



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}, bc : 2^{12} 3^{20} 5^{15}, ac : 2^{14} 3^{27} 5^{39}$$

Пусть  $a : 2^x$ , тогда  $b : 2^{8-x}$ ,  $c : 2^{14-(8-x)} = 2^{6+x}$   
 $c : 2^{14-x}$ , тогда  $14-x = 6+x \Rightarrow x = 5$

Проверим сами  $a : 2^5, b : 2^3$  то  $ab : 2^8$ ,  
 $c : 2^9$  тогда  $bc : 2^{12}$ ,  $ac : 2^{14}$  - верно!  
 Пусть  $a : 3^y$ , тогда  $b : 3^{14-y}$ ,  $c : 3^{20-(14-y)} = 3^{6+y}$   
 $c : 3^{14-y}$ , тогда  $14-y = 6+y \Rightarrow y = 15$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то рассм.  $\frac{a}{b}$  делит  $\frac{c}{b}$ ,  
 значит  $y \in \mathbb{N}$ , получим:

$$\begin{cases} y = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$

При  $y = 5$ :  $a : 3^5 \Rightarrow b : 3^9 \Rightarrow c : 3^{20-9} = 3^{11} \Rightarrow ac : 3^{16}$ , а  
 необходимо чтоб  $bc : 3^{20}$  значит не  
 подходит.

При  $y = 8$ :  $a : 3^8, b : 3^6, c : 3^{12} \Rightarrow ac : 3^{20}$  -  
 подходит

Пусть  $a : 5^z$ , тогда  $b : 5^{12-z} \Rightarrow c : 5^{14-(12-z)} = 5^{2+z}$

$c : 5^{14-z}$ , тогда  $14-z = 2+z \Rightarrow 3z = 12 \Rightarrow z = 4$   
 проверим:  $a : 5^4 \Rightarrow c : 5^{10} \Rightarrow ac : 5^{14}$ ,  
 $ab : 5^{16}$  (удовлет.)  $bc : 5^{22}$  (удовлет.)

Итого  $abc = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 =$   
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$  - мин. возм. произв.

Ответ  $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

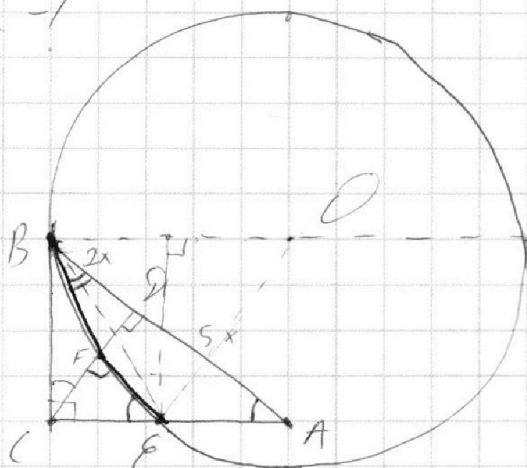
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S_{ABC} \rightarrow$   
 $S_{CFE}$



1) Пусть  $AD = 5x$ , тогда  $BD = 2x$

2)  $ABFE \sim \triangle ABC$

т.к.  $FE \parallel AB$  и  $AB \perp CD$ ,  
то  $FE \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

3)  $\triangle ABC \sim \triangle CFE$   
 $CB^2 = CE \cdot CA$

4)  $CD = \sqrt{BD \cdot AD}$  т.к.  $AB \perp CD$   
 $CD \perp AB$  - высота в  $\triangle ABC$   
в  $\triangle ABC$  -  $CD$

$$CD = \sqrt{2x \cdot 10x} = 2\sqrt{5}x$$

5) Пусть  $O$  - центр окружности, тогда  $OB \perp BC$  по свойству касательной к окружности.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB; \quad S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{CD \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{CFE \sim CDA \text{ по 2 угл. } \angle A}{\angle DCA = \angle CFE, \angle CFE = \angle CPA = 90^\circ}$$

$$\text{по 3) } \frac{CF}{CE} = \frac{CA}{DA}, \text{ тогда } \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{AB \cdot AD}{FE \cdot FE} = \frac{45x^2}{FE^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{TO } \sin(\cos x) = 2 - 2x$$

$$\sin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ где } x \in [-1; 1]$$

$$\text{TO } \sqrt{1-x^2} = 2-2x, \text{ т.к. } x \in [-1; 1], \text{ то } 2-2x > 0$$

т.к.  $x \in [-1; 1]$ ,  $2x \leq 2$

следов. возв. в квадрат обе части уравн.

$$\text{TO } (1-x^2) = 2^2 - 4x + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 104x^2 - 4x + 2^2 - 100 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 104 \cdot 2 = 16^2 - 832 = 16(4 - 52) = 16(-48)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$$\frac{4 + \sqrt{16 - 48}}{208} < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208} < 208 - 4 \quad \pi > 3$$

$$\text{TO } \sqrt{16 - 36} < 196$$

$$330 \cdot 100 < 196 \cdot 196$$

следов. нект.

