МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

здесь x_1, y_1, z, и тд — натуральные числа!!!

Числа a, в и c должны быть вида $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$; $в = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$; $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$, т.к. если у них есть ещё какие-то простые множители, т. авс точно не будет наименьшим

$авс = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3}$

При этом $ав : 2^9 3^{10} 5^{10}$ и тд по условию

для иксов: $\Rightarrow x_1+x_2 \geqslant 9$; $x_2+x_3 \geqslant 14$; $x_1+x_3 \geqslant 19$

Тогда $x_1+x_2+x_3 \geqslant \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{2} \geqslant \frac{9+14+19}{2} = 21$

(знак '+' т.к при произведении степени складываются)

$x_1+x_2+x_3 \geqslant 21$

Аналогично для игреков и зетов:

$y_1+y_2+y_3 \geqslant \frac{10+13+18}{2} = 20\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ их сумма тоже игреки целые $\Rightarrow y_1+y_2+y_3 \geqslant 21$

$z_1+z_2+z_3 \geqslant \frac{10+13+30}{2} = 26\frac{1}{2}$

$z_1+z_2+z_3 \geqslant 27$

Чтобы авс было минимально, $x_1+x_2+x_3$, $y_1+y_2+y_3$, $z_1+z_2+z_3$ тоже должны быть минимально возможными

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 21$; $y_1+y_2+y_3 = 21$; $z_1+z_2+z_3 = 27$

И минимальное $авс = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

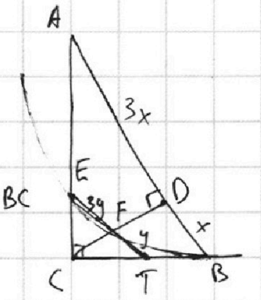
№2. по условию:

$\angle C=90^\circ$. $CD \perp AB$

B - точка касания

$AB \parallel EF$, $\frac{AD}{BC}=\frac{3}{1}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ - ?



$\triangle ACD \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$

и $\triangle ACD \sim \triangle ECF$

по 2 углам.

Пусть $T = EF \cap BC$.

Тогда TB - касательная к окр., TE - секущая

$\Rightarrow TF \cdot TE = BT^2$

Пусть еще $AD=3x$ и $BD=x$ и $EF=3y$ и $FT=y$

(Заметим, что $\frac{EF}{TF}=\frac{AD}{BD}$ из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle ACD$ по 2 углам)

Тогда $BT=\sqrt{TF\cdot TE}=\sqrt{y\cdot(3y+y)}=2y$

При этом CD - высота $\triangle ABC$

$\Rightarrow CD=\sqrt{BD\cdot AD}=\sqrt{3}x$

$\Rightarrow$ из $\triangle BCD$: $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=2x$

и $CT=\frac{y}{x}\cdot 2x=2y$ $\Rightarrow BT=\cancel{2y}\ 2x-2y$

$\Rightarrow 2y=2x-2y$

$y=2x$

$\Rightarrow$ т. T - середина BC. Тогда и т. E - середина AC

$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}\cdot\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$. ~~(из подобия)~~ (т.к. одна высота)

$S_{\triangle CEF}=S_{\triangle ACD}\left(\frac{CE}{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot S_{\triangle ACD}$ (из подобия)

$\Rightarrow S_{\triangle CEF}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{3}{16}S_{\triangle ABC}$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$. Мы знаем, что $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Тогда $5\arcsin(\cos x) = 5\cdot(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n)$,
где n - такое целое число, что $\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

(промежуток такой, т.к. arcsin может принадлежать только ему)

$\Rightarrow \quad 5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 10\pi n + 2\pi = 2\pi(5n+1)$

$x = \frac{\pi}{3}(5n+1)$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le -x + 2\pi n \le 0$

$-\pi \le -\frac{\pi}{3}(5n+1) + 2\pi n \le 0$

$-1 \le -\frac{5n+1}{3} + 2n \le 0$

$-3 \le -5n - 1 + 6n \le 0$

$-2 \le n \le 1$ и $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Возможные значения n: $-2; -1; 0; 1$.

