



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}, bc : 2^{12} 3^{20} 5^{15}, ac : 2^{14} 3^{27} 5^{39}$$

Пусть  $a : 2^x$ , тогда  $b : 2^{8-x}$ ,  $c : 2^{14-(8-x)} = 2^{6+x}$   
 $c : 2^{14-x}$ , тогда  $14-x = 6+x \Rightarrow x = 5$

Проверим сами  $a : 2^5, b : 2^3$  то  $ab : 2^8$ ,  
 $c : 2^9$  тогда  $bc : 2^{12}$ ,  $ac : 2^{14}$  - верно!

Пусть  $a : 3^y$ , тогда  $b : 3^{14-y}$ ,  $c : 3^{27-(14-y)} = 3^{13+y}$   
 $c : 3^{27-y}$ , тогда  $27-y = 13+y \Rightarrow y = 15$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то рассм.  $\frac{y}{2}$  или  $\frac{y}{3}$ ,  
знач.  $y \in \mathbb{N}$ , получим:  $y = 5$

При  $y = 5$ :  $a : 3^5 \Rightarrow b : 3^9 \Rightarrow c : 3^{22} \Rightarrow ac : 3^{27}$ , а  
необходимо чтоб  $bc : 3^{27}$  значит все  
подходит.

При  $y = 8$ :  $a : 3^8, b : 3^6, c : 3^{19} \Rightarrow ac : 3^{27}$  -  
подходит

Пусть  $a : 5^z$ , тогда  $b : 5^{12-z} \Rightarrow c : 5^{15-(12-z)} = 5^{3+z}$   
 $c : 5^{15-z}$ , тогда  $3z - z = 5 + z \Rightarrow 3z = 2z + 5 \Rightarrow z = 5$

проверим:  $a : 5^5 \Rightarrow c : 5^{22} \Rightarrow ac : 5^{27}$ ,  
 $ab : 5^{17}$  (удовлет.)  $bc : 5^{22}$  (удовлет.)

Итого  $abc = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 =$   
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$  - мин. возм. произв.

Ответ  $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

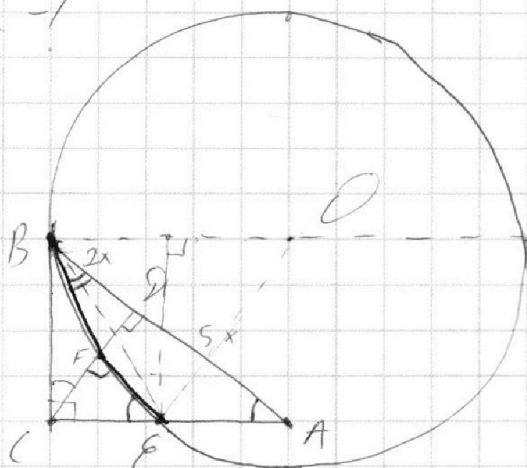
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S_{ABC} \rightarrow$   
 $S_{CFE}$



1) Пусть  $AD = 5x$ , тогда  $BD = 2x$

2)  $ABFE \sim \triangle ABC$

т.к.  $FE \parallel AB$  и  $AB \perp CD$ ,  
то  $FE \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

3)  $\triangle ABC \sim \triangle CFE$   
 $CB^2 = CE \cdot CA$

4)  $CD = \sqrt{BD \cdot AD}$  т.к.  $AB \perp CD$   
 $CD \perp AB$  - высота в  $\triangle ABC$   
в  $\triangle ABC$  -  $CD$

$$CD = \sqrt{2x \cdot 10x} = 2\sqrt{5}x$$

5) Пусть  $O$  - центр окружности, тогда  $OB \perp BC$  по  $OB$  - биссектрисе  $\angle C$  и  $OC \perp AC$ .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB; \quad S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{CD \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{CFE \sim CDA \text{ по 2 уг. } \angle A}{\angle DCA = \angle CFE, \angle CFE = \angle CPA = 90^\circ}$$

$$\text{по 3) } \frac{CF}{CE} = \frac{CA}{DA}, \text{ тогда } \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{AB \cdot AD}{FE \cdot FE} = \frac{45x^2}{FE^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \sin(\cos x) = 2 - 2x$$

$$\sin(\cos x) = \sqrt{2 - x^2}, \text{ при } x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\sqrt{2 - x^2} = 2 - 2x, \text{ т.к. } x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}], \text{ то } 2 - 2x > 0$$

т.к.  $\sqrt{2} \approx 1,41$ ,  $2x \leq 2$

следов. возв. в квадрат обе части уравн.

$$2 - 2x = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow 2 - 4x + 4x^2 = 2 - x^2$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 4x + 2 - 2 = 0$$

$$D = 16x^2 - 4x^2 + 4x^2 = 10(4x^2 - 4x^2)$$

$$x = \frac{4x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2}}{20x}$$

$$\frac{4x + \sqrt{4x^2 - 4x^2}}{20x} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x^2 - 4x^2} < 20x - 4x \quad \sqrt{2} > 3$$

$$\sqrt{4x^2 - 36} < 196$$

$$380 \cdot 100 < 196 \cdot 196$$

следов. нест.