следов.  $x > 0$

$$\frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208} > -1$$

$$\text{т.к. } \frac{4}{208} - \frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$$\frac{4}{208} - \frac{4 - \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$$\frac{4}{208} + x < 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{208}$$

$5 \cdot 35$   
 $796$   
 $+ 796$   
 $1792$   
 $+ 264$   
 $196$   
 $2056 > 2000$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*предел не равен*

$$\operatorname{tg} \angle B C = \frac{\alpha}{3} \quad \operatorname{tg}^2 \angle B C + 7 = \frac{7}{\cos^2 \angle B C} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}^2 \angle B C = \left(\frac{70}{7}\right)^2 - 7 = \frac{700 - 49}{49} = \frac{57}{49} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \angle B C = \pm \frac{\sqrt{57}}{7} = \frac{\alpha}{3} \rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{7} \sqrt{57}$$

Всегдав при  $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57})$  - 4 рещ. ~~то~~  
при нек. зн.  $\alpha$

$\alpha \in [-\frac{3}{7} \sqrt{57}; \frac{3}{7} \sqrt{57}]$  - все  $\rightarrow$  4 рещ. ~~то~~ при  
люб. зн.  $\alpha$

$\alpha \in (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$  - 4 рещ. ~~то~~ при нек. зн.  $\alpha$

Ответ:  $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



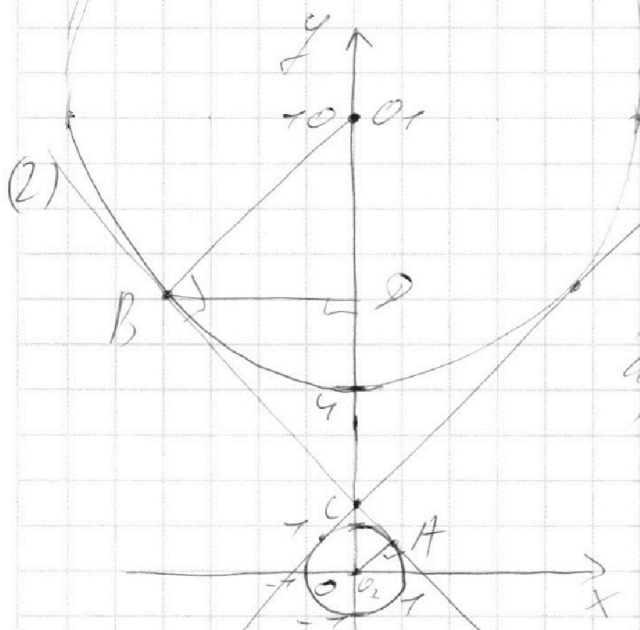
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 7)(x^2 + y^2 - 20x + 64) = 0 \end{cases}$$

Ур - шире ур  
 $x^2 + y^2 = 7$  - ур. окр.  
 $x^2 + (y - 10)^2 = 36$  - ур. окр.

$ax - 3y + 4b = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  - ур. прямой



(1) Проведем две окружности касаясь в точке  $O_1$  и  $O_2$ . Если провести с  $O_1$  касательную к окружности  $O_2$  касаясь в точке  $B$ , то не будет касания. С другой стороны если провести касательную к  $O_1$  касаясь в точке  $A$ , то не будет касания. Проведем касательную к  $O_1$  касаясь в точке  $C$ , то не

будет касания. Не проводя касательных в  $O_1$  (но касаясь в  $O_2$  касаясь в  $A$ ). Найдем угол касания касаясь в  $O_1$ . Пусть  $O_1, O_2$  - центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$ .  $B$  и  $A$  - касания окружностей  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.  $C$  - касание касаясь в  $O_1$  касаясь в  $A$  (касаясь в  $O_2$  касаясь в  $A$ )

$\rightarrow \angle O_1 B C \sim \angle O_2 A C$  по 2 углам  $\rightarrow \angle O_1 B C = \angle O_2 A C = 90^\circ$   
 Но в  $\triangle O_1 B C$  касаясь в  $O_2$  касаясь в  $A$   $\angle A C O_2 = \angle O_1 C B$  по 2 углам. Пусть  $\angle O_1 C B = \alpha$ . Тогда  $\frac{O_1 C}{O_2 A} = \frac{O_1 B}{O_2 C} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{7} \rightarrow O_1 C = 6 O_2 C$

$O_1 C + O_2 C = 70$  (т.к. ур. середина)  $\Rightarrow 3 O_2 C = 70 \rightarrow O_2 C = \frac{70}{3}$   
 $\Rightarrow O_1 C = \frac{140}{3} \rightarrow O_1 C = \frac{60}{3}, O_2 C = \frac{10}{3}$  - касаясь в  $C$