Им соответствуют решения уравнения:

$x_1 = \frac{\pi}{3}(5\cdot(-2)+1) = -3\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{3}(5(-1)+1) = -\frac{4\pi}{3}$

$x_3 = \frac{\pi}{3}(0+1) = \frac{\pi}{3}$

$x_4 = \frac{\pi}{3}(5\cdot 1 + 1) = 2\pi$

Ответ: -3π; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 2π

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

a-? (такие, что найдётся b, при которых у системы 4 ~~корня~~ решения)

Решим задачу графически.

Второе ур-е в системе задаёт 2 окружности:

$x^2+y^2=9$ центр - $(0;0)$; $r=3$

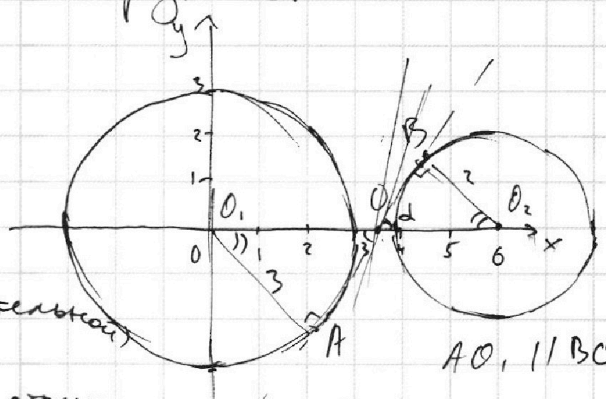
и $x^2+y^2-12x+32=0$

$(x-6)^2+y^2=4$ центр - $(6;0)$; $r=2$

Заметим, что у этих окружностей нет общих точек.

$ax+2y-3b$ - прямая

$y=-\frac{ax}{2}+3b$



$AO_1 \parallel BO_2$

Когда угол наклона этой прямой между $\alpha>0$ (наклоном касательной) и $\frac{\pi}{2}$ или $-\alpha$ (наклоном касательной с отриц. знаком) и $-\frac{\pi}{2}$, система не будет иметь 4 решения ни при каком b, т.к. у прямой с окружностями будет от 0 до 2 точек пересечения

найдём α - угол наклона общей касательной к окружностям, причём внутренней. $(\alpha>0)$

см. рис: A и B - т. касания O_1 и O_2 - центры окр.

$$O=O_1O_2 \cap AB$$

$\alpha=\angle BOO_2 \Rightarrow -\frac{a}{2}=tg\,\alpha=tg\,\angle BOO_2$

$$6=O_1O_2=OO_1+OO_2=\frac{AO_1}{\sin\alpha}+\frac{BO_2}{\sin\alpha}=\frac{AO_1+BO_2}{\sin\alpha}=\frac{2+3}{\sin\alpha}=\frac{5}{\sin\alpha}$$

$\sin\alpha=\frac{5}{6}$

$(0<)\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{5}{6})^2}=\frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}}$ $tg\,\alpha<-\frac{a}{2}<\infty$

$\frac{5}{\sqrt{11}}<-\frac{a}{2}<\infty \Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}}>a>-\infty$

$a\in(-\infty;-\frac{10}{\sqrt{11}})$

Также в ответе будет $a\in(\frac{10}{\sqrt{11}};+\infty)$, т.к. график симметричен относительно оси x $\Rightarrow$ у второй внутр. кас. угол наклона $=-\alpha$

Ответ: $a\in(-\infty;-\frac{10}{\sqrt{11}})\cup(\frac{10}{\sqrt{11}};+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. $243=3^5$

xy - ? $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

и $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

пусть $a = \log_3 x$ и $b = \log_3 5y$ $\frac{1}{a} = \log_x 3$; $\frac{1}{b} = \log_{5y} 3$

Тогда используя различные преобразования логарифмов получим:

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$; $b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$

Упростим: $2a^5 + 16a + 7 = 0$; $a \neq 0$ (*)

и $2b^5 + 16b - 7 = 0$; $b \neq 0$

$f(a) = 2a^5 + 16a + 7$ ↗ т.к. это сумма возрастающих функций

=> ур-е $2a^5 + 16a + 7 = 0$ имеет 1 корень на R

=> единственно возможное число x удовлетворяет ур-ю $a = \log_3 x$

Аналогичные рассуждения можно провести для $5y$ и $f(b)$

x и y - единственные => xy тоже.