следов.  $x > 0$

$$\frac{4x - \sqrt{4x^2 - 4x^2}}{20x} > -1$$

$$\text{т.к. } \frac{4x}{20x} - \frac{\sqrt{4x^2 - 4x^2}}{20x}$$

$$\text{нест. } > 0, \text{ а } \frac{4x}{20x} + x < 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{4x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2}}{20x}$$

$5835$   
 $796$   
 $+ 796$   
 $1796$   
 $+ 796$   
 $2596$   
 $+ 196$   
 $2796 > 30000$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*предел не равен*

$$\operatorname{tg} \angle B C = \frac{\alpha}{3} \quad \operatorname{tg}^2 \angle B C + 7 = \frac{7}{\cos^2 \angle B C} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}^2 \angle B C = \left(\frac{70}{7}\right)^2 - 7 = \frac{700 - 49}{49} = \frac{57}{49} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \angle B C = \pm \frac{\sqrt{57}}{7} = \frac{\alpha}{3} \rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{7} \sqrt{57}$$

Всегдав при  $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57})$  - 4 рещ. ~~то~~  
при нек. зн.  $\alpha$

$\alpha \in [-\frac{3}{7} \sqrt{57}; \frac{3}{7} \sqrt{57}]$  - все  $\rightarrow$  4 рещ. ~~то~~ при  
люб. зн.  $\alpha$

$\alpha \in (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$  - 4 рещ. ~~то~~ при нек. зн.  $\alpha$

Ответ:  $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



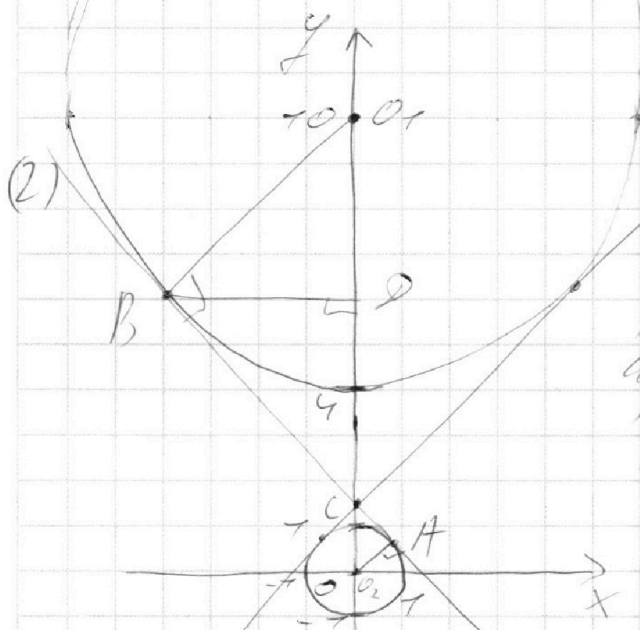
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 7)(x^2 + y^2 - 20x + 64) = 0 \end{cases}$$

Ур - иде кругов  
 $x^2 + y^2 = 7$  - ур. окр.  
 $x^2 + (y - 10)^2 = 36$  - ур. окр.

$ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  - ур. прямой



(1) Проведем две окружности касаясь. и эти окружности. Если правильно сформулировать задачу, то не будет касания. С одной из окружностей если вычислить угол касания до момента касания прямая не пересекает в одну точку касания, то не

будет касания. Не при касании в (по касанию не касаются). Найдем угол касания касания. Пусть  $O_1, O_2$  - центры окр. с радиусами  $6$  и  $\sqrt{7}$ .  $B$  и  $A$  - т. кас. окр.  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.  $T$  - пересеч. кас. с осью абсцисс (в одну точку они касаются в одной точке)

$\triangle O_1 B C \sim \triangle O_2 A C$  по 2 углам.  $\angle O_1 B C = \angle O_2 A C = 90^\circ$   
 Но в  $\triangle B C O_2$  радиус касания  $\sqrt{7}$  кас.  $\angle A C O_2 = \angle O_1 C B$  по 2 углам.  
 Верт. углы  $\frac{O_1 C}{O_2 A} = \frac{O_1 C}{O_2 C} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{\sqrt{7}} \Rightarrow O_1 C = 6 O_2 C$