по оси  $y$ .  $\frac{10}{3} = \frac{4}{3} b \Rightarrow b = \frac{75}{4}$ . Тогда  $B$  и  $A$

$\triangle O_1 B C \sim \triangle O_1 A C$  по 2 углам  $\rightarrow \angle O_1 B C = \angle O_1 A C = 90^\circ$   
 $\angle B O_1 C$  - острый. Тогда  $\frac{O_1 B}{O_1 C} = \frac{B C}{A C} = \frac{6 \cdot 7}{60 \cdot 70} = \frac{7}{70} = \cos 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 + \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ 2x \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } 8x^3 = (2x)^3 \\ 625 = 5^4 \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = m \Rightarrow 5^m = 2x, \quad x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 0, \text{ тогда } m^4 - \frac{3}{m} = \frac{4}{3} \frac{1}{m} - 3 \Rightarrow \cdot m \neq 0$$

$$\Rightarrow m^5 + 3m - \frac{13}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4 4 + 4 + \log_{\frac{4}{5}} 5 = \log_{\frac{4}{5^3}} 0,2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 4 + \frac{4}{\log_5 4} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\log_5 4} - 3 \\ 4 \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 4 = n \Rightarrow 5^n = 4, \quad 4 \neq 1 \Rightarrow n \neq 0$$

$$\text{тогда } n + \frac{4}{n} = -\frac{7}{3} \frac{1}{n} - 3 \quad \cdot n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^5 + 3n + \frac{7}{3} = 0 \quad (2) \quad \text{Сом. (1) и (2):}$$

$$n^5 + m^5 + 3(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 -$$

$$- mn^3 + 3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m+n=0 \\ m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + 3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{нет} \\ \text{реш.} \end{array}$$

$$xy = \frac{5^m \cdot 5^n}{2} = \frac{5^{m+n}}{2} \quad \text{т.к. } m+n=0, \quad x \neq 0$$

$$xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

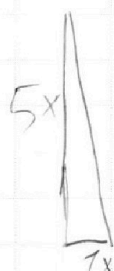


$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 9 \text{ или } y_2 - y_1 \geq 0$$

9)  $x_2 - x_1 \leq 8$  или  $y_2 - y_1 \leq 0$   
т.е. граница пересечения  $x \leq 8$

$$L = \frac{80}{16} = 5 - \text{услов. колл. 2-ой альтернативы}$$



т.е. количество 5 отч. по оси  $o_y$   
выбран. целевые коор. по оси  $x$   
при  $y=0$ :  $7 \cdot 9$  кар  $(x_2 - x_1) = 9$

т.е. во велич карат  $M = \left(\frac{80}{5} + 1\right) \cdot 9 = 70 + 9 = 79$

$= 79 \cdot 9 = 711$  кар  $y$  котор. одит. знач.  
по оси  $y$  и выкат.  $y_1 \geq 0$  и  $y_2 - y_1 \geq 0$ ,  
повысоставляем

при  $y_2 - y_1 = 7$   $5(x_2 - x_1) = 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$  колл.  
долг,  $3$   $2$   $11$   $5$   $7$   $11$

при  $\left. \begin{matrix} y_2 - y_1 = 5, & x_2 - x_1 = 8 \\ y_2 - y_1 = 10, & x_2 - x_1 = 9 \end{matrix} \right\} 9 \text{ случаев}$

$$y_2 - y_1 = 45 \quad x_2 - x_1 = 0$$

I  $78 - 8 + 7 = 77$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $16$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $16 \cdot 77$  кар  $y$  одит.  $y_1 \geq 0$

II  $78 - 7 + 7 = 78$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $8$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $12 \cdot 8$  кар  $y$  одит.

III  $78 - 6 + 7 = 79$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $6$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $13 \cdot 6$  кар  $y$  одит.

IV  $78 - 5 + 7 = 80$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $4$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $14 \cdot 4$  кар  $y$  одит.

V  $78 - 4 + 7 = 81$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $3$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $15 \cdot 3$  кар  $y$  одит.

VI  $78 \cdot 2 = 156$  ; VII  $77 \cdot 2 = 154$

VIII  $78 \cdot 2 = 156$  ; ~~VIII~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

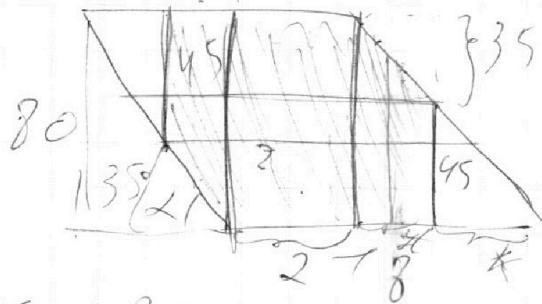
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



кредитные

1X (ср.)



$$h/L = 5$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

$$\frac{k}{k+t} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$k+t = \frac{80}{5} = 16$$

$$\frac{k+t}{k} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \text{ (ср.)}$$

тогда  $k = 9 \Rightarrow t = 5$  тогда сср. 44 руб.

$$80 - 45 + 7 = 36 \text{ см в сср. } (y_2 - y_1) = 45$$

$36 \cdot 3$ ; ~~так~~ расчет тр. (ср. сср.)