Теперь сложим ур-я в (*) => $2(a^5 + b^5) + 16(a+b) = 0$

$2(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$a + b = 0$

$\log_3 x + \log_3 5y = 0$

$\log_3(5xy) = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0,2$

... решать не надо, т.к. уже нашли единственные возможные значения xy.

Заметим ещё, что x и y, при которых ур-я * имеют решения, точно есть, т.к. 'исключения ОДЗ' вроде $x=1$ и $y=1$ - не корни.

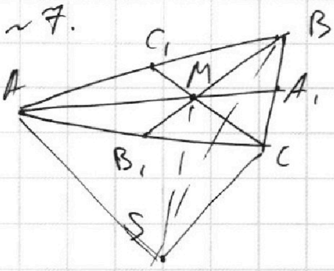
Ответ: $xy = 0,2$. (больше значений xy нет)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

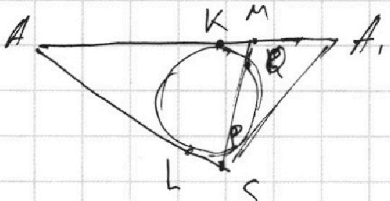
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



Рассмотрим $\triangle ASA_1$:



$SP = MQ$

сфера в сечении S представляет собой окружность, вписанную в $\angle A_1AS$

По т. ~~об отрезках длин~~ о кас. и секущей:

$SP \cdot SQ = SL^2$; $MQ \cdot MP = KM^2$

Но по условию $SP = MQ$

$\Rightarrow SL^2 = KM^2$; $SL = MK$

При этом $AK = AL$ (касат. из одной точки)

Получили, что $AS = AL + SL = AK + KM = AM$

$\Rightarrow AM = AS = 12$. $\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2}AM = 18$

Тогда $A_1M = 18 - 12 = 6 = A_1B = A_1C$

$\Rightarrow \triangle BMA_1$ и $\triangle CMA_1$ – р/б $\triangle$

$\Rightarrow$ т. A_1 равноудалена от т. B, M и C

$\Rightarrow A_1$ – это центр оп. окр. в $\triangle BCM$

$R = A_1M = 6$

$\Rightarrow$ $\angle M$ в этом $\triangle$ опирается на диаметр

$\Rightarrow \angle BMC = 90°$

$\Rightarrow$ $S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} BM \cdot CM$

Также, т.к. медианы делят треугольник ABC на 6 равных $\triangle$ поменьше, $\Rightarrow$ $S_{\triangle BMC} = S_{\triangle A_1BM} + S_{\triangle CA_1M} =$

$= 2 \cdot \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30$.

$\Rightarrow BM \cdot CM = 2 S_{\triangle BCM} = 60$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = AA_1 \cdot \frac{3}{2}BM \cdot \frac{3}{2}CM =$

$= \frac{9}{4} AA_1 \cdot BM \cdot CM = \frac{9}{4} \cdot 18 \cdot 60 = 2430$

Ответ: а) 2430

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7б (п.а на другом листе)

$SN=4$, ~~...~~ $NO=5$ (где O – центр сферы)

$\Rightarrow$ По т. Пифагора из $\triangle SON$:

$SO=\sqrt{NO^2+SN^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

$OK=ON=5$

$KO\perp ABC \Rightarrow KO\perp BC$

$NO\perp BCS \Rightarrow NO\perp BC$

$\Rightarrow BC\perp (NOK)$

$\Rightarrow$ Пусть $F=BC\cap NOK$ $\Rightarrow KF\perp BC$

$\Rightarrow \angle KFN$ – лин. угол двугр. угла при ребре BC (т.е. искомого угла)

Пусть AH – высота основания

$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC$; $AH=\frac{2\cdot 90}{12}=15$

$\frac{KF}{AH}=\frac{A_1K}{AA_1}$ из подобия $\triangle A_1KF$ и $\triangle A_1AH$ по 2 углам

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

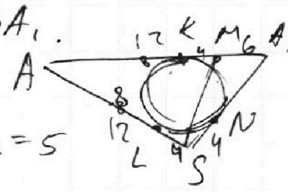
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~№7б (п.а) см на другой странице!)~~

Продолжим 'рассматривать' $\triangle ASA_1$.