$O_1 C + O_2 C = 7$  (т.к. ур. осей)  $\Rightarrow 3 O_2 C = 7 \Rightarrow O_2 C = \frac{7}{3}$   
 $\Rightarrow O_1 C = \frac{14}{3} \Rightarrow O_1 T = \frac{60}{3}, O_2 T = \frac{10}{3}$  - кас. т.с

по оси  $y$ .  $\frac{10}{3} = \frac{4}{3} b \Rightarrow b = \frac{75}{4}$ . Проведем  $B O_1$

$\triangle O_1 B T \sim \triangle O_1 C B$  по 2 углам.  $\angle O_1 B T = \angle O_1 C B = 90^\circ$   
 $\angle B O_1 C$  - острый. Тогда  $\frac{O_1 B}{O_1 C} = \frac{B T}{BC} = \frac{6 \cdot 7}{60 \cdot 70} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 + \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ 2x \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } 8x^3 = (2x)^3 \\ 625 = 5^4 \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = m \Rightarrow 5^m = 2x, \quad x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 0, \text{ тогда } m^4 - \frac{3}{m} = \frac{4}{3} \frac{1}{m} - 3 \Rightarrow \cdot m \neq 0$$

$$\Rightarrow m^5 + 3m - \frac{13}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4 4 + 4 + \log_{\frac{4}{5}} 5 = \log_{\frac{4}{5}^3} 0,2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 4 + \frac{4}{\log_5 4} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\log_5 4} - 3 \\ 4 \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 4 = n \Rightarrow 5^n = 4, \quad 4 \neq 1 \Rightarrow n \neq 0$$

$$\text{тогда } n + \frac{4}{n} = -\frac{7}{3} \frac{1}{n} - 3 \quad \cdot n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^5 + 3n + \frac{7}{3} = 0 \quad (2) \quad \text{Сом. (1) и (2):}$$

$$n^5 + m^5 + 3(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 -$$

$$- mn^3 + 3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m+n=0 \\ m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + 3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{нет} \\ \text{реш.} \end{array}$$

$$xy = \frac{5^m \cdot 5^n}{2} = \frac{5^{m+n}}{2} \quad \text{т.к. } m+n=0, \quad x \neq 0$$

$$xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 9 \text{ или } y_2 - y_1 \geq 0$$

9)  $x_2 - x_1 \leq 8$  или  $y_2 - y_1 \leq 0$   
т.е. граница пар. ~~всего~~  $x \leq 8$

$49 \cdot 2 = \frac{80}{16} = 5$  - усред. колл. 2-ой интервал.



т.е. количество 5 отч. по оси  $y$   
выбран. целевые коор. по оси  $x$   
при  $y=0$ : ~~т.е.~~ пар  $(x_2 - x_1) = 9$

т.е. во все пар  $19 = \left(\frac{80}{5} + 1\right) = 17$

$= 17 \cdot 9 = 153$  пар  $y$  сотор. один знак.  
по оси  $y$  и выкат.  $y_1 \geq 0$  и  $y_2 - y_1 \geq 0$ ,  
~~повторяющиеся~~

при  $y_2 - y_1 = 7$   $5(x_2 - x_1) = 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$  колл.  
долг, ~~значит~~  $(y_2 - y_1) : 5$ , т.е.

при  $\left. \begin{matrix} y_2 - y_1 = 5, & x_2 - x_1 = 8 \\ y_2 - y_1 = 10, & x_2 - x_1 = 9 \end{matrix} \right\} 9$  случаев

$y_2 - y_1 = 45 \quad x_2 - x_1 = 0$

I  $18 - 8 + 7 = 17$  пар  $(x_2 - x_1)$  и  $16$  пар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $16 \cdot 17$  пар  $y$  и  $x$  <sup>[3015]</sup>

II  $18 - 7 + 7 = 18$  пар  $(x_2 - x_1)$  и  $8$  пар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $12 \cdot 8$  пар  $y$  и  $x$  <sup>[3017]</sup>

III  $18 - 6 + 7 = 19$  пар  $(x_2 - x_1)$  и  $6$  пар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $13 \cdot 6$  пар  $y$  и  $x$  <sup>[3015]</sup>

IV  $18 - 5 + 7 = 20$  пар  $(x_2 - x_1)$  и  $4$  пар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $14 \cdot 4$  пар  $y$  и  $x$  <sup>[30120]</sup>

V  $18 - 4 + 7 = 21$  пар  $(x_2 - x_1)$  и  $3$  пар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $15 \cdot 3$  пар  $y$  и  $x$  <sup>[30125]</sup>