при сср. 45 + см при 46 - 2 см 80 36 см

$$\text{итого } \frac{7+36}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 36 \text{ см у одной}$$

$$\text{трапеции итого в 1X. } 37 \cdot 36 \cdot 2 + 36 \cdot 3 =$$

$$= 36 \cdot 40 \text{ месяцев}$$

$W$  - всего месяцев, тогда при  $(y_2 - y_1) \geq 0$

$$\frac{W}{2} \text{ месяцев } \frac{W}{2} = \frac{W}{9} \text{ месяцев} + 7 \cdot 2 \text{ (ср.)}$$

итого:

$$\frac{W}{2} = 2 \cdot (7 \cdot 2 + 76 \cdot 77 + 72 \cdot 8 + 73 \cdot 6 + 74 \cdot 4 + 75 \cdot 3 + 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 2 \cdot 2163 =$$

$$= 4326$$

Объем: 4326

$$\text{Объем } W = 2 \cdot (7 \cdot 2 + 76 \cdot 77 + 72 \cdot 8 + 73 \cdot 6 + 74 \cdot 4 + 75 \cdot 3 + 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 36 \cdot 40) = 4326$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

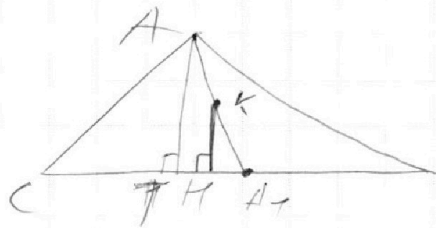
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы при вершине  $BC$   $12^\circ$  - значит  $\cos 12^\circ$   
тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{kH}$ , где  $v=5$  - радиус сферы



$$SL = SN = 4 \text{ км} \text{ от } \text{верш. } \text{конт.}$$

проб. от  $12^\circ$  к  $100^\circ$   
и следовательно  $AL = AS - SL = 16 - 4 = 12 = AK \Rightarrow KA_T = AA_T$   
 $- AK = 24 - 12 = 12$ , т.к.  $K$  -

сер.  $AA_T$ .

Поскольку  $AT \perp BC$ , т.к.  $AT \perp BC$ ,  $KH \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \parallel HK$ , т.к.  $K$  - сер.  $AA_T$  и  $AT \parallel HK$  - то

$HK$  - ср. линия  $\Rightarrow AT + A_T$  (покажем) и  $HK = \frac{AT}{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AT \cdot BC = \frac{1}{2} AT \cdot 16 = 100 \Rightarrow$$

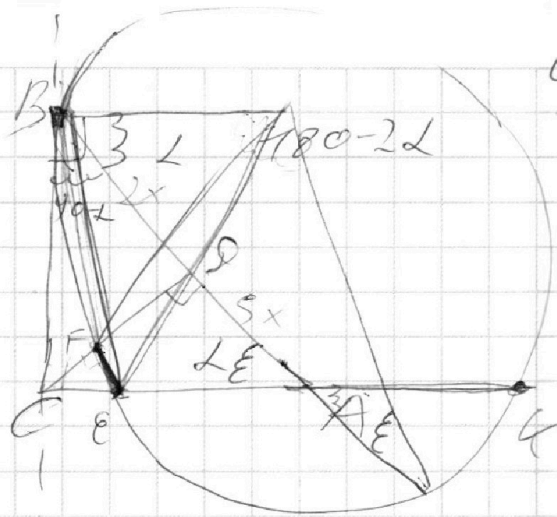
$$\Rightarrow AT = \frac{25}{2} \Rightarrow HK = \frac{AT}{2} = \frac{25}{4}$$

Тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{HK} = \frac{5 \cdot 4}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$$

Ответ:  $AA_T, BB_T, CC_T = 3600$ ;  $\alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$





$$CFE \sim BCE$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BE}{CE} \quad \frac{1}{2} \quad \text{CP AB}$$

$$\sum_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{\triangle CFE} = \frac{1}{2} \quad FE \cdot CF$$

$$\frac{CF}{CP} = \frac{CE}{CA}$$

$$\frac{CP \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{CA \cdot AB}{CE \cdot EF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{FE} = \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{CE \cdot CK}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{CE \cdot CF}{(m+n)^2 - 2mn}$$

$$\frac{CE \cdot