из условия п. В следует, что окружность с радиусом $r = r_{сферы} = 5$ вписана в $\triangle ASA_1$; K, L и N – точки касания

$SN = 4$. $AS = 12$; $AA_1 = 18$.

$\angle(ABC; SBC) = \angle AA_1S$ т.к. из п.б. ясно, что т.к. сфера касается граней в т. M и N и ребра AS в т. L,

то $AA_1 \perp BC$ и $SA_1 \perp BC$

Найдём $\angle AA_1S$. $LS = SN = 4 \Rightarrow AL = 12 - 4 = 8 = AK$

$\Rightarrow MK = 12 - 8 = 4$;

$A_1M = A_1N = KM + A_1M = 4 + 6 = 10$. $\Rightarrow A_1S = 4 + 10 = 14$

$\Rightarrow$ стороны треугольника $= 12; 14; 18$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$; $bc: 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}$ $ac: 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

$2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$ $a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$

$x_1+x_2 \geq 9$

$x_2+x_3 \geq 14$

$x_1+x_2+x_3 \geq 21$

$x_1+x_3 \geq 19$

$2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}$

$y_1+y_2+y_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20{,}5$ $\frac{9+14+19}{2} = \frac{28+14}{2} = 7+14$

$\Rightarrow \geq 21$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{10+13+30}{2} = \frac{53}{2} = 26{,}5$

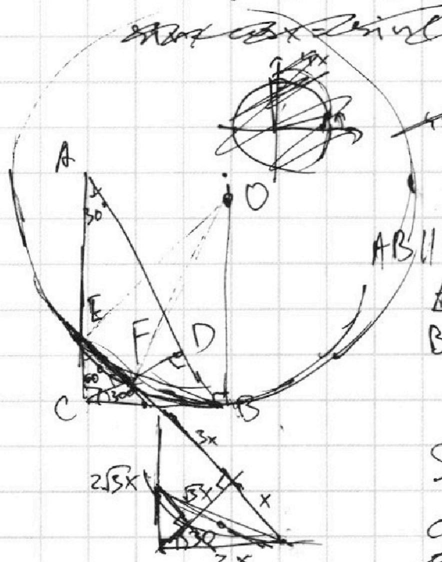
$t = \cos x$; $x \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow t \in [0;1]$

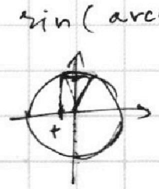
$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\sin(\arcsin t + \frac{\pi}{2}) = t = \cos x$

$\arcsin(\cos x) =$

$\arcsin t = \arccos(\sqrt{1-t^2})$





$AB \parallel EF$

$EF \cdot CF$?...

$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$

$\frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$

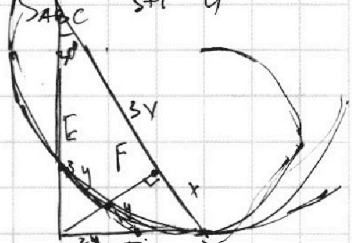
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ - ?

$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot BC$

$CO = \sqrt{3}x$

$\frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-(12x+32)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\sqrt{}$ $y = \frac{ax}{-2} + 3b$