VI ~~каждый~~  $16 \cdot 2$ ; VII  $17 \cdot 2$

VIII  $18 \cdot 2$ ; ~~IX~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



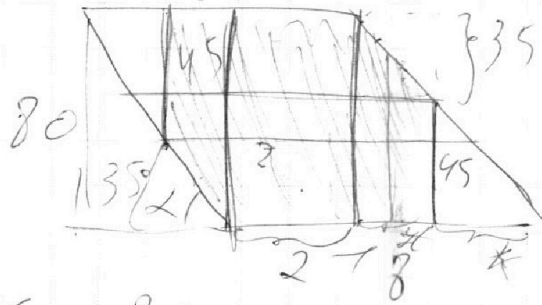
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

кредитовые

1X (ср.)



$$y_2 - y_1 = 45$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

$$\frac{k}{k+t} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$k+t = \frac{80}{5} = 16$$

$$\frac{k+t}{k} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \text{ (ср.)}$$

тогда  $k = 9 \Rightarrow t = 5$  тогда ср. 44 руб.

$$80 - 45 + 7 = 36 \text{ см. в сеч. } (y_2 - y_1) = 45$$

$36 \cdot 3$ ; ~~так~~ расчет тр. (ср. сеч.)

при сеч. 45 + см при 46 - 2 см 80 36 см

$$\text{итого } \frac{7+36}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 36 \text{ см } y \text{ сечей}$$

$$\text{трапеция итого в } 1X \text{ } 37 \cdot 36 \cdot 2 + 36 \cdot 3 = 36 \cdot 40 \text{ метров}$$

$W$  - всего метров, тогда при  $(y_2 - y_1) \geq 0$

$$\frac{W}{2} \text{ метров } \frac{W}{2} = \frac{1}{2} (120 + 76 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 36 \cdot 40)$$

$$\frac{W}{2} = \frac{1}{2} (120 + 76 \cdot 2 + 72 \cdot 2 + 73 \cdot 2 + 74 \cdot 2 + 75 \cdot 2 + 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 79 \cdot 2 + 80 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 2 \cdot 2163 =$$

$$= 4326$$

Объем: 4326

$$\text{Объем } W = \frac{1}{2} (120 + 76 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 36 \cdot 40 + 702)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

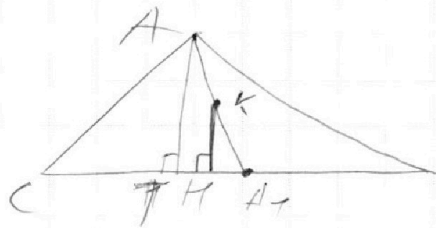
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы при вершине  $BC$   $12^\circ$  - значит  $\cos 12^\circ = 1$   
тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{kH}$ , где  $v = 5$  - радиус сферы



$$SL = SN = 4 \text{ км} \text{ от } \text{сф.}$$

проб. сф.  $r = 4$  т.с.с.  
и следовательно  $AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AK \Rightarrow KA_T = AA_T - AK = 24 - 12 = 12$ , т.к.  $K$  -

ср.  $AA_T$ .

Положим  $AT \perp BC$ , т.к.  $AT \perp BC$ ,  $KH \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \parallel HK$ , т.к.  $K$  - ср.  $AA_T$  и  $AT \parallel HK$  - то

$HK$  - ср. линия  $\Rightarrow AT + AA_T$  (покажем)  $\Rightarrow HK = \frac{AT}{2}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AT \cdot BC = \frac{1}{2} AT \cdot 16 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT = \frac{25}{2} \Rightarrow HK = \frac{AT}{2} = \frac{25}{4}$$

Тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{HK} = \frac{5 \cdot 4}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$$

Ответ:  $AA_T, BB_T, CC_T = 3600$ ;  $\alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$

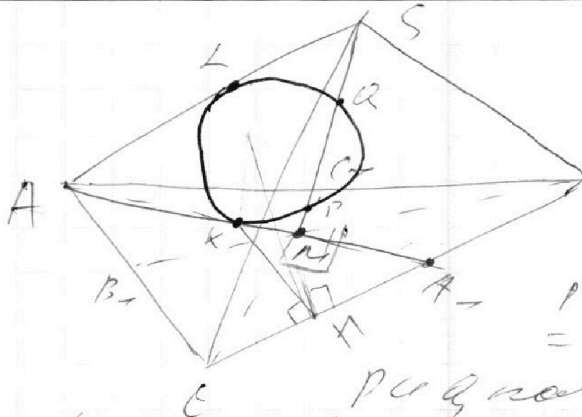
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $MP = x$ , тогда  
 $PQ = r - x \Rightarrow SQ = r - (r - x) = x = MP$ , следовательно  
 $PQ \perp MQ$ , то  $\angle MPQ = 90^\circ$ .

