~~

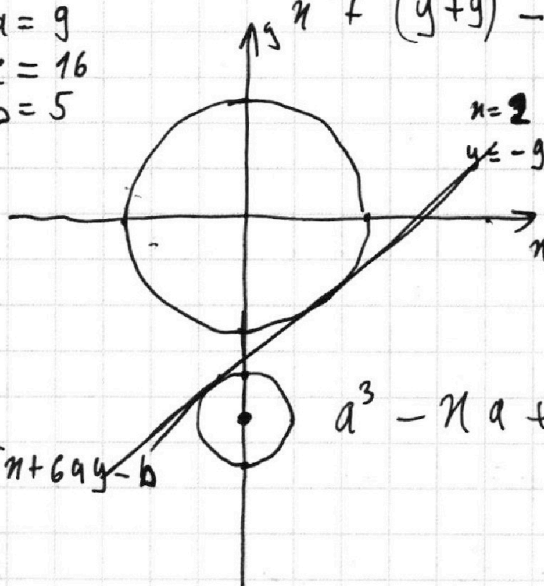
$$a=9$$

$$c=16$$

$$b=5$$

$$y^2+18y+81$$

$$x^2+(y+9)^2-4$$



$$x=2$$

$$y=-9$$

~~scribbled out text~~

$$a^3 - \pi a + (\pi^2 + 5) \frac{1}{a}$$

$$x^2 + y^2 - 25 = 5x + 6ay - b$$

$$0 \leq 6x + y \leq 102$$

$$6ay = b - 5x$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a}$$

$$y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 6} \\ \underline{6} \phantom{0} \\ 42 \phantom{0} \\ \underline{42} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

16

$$\begin{array}{r} a^5 + \cancel{0a^4} + 0a^3 + \cancel{0a^2} + 5a + 5\frac{1}{3} \overline{) a^2 + \pi} \\ \underline{a^5 + \pi a^3} \phantom{+ 5a + 5\frac{1}{3}} \\ -\pi a^3 + 5a \phantom{+ 5\frac{1}{3}} \\ \underline{-\pi a^3 - \pi^2 a} \phantom{+ 5\frac{1}{3}} \\ (\pi^2 + 5)a + 5\frac{1}{3} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$900a^2 - b^2 + 625 = 0$$

$$25(4 - (y+9)^2) = b^2 + 36a^2y^2 - 12aby$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 = 100 - 28y^2 - 25 \cdot 18y$$

$$(36a^2 + 25)y^2 - (12ab - 25 \cdot 18)y + b^2 + 77 \cdot 25 = 0$$

$$(12ab - 25 \cdot 18)^2 - 4(36a^2 + 25)(b^2 + 77 \cdot 25) =$$

$$= 144a^2b^2 + 25^2 \cdot 18^2 - 50 \cdot 12 \cdot 18ab - 4(36a^2b^2 + 36a^2 \cdot 77 \cdot 25 + 25b^2 + 625 \cdot 77) =$$

$$= 625 \cdot 18^2 - 625 \cdot 308 - 144 \cdot 77 \cdot 25a^2 - 50 \cdot 12 \cdot 18ab - 100b^2 =$$

$$= 625 \cdot 16 - 7 \cdot 11 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 a^2 - 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^3 ab - 5^2 \cdot 2^2 b^2 =$$

$$= 100 - 77 \cdot 36a^2 - 36ab - b^2$$

$$\begin{cases} 77 \cdot 36a^2 + 36ab + b^2 - 100 = 0 \\ 900a^2 - b^2 + 625 = 0 \end{cases}$$

$$b = \pm \sqrt{900a^2 + 625}$$

$$b = \frac{-36a \pm \sqrt{36a^2 + 4 \cdot 100 \cdot 2772a^2}}{2} = -18a \pm \sqrt{277524a^2}$$

$$900a^2 + 625 = 324a^2 + 277524a^2 \pm$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 36 \\ 47 \\ \hline 252 \\ 252 \quad 10 \\ \hline 2772 \\ - 324 \\ \hline 2448 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