$x^2+y^2=9$ $(x-6)^2+y^2=4$

$BT^2 = TF\cdot TE =$

$= (x-y)^2 = y\cdot 4y =$

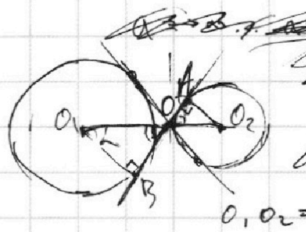
$x = 2y$ $= 4y^2$

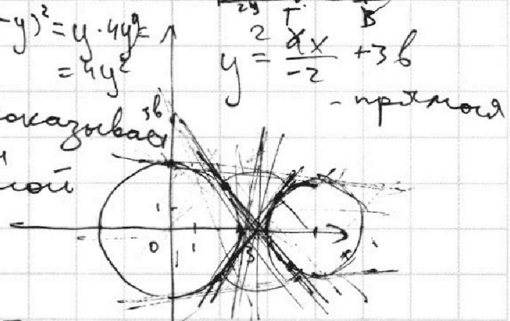
$x-y = y$

$y = \frac{ax}{-2} + 3b$

$\frac{a}{-2}$ - показывает наклон прямой

- прямая





$\frac{a}{-2} = \frac{2}{AO} = \frac{3}{BO}$

$O_1O_2 = 6 =$

$\sin\alpha = \frac{5}{6}$

$\frac{\sqrt{11}}{6}$

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$\left(-\infty; -\frac{5\sqrt{11}}{11}\right) \cup \left(\frac{5\sqrt{11}}{11}; +\infty\right)$ $\frac{a}{-2} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

$\frac{\pi}{2}-x+2\pi n\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$5\arcsin(\cos x)=5\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))$

$-x+2\pi n_1\in[-\pi;0]$

$=5\cdot(\frac{\pi}{2}-x+2\pi n)=x+\frac{\pi}{2}$

$10\pi n_1+\frac{5\pi}{2}-5x=x+\frac{\pi}{2}$

$6x=2\pi+10\pi n_1=2\pi(5n_1+1)$

$-\pi\le-\frac{\pi}{3}(5n_1+1)+2\pi n_1\le 0$

$-1\le-\frac{5n_1}{3}-\frac{1}{3}+2n_1\le 0$

$y=\frac{3}{2}6$ $x=\frac{\pi}{3}(5n_1+1)$

$-1\le\frac{n_1-1}{3}\le 0$ $-3\le n_1-1\le 0$

$-q\le n_1\le 1$

$n_1=-4;-3;-2;-1;0;1$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}(5n_1+1)$

$5\cdot\arcsin(\cos 2\pi)=\frac{5\pi}{2}$?

$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{19\pi}{3};\ -\frac{14\pi}{3};\ -3\pi;\ -\frac{4\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ 2\pi$

$\log_3(5xy)=\log_3 x+\log_3 5y$ урав...

$x^5+y^5=xy(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$

$\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3=$

xy - ?

$\log_3^4 x+\frac{6}{\log_3 x}=\frac{5}{2\log_3 x}-8$

$=\log_{25y^2}3^{11}-8$

$243=3^5$

$2\log_3^5 x+2\log_3^5(5y)+16\log_3 5xy=0$

$\frac{2\log_3^5 x+16\log_3 x+7}{\log_3 x}=0$

$\log_3^4(5y)+\frac{2}{\log_3 5y}$

$2\log_3 5xy($

$2\log_3^5 x+16\log_3 x+7=0$

$=\frac{11}{2}\frac{1}{\log_3 5y}-8$

$2\log_3^5(5y)-7+16\log_3 5y=0$

$-5,5=-3,5$ $2\log_3(5y)(8+\log_3^4$ $+\log_3 5y$

$2\log_3^5(5y)+16\log_3 5y-7=0$

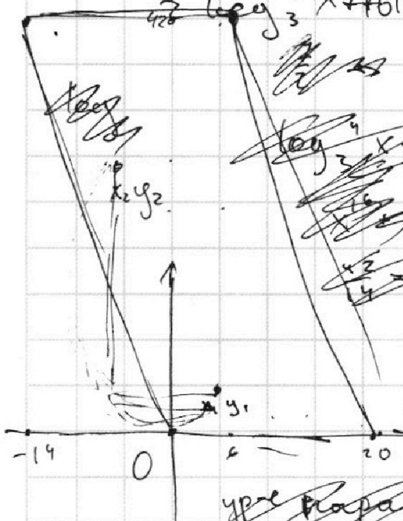
$2\log_3 5xy=0$

$\log_3 5xy=0$ кол-во пар точек.

$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$

$5xy=1$? $3(x_2-x_1)+y_2-y_1=33$

$y_2-y_1\ \vdots\ 3$ y_2-y_1



y_2-y_1	x_2-x_1
0	11
3	10
6	9
	8
33	0
36	-1
39	-2
42	-3

$0\le y_2-y_1\le 42$

$-20\le x_2-x_1\le 20$

урав парал.