тогда по теореме Пифагора  $MK^2 = MP \cdot MQ = x(r - x)$   
 $SL^2 = SQ \cdot SP = x(r - x) = MK^2 \Rightarrow MK = SL$  (1)

т.о.  $MK$  и  $SL$  — хорды из т.к.  $M$  и  $L$  — диаметр

$AL = AK$  по теореме о хордах. Хорды  $MK$  и  $SL$  пересекаются в т.к.  $M$  и  $L$  — диаметр, тогда  $AM = AK + MK = AL + SL = AS = BC = TB$

По теореме Пифагора  $\frac{AM}{TA} = \frac{2}{7} \Rightarrow MA = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$

$CA = A_1B$  (т.к.  $AA_1 \perp BC$ ) и  $CA = A_1B = \frac{BC}{2} = \frac{16}{2} = 8 = MA$

тогда  $\triangle MA_1A = \triangle BA_1A$ , т.е.  $\angle MA_1A = \angle BA_1A$ , то  $\angle MA_1A = \angle BA_1A = 90^\circ$

Пусть  $MC = 24$ ,  $MB = 2x$ , тогда по теореме Пифагора  $MA = 24$ ,  $MB = x$

$AA_1 \perp BB_1$ ,  $CC_1 = (AM + MA_1) / (BM + MB_1) / (CM + MC_1) =$

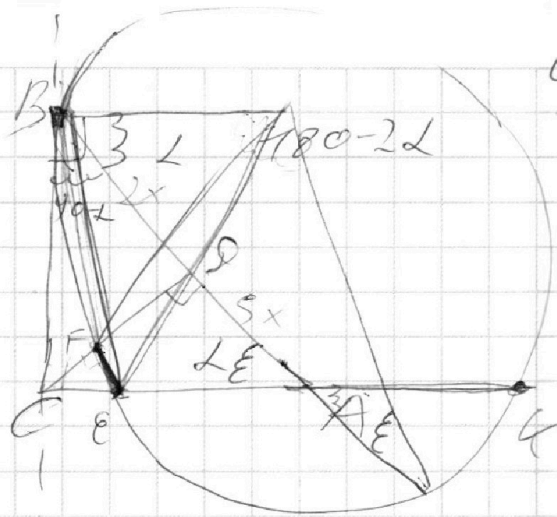
$= 3x \cdot 34 \cdot 24 = 24 \cdot 9xy$

$S_{ABC} = 100$  по теореме Пифагора  $S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{100}{3}$

$= \frac{1}{2} MB \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 24 = 24x = \frac{100}{3} \Rightarrow xy = \frac{50}{3}$

$\Rightarrow 24 \cdot \frac{50}{3} = 400 = 3600$

Пусть  $KH \perp BC$ , т.е.  $K$  — середина  $BC$ , то центр окружности лежит на пересечении медиан  $AK$  и  $HL$ . Центр окружности на пересечении медиан  $AK$  и  $HL$ . Пусть  $O$  — центр окружности. Тогда  $OH \perp BC$ ,  $KH \perp BC$ ,  $KH$  — хорда,  $OH \perp BC$ ,  $OK \perp BC$  — следовательно  $O$  — середина  $OK$ ,  $\Rightarrow$  тогда из теоремы Пифагора  $\angle HKO = 90^\circ$ , где  $\angle$  — диаметр окружности.



$CFE \sim BCE$   
 $\frac{FE}{CE} = \frac{BE}{CE}$   $\frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC}$   
 $\sum_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$   
 $\sum_{\triangle CFE} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{CF}{CE} = \frac{CE}{CA}$   
 $\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{AC}$   
 $\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{AC}$

$(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$

$(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$   
 $(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$   
 $(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$

$(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$   
 $(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$   
 $(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$

$0 = \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{4}$   
 $0 = \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{4}$

$(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$   
 $(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$   
 $(m+n)^2 - 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = m^2 + n^2$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопределен.

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



На одной странице можно оформить **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.



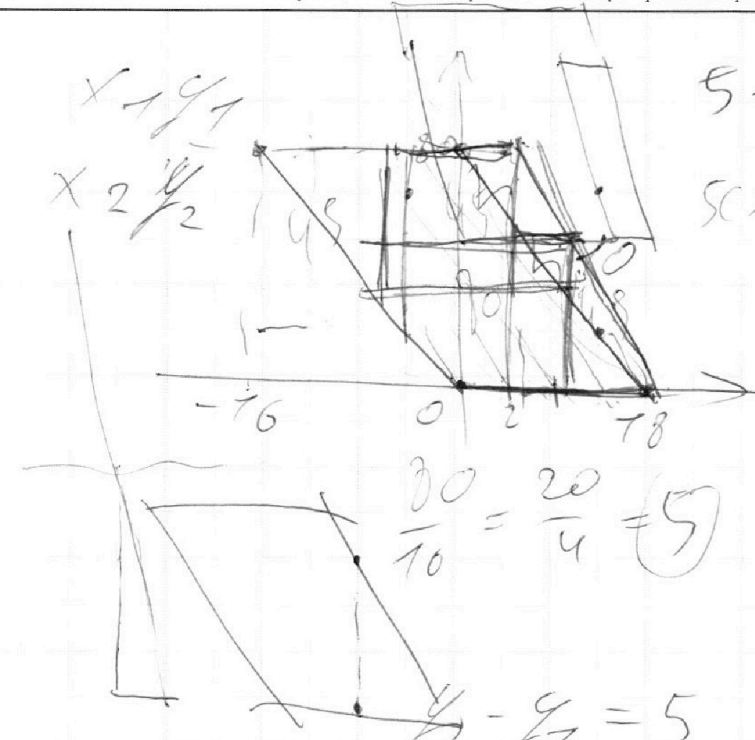
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