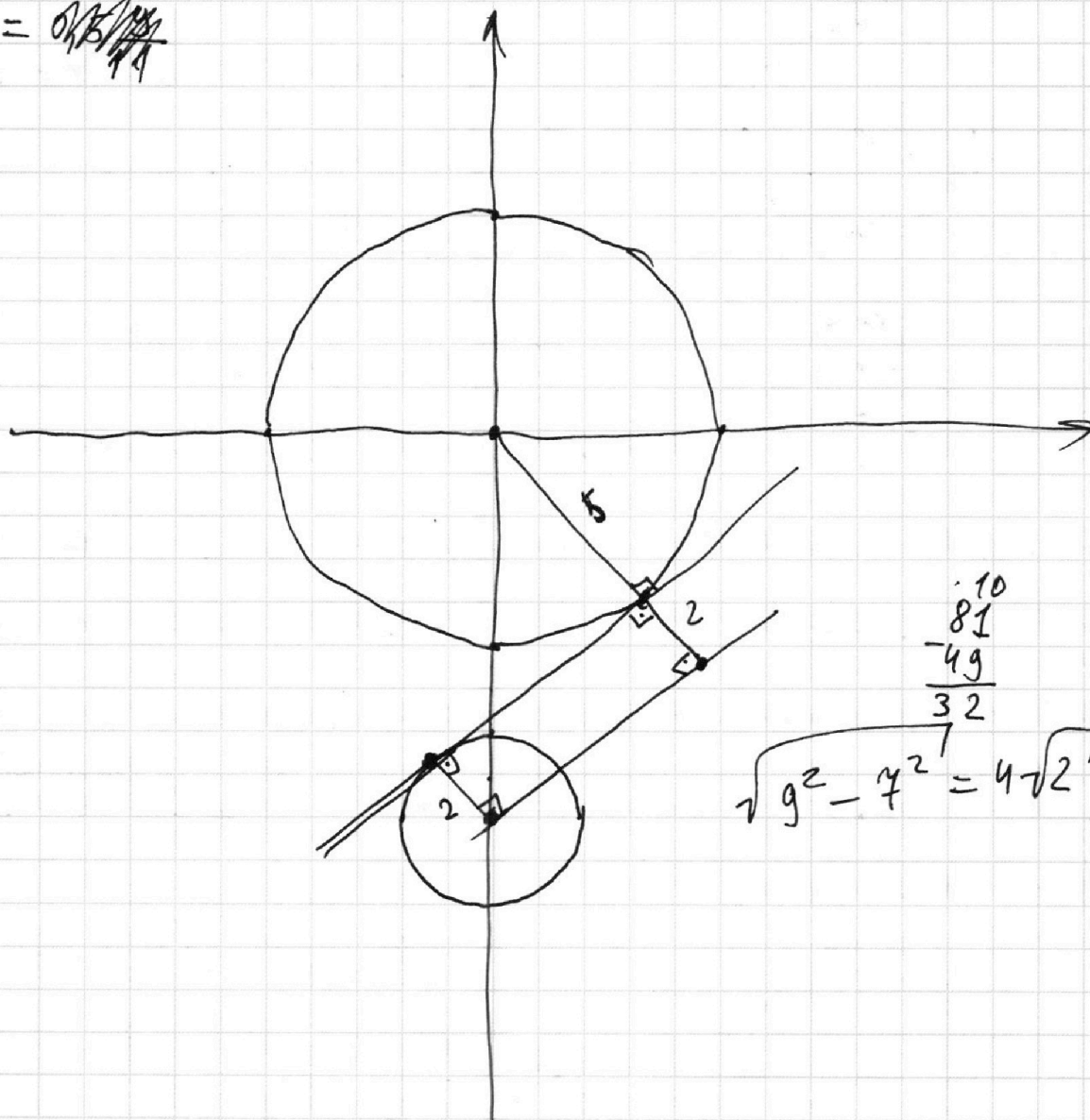
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x = -\log_{11} (0,5y)$$

$$x = 11^{\log_{11} 0,5y} \quad x = \frac{1}{0,5y}$$

$$x = \frac{2}{y}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



48

55

70

8

102

~~18.91~~ 18.91

$$\begin{array}{r} \times 91 \\ 18 \\ \hline 728 \\ 91 \\ \hline \end{array}$$

5120 1638

$$\begin{array}{r} 310 \\ -102 \\ \hline 48 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 512 \\ 5 \\ \hline 2560 \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 81 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 102$$