$3(x_2-x_1)+y_2-y_1=33$

$xy=\frac{1}{5}$ $1=11-x_1+x_2$

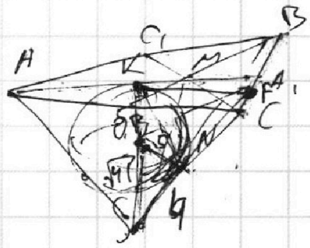
$x_1-x_2=10$ $3(11-x_1+x_2)$

$11-1$ $42=3\cdot 14$

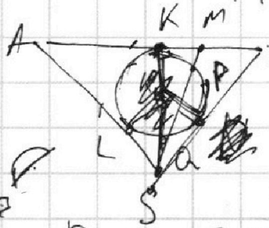
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$18^2+14^2-2\cdot 14\cdot 18\cdot \cos\angle = 12^2$

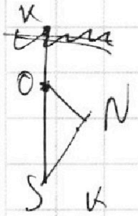


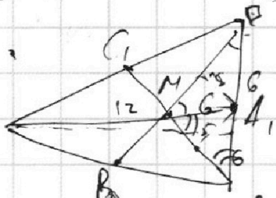
$AM = AS = 12$

$\Rightarrow AA_1 = 18$

$SN = 4$ $BC = 12$

$r = 5$





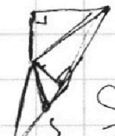
Don't you Dare

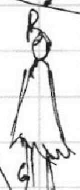
$S_{ABC} = 90$ дохе?

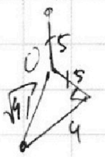
даиваtte!

$\Rightarrow AM = \frac{2\cdot 90}{12} = 15$

$130-36$







$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\angle A$

$CM\cdot BM?$

$9^2+7^2-2\cdot 7\cdot 9\cos\angle = 6^2$

$KF \perp BC$

$\cos\angle = \frac{81+49-36}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{94}{14\cdot 9}$

$S_{\triangle BA_1M} = 18\cdot \sin\angle BA_1M =$

$\frac{44}{2}\cdot 5 =$ $\sin MA_1F_1?$

$= \frac{90}{6} = \frac{30}{2} = 15$

$= 44\cdot 5 = 18\cdot$

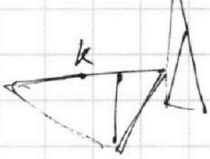
$\sin\angle BA_1M = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

$S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} BM\cdot \cos 2\angle =$

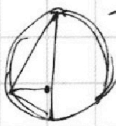
$CM =$

$\cos\angle BA_1M = \frac{\sqrt{11}}{6}$

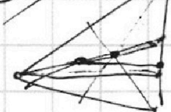
$\sin\frac{\angle}{2} = \pm\sqrt{\frac{1\pm\cos\angle}{2}} = \sqrt{\frac{1\pm\frac{\sqrt{11}}{6}}{2}}$



$=$



$\cos\frac{\angle}{2} = \sqrt{\frac{\cos 2\angle+1}{2}} = \sqrt{\frac{\pm\frac{\sqrt{11}}{6}+1}{2}}$



$\Rightarrow$

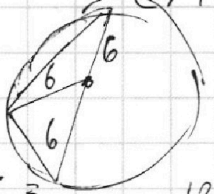
$BM = 2\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{11}}{6}}{2}}\cdot 6 = 12\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{11}}{6}}{2}}$

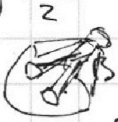
$\frac{220}{12\cdot 18} = \sin\angle$

$CM = 12\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{11}}{6}}{2}}$

$\frac{9}{4}\cdot 30\cdot 9$

$81\cdot 30 = 2430$





$\Rightarrow$ $BB_1\cdot CC_1 = 144\cdot\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{11}}{6}}{2}}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{11}}{6}}{2}} =$

$40+24$

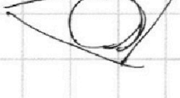
$81\cdot 2\cdot\sqrt{1-\frac{11}{36}} =$