~~$$x_2 - x_1 \leq 8$$~~

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$4 \cdot 11$$

$$4 \cdot 43$$

$$3 \cdot 42$$

$$2 \cdot 2$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 4$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2$$

$$\frac{30}{10} = \frac{20}{4} = 5$$

$$y_2 - y_1 = 5$$

$$y_2 - y_1 = 10$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

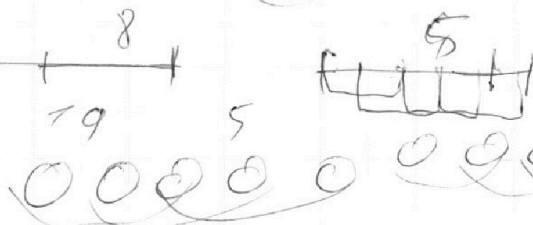
000000

9

$$5 - 3 = 2$$

$$18 - 9$$

15



30	380
	380
	380

$$80 / 15 = 6$$

$$80 / 25$$

$$\frac{44}{5} = 8.8$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 2$$

33  
81  
33

Handwritten scribbles and circled numbers, possibly representing a solution or a list of values.

Handwritten numbers and symbols at the bottom of the page.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1      2      3      4      5      6      7
- 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 2 \quad 5 \\
 9 \quad 4 \quad 3 \\
 3 \quad 3 \quad 3 \\
 \hline
 6 \quad 6 \quad 1 \\
 1 \quad 2 \quad 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 3 \quad 2 \quad 6 \\
 \hline
 2 \\
 3 \quad 9 \quad 1 \quad 2 \\
 3 \quad 7 \quad 5 \\
 0 \quad 4 \quad 4 \quad 1 \\
 1 \quad 2 \quad 2 \\
 2 \quad 0 \quad 1 \\
 4 \quad 5 \quad 1 \\
 5 \quad 4 \quad 1 \\
 4 \quad 3 \quad 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \quad 4 \quad 5 \\
 9 \quad 5 \quad 1 \\
 0 \quad 5 \quad 1 \\
 \hline
 4 \quad 3 \quad 4 \\
 5 \quad 6 \\
 8 \quad 5 \quad 1
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \sin 9.3^\circ (\cos x) = \sqrt{7} - 2x$$

$$\cos x = 2 \in [-0.7]$$

$$\cos 2 = x \in [-0.7]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - 2^2}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$10 \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{7} - 2x$$

$$100(1 - x^2) = 7 - 4\sqrt{7}x + 4x^2$$

$$104x^2 - 4\sqrt{7}x + 9^2 - 100 = 0$$

$\Delta = 16^2 - 4(11^2 - 100) \cdot 104 =$

$$= 16^2 - 4(121 - 100) \cdot 104 = 16^2 - 4(21) \cdot 104 = 476 \cdot 100 - 400 \cdot 2^2 = 100(476 - 4 \cdot 2^2)$$

$$x = \frac{4\sqrt{7} \pm 10\sqrt{476 - 4 \cdot 2^2}}{208}$$

$$\sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1; 1]$$

$$\sin 2 = 6 \quad \sin 2 = \cos x$$

$$\arcsin 6 = 2$$

$$\cos x = \sqrt{1 - 9.3^2 x^2} = 9.3^2 x$$

$$9.3^2 x + 2^2 = 1$$

$$1 - 87.3^2 x = 9.3^2 x^2 = x$$

$$\sqrt{1 - 6^2} = \sqrt{1 - 400 + 100x}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) \cap (x^2 + y^2 - 209 + 64) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 209 + 64) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 209 + 64 = 0$$

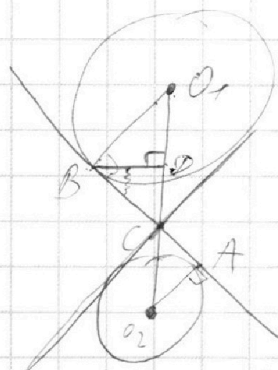
$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

Упр. упряд.