$$3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$$

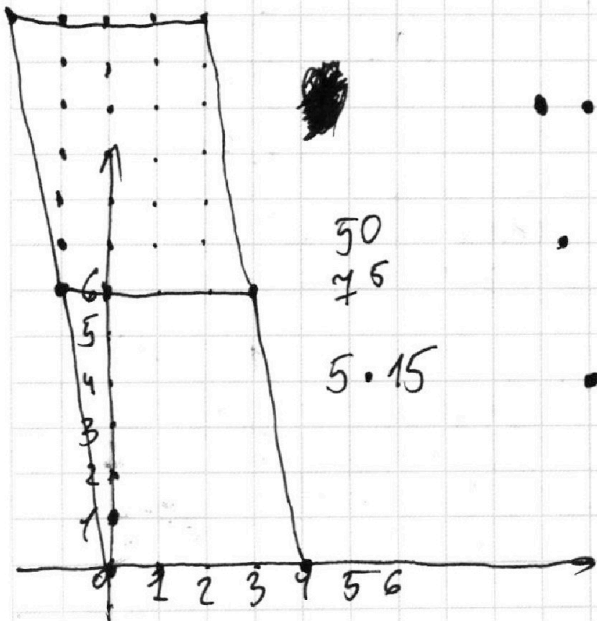
$$3^4 \cdot 5^3$$

$$2^8 \cdot 10$$

$$2^9 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ +10125 \\ +2560 \\ \hline 12685 \end{array}$$

512.5





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 \pi - \frac{6}{\log_{11} \pi} = \frac{2}{3} \log_{11} \pi - 5$$

$$\log_2^3 2^3 \quad \log_{11}^4 \pi - \frac{6}{\log_{11} \pi} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11} \pi} - 5$$

$$\frac{1}{3} \log_2 2^3$$

$$\log_2 \quad \log_2 2^3 = 3 \quad \log_{11}^4 \pi = 5 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} \pi} - 5$$

$$\frac{1}{\log_2 2^3}$$

$$a^4 - 5 \frac{1}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0$$

$$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11}^4(k) + \log_k 11 = \frac{13}{3} \log_k 11 - 5$$

$$\log_{11}^4(k) = -\frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} k} - 5$$

$$\begin{array}{r} \times 0,89 \\ 0,9 \end{array}$$

$$6^4 = -\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{6} - 5$$

$$\begin{array}{r} \times 0,81 \\ 0,9 \end{array}$$

$$6^5 = -\frac{16}{3} - 5b$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 81 \end{array}$$

$$6^5 + 5b = -\frac{16}{3} - 5 - \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 648 \end{array}$$

$$a^5 + 5a + 5(a+b) = 0$$

$$a = -8,6561$$

$$-5 \pm \frac{\sqrt{25 - 20 \frac{1}{3}}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 0,6561 \\ 4,5 \\ \hline 5,1 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$x^2 + y^2 - 25 = 5x + 6ay - b$~~

72 144

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$x = \sqrt{25 - y^2}$$

$$x = \frac{b - 6ay}{5}$$

$$\sqrt{25 - y^2} = \frac{b - 6ay}{5}$$

$$25(25 - y^2) = b^2 - 12aby + 36a^2y^2$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 - 625$$

$$36a^2y^2 - (12ab - 25)y + b^2 - 625$$

~~$y$~~   $(12ab - 25)^2 - 4 \cdot 36a^2 \cdot (b - 25)(b + 25) = 0$

$$144a^2b^2 + 625 - 2 \cdot 12 \cdot 25ab - 4 \cdot 36 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot 36 \cdot 625a^2$$

$$144 \cdot 625a^2 - 24 \cdot 25ab + 625 = 0$$

$$x = \sqrt{4 - (y + 9)^2}$$

$$x = \frac{b - 6ay}{5}$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y + 9)^2 - 4) = 0$$

$$x = \sqrt{25 - y^2}$$

$$x = \sqrt{4 - (y + 9)^2}$$

$$x = \frac{b - 6ay}{5}$$

$$x = \frac{b - 6ay}{5}$$

$$25(25 - y^2) = b^2 + 36a^2y^2 - 12aby$$

$$(36a^2 + 25)y^2 - 12aby + b^2 - 625 = 0$$

$$144a^2b^2 - 4 \cdot (b^2 - 625)(36a^2 + 25) = 0$$

$$144a^2b^2 - 4b^2 \cdot 36a^2 - 100b^2 + 4 \cdot 625 \cdot 36a^2 + 400 \cdot 625$$

$$4 \cdot 100 \cdot 900a^2 - 100b^2 + 62500 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