$\frac{110}{6\cdot 18} = \frac{55}{3\cdot 18} =$

$12, 14, 18.$

$= \frac{5}{6}\cdot 81\cdot 2 =$

$= 5\cdot 27$

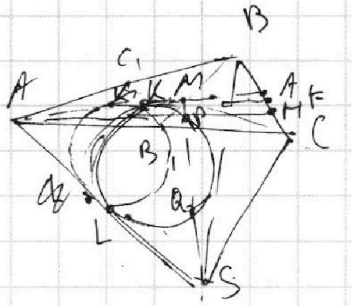


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AM = \frac{180}{12} = 15$

$SP = MQ$

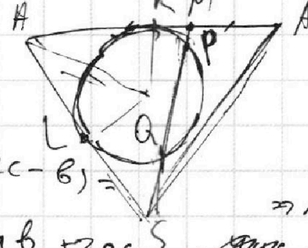
$S_{ABC} = 90$

$AA_1 : BB_1 : CC_1 - ?$

$AS = BC = 12$

$(2b-c)(2c-b)$

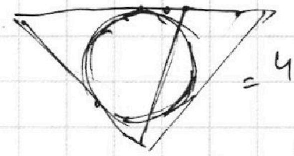
$AK = AL$



$SL^2 = SQ \cdot SP =$

$= SQ \cdot MQ = MP \cdot MQ =$

$(2a+2b-c)(2a+2c-b) =$

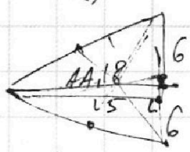


$\Rightarrow MP = SQ$

$= 4a^2 + 2ab + 2ac + \ldots + 5bc - 2c^2 - 2b^2 = MK^2$

$\Rightarrow SL = MK$

$\Rightarrow \triangle ASM$ - р/б. $AM = AS$



$\Rightarrow AM = BC$

$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot BC = 18$

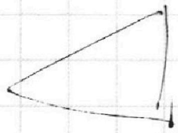
знаем: $2b + 2c - a$; a

$4AA_1^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

$4CC_1^2 = 2(BC^2 + AC^2) - AB^2$

$4BB_1^2 = 2(BC^2 + AB^2) - AC^2$

$\Rightarrow$ знаем $b+c$



$AB^2 + AC^2 = 4 \cdot 18^2 + 12^2 =$

$= 12^2 \cdot \ldots \cdot 10$

$5 \arcsin(-1) = -\frac{5\pi}{2}$

$5bc - 2c^2 - 2b \ldots ?$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$t = \log_3 x$

$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2}t + 8 = 0$

1	x	-1	x
$\frac{1}{2}$	x	$-\frac{1}{2}$	x
7	x	-7	x
$\frac{7}{2}$	x	$-\frac{7}{2}$	x

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42

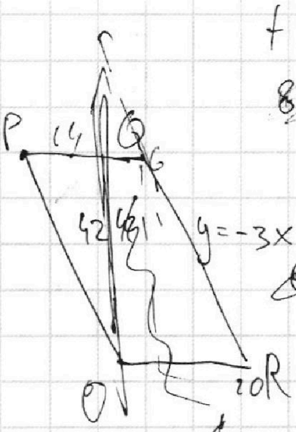
$\frac{2t^5 + 16t + 7}{t} = 0$

$t \neq 0$

$8a^4 + 16 = 8(a^4 + 2)$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$2b^5 + 16b + 7 = 0$



$y = -3x + b$

$2(a^5 + b^5) + 16(a+b) = 0$

$(a+b)(2(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 \ldots + b^4) + 16) = 0$

$2 - \frac{11}{2} = -\frac{7}{2}$

$42 \geq y_2 - y_1 \geq -42$

$A \equiv P \to$

$\mathrm{tg} = -3$

$3(x_2 + 14) + y_2 - 42 = 33$

$y_1 \leq -3x + 60$

$$\begin{cases} 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \\ y_1 \leq -3x_1 + 60 \\ y_2 \leq -3x_2 + 60 \\ y_1 \geq -3x \quad y_2 \geq -3x \end{cases}$$

$42 \geq y_1 \geq 0$

$42 \geq y_2 \geq 0$