$$O_1 B D \cap O_2 C B$$

$$\frac{6^2}{60} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1 D}{O_1 B}$$



$$O_1 B C \sim O_2 A C$$

$$\frac{6}{7} = \frac{O_1 C}{O_2 B}$$

$$O_1 C = O_2 \cdot 6$$

$$O_1 C + O_2 C = 10$$

$$O_2 C + 6O_2 C = 10$$

$$O_2 C = \frac{10}{7}$$

$$b = \frac{75}{14}$$

$$\frac{46}{3} = \frac{10}{4}$$

$$O_1 C = \frac{60}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$ ,  $b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$ ,  $a \cdot c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$   
 $abc = ?$

~~$a : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$~~   
 ~~$b : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$~~   
 ~~$c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$~~

$a : 3^{27-x}$      $b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$

$a : 3^{15-x}$      $75-x = x$

$x = \frac{75}{2}$      $\sqrt{x = \frac{75}{2}}$

$x = 8$

$b : 3^7$

$c : 3^{13}$

$b : 3^6$

$c : 3^{14}$

$a : 5^x$

$c : 5$

$a : 3^8$      $b : 3^6$      $c : 3^{14}$

$b : 5^{72-x}$

$c : 5^{39-x}$

$72-x = x-22$

$34 = 2x$      $x = 17$

$a : 5^{17}$      $c : 5^{22}$

$a : 2^x$

$b : 2^{8-x}$

$c : 2^{72-8+x}$

$c : 2^{74-x}$

$4+x = 74-x$

$2x = 70$      $x = 35$

$a : 2^5$      $b : 2^3$      $c : 2^9$

Треугольник  $abc = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^8 \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3$

$5x = 3 \cdot 4 = \frac{12}{35} = \frac{12}{35}$

$\frac{5}{5} = \frac{12}{35}$

$\frac{5}{1} = \frac{12}{35}$

$\frac{5}{2} = \frac{12}{35}$

$\frac{12}{35} = \frac{12}{35}$

$\frac{12}{35} = \frac{12}{35}$

$\frac{12}{35} = \frac{12}{35}$



$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$0 = 1x^2 + 21m + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-21m - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-21m - 1}{2}$$

$$m \neq 0$$

$$1 \neq 1$$

$$m = 1$$

$$1 \neq 1$$

$$0 < 1$$

$$0 = \frac{3}{5} + 4m + 3 = 0$$

$$4m + 4 = -\frac{3}{5}$$

$$4m = -\frac{3}{5} - 4 = -\frac{23}{5}$$

$$m = -\frac{23}{20}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{3}{5}}}{2 \cdot \frac{3}{5}}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{12}{5}}}{\frac{6}{5}}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{5-12}{5}}}{\frac{6}{5}}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-\frac{7}{5}}}{\frac{6}{5}}$$

$$x + 3t - \frac{4}{3} = 0$$

$$x + 3t = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} - 3t$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x > 0$$

страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода не допускаются!

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Отметьте крестиком номер задания, решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

МФТИ



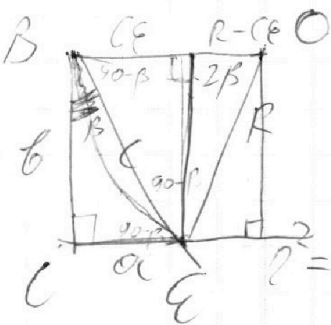
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2\beta = \frac{b}{R} = 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$c^2 = b^2 + (R-a)^2$$

$$2aR = c^2$$

$$R = \frac{c^2}{2a}$$

$$R^2 = b^2 + R^2 - 2Rc + a^2$$

$$25x^2 + 100x^2 = \sqrt{725x^2}$$

$$25 + 100 = \sqrt{725} \cdot x$$

$$R = \frac{49x^2}{2\sqrt{725x^2}} = \frac{49x}{10\sqrt{5}} = 25.5$$

$$c = 25x$$

$$R = \frac{bc}{2a} = \frac{25x \cdot 20}{2 \cdot 10} = 25x$$

$$R = \frac{49}{50} \sqrt{5} \cdot x \quad AC = 5\sqrt{5} \cdot x$$

$$24x^2 + \frac{4}{9}FE^2 = 2 \cdot \frac{25}{3}FE \cdot R$$

$$\frac{25}{3}FE = 25\sqrt{5}R = 25c$$

$$\cos \angle = \frac{FE}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \angle = \frac{5x}{3\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{BC}{R} = \cos \beta$$

$$\frac{30}{25} = \sin \beta = 2R = 2R$$

$$FE = 2R \cdot \sin(\frac{\beta}{2}) = 3R$$

$$R^2 = 4x^2 + 20x^2 = 24x^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{6}x$$

$$\angle BOE = \beta$$

$$\angle BOF = 2\beta$$

$$\angle CBE = \beta \quad \angle FBE = \angle CBE - \angle CBF$$

$$\frac{FE}{2R} = \frac{3R}{2R} = 1.5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