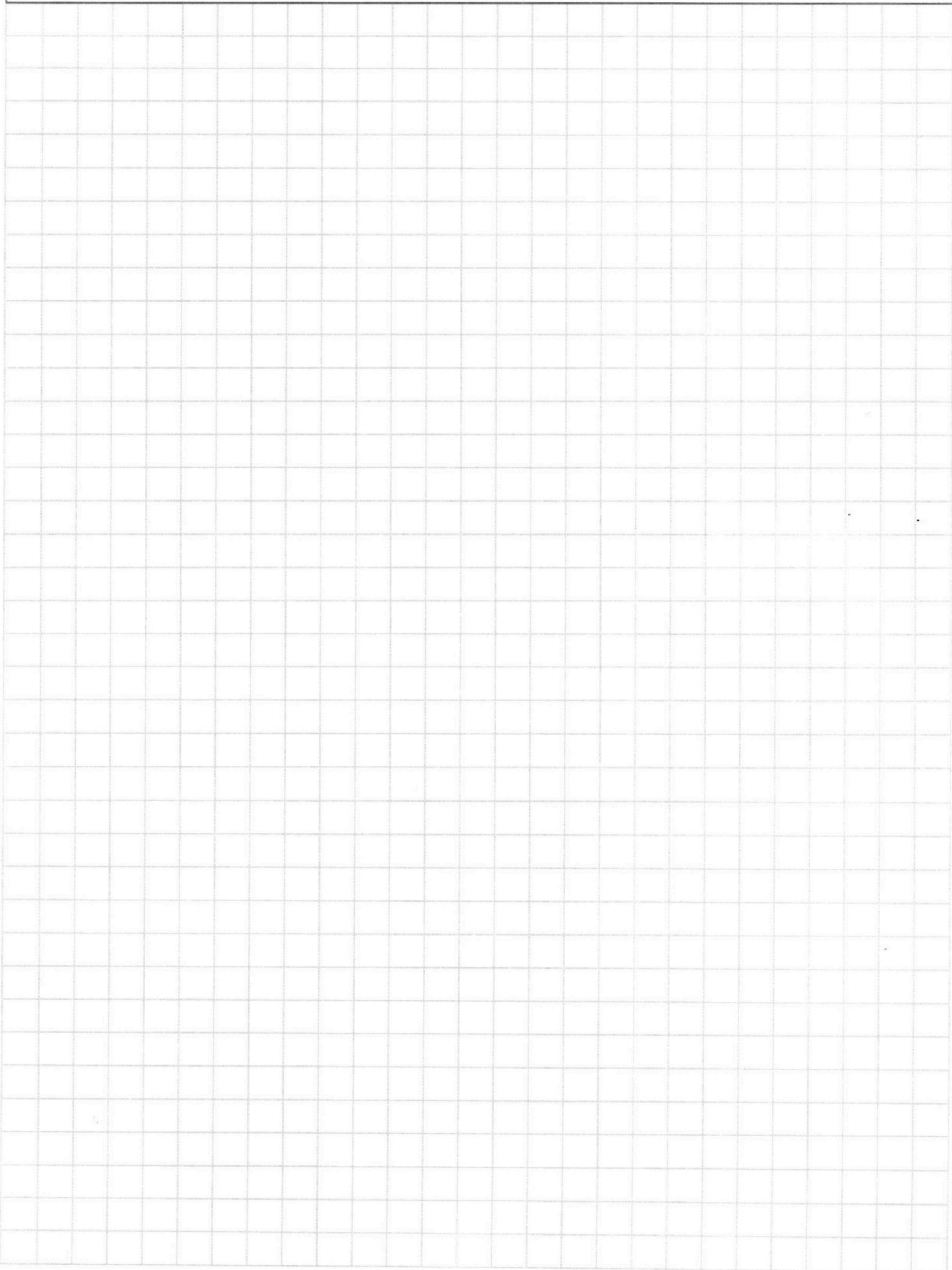
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