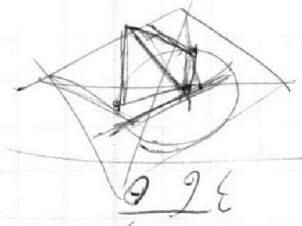
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



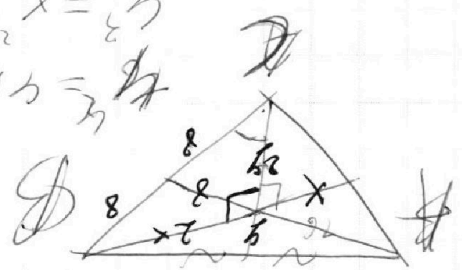
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

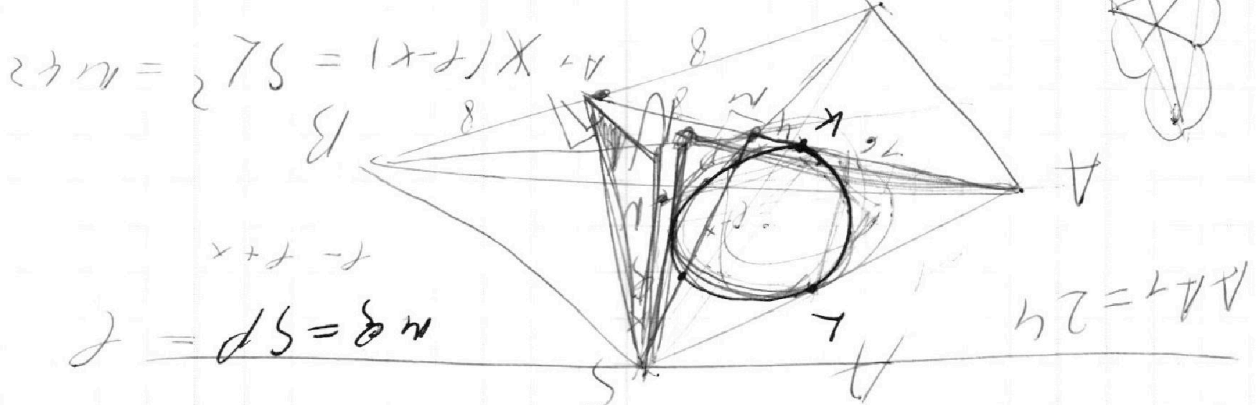


$$\begin{aligned} 4^2 + x^2 &= 4^2 \\ 4^2 + 4x + 4x^2 &= 4^2 \end{aligned}$$



$3 \times 3 \times 2 \times$

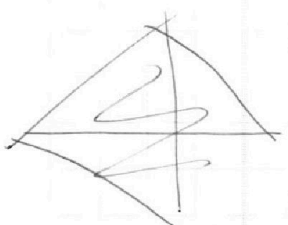
$$\begin{aligned} AS &= AK + LS = AK + AK = AK \\ AL &= AK \end{aligned}$$



$$2 \times 2 = 2 \times 2 = 2 \times 2$$

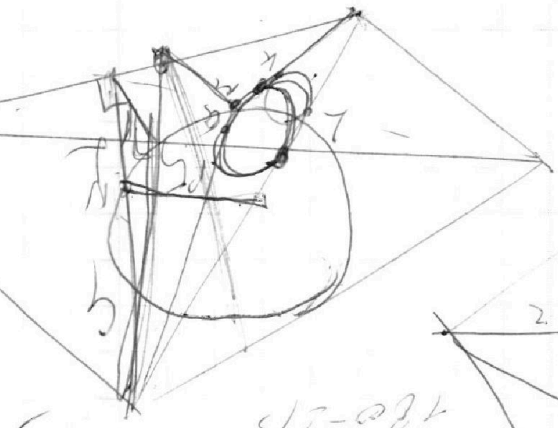
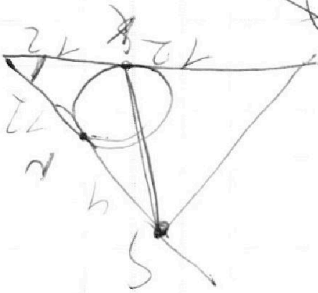
$$m \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

$$AL = 24$$



$$5L = 4$$

$$x = \frac{2}{3} \times 4$$



$$180 - 213$$

$$180 - 213$$

$$90 < B$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BC}{CE}$$

$$CE = \frac{2}{3} FE$$

$$CFE \sim BPC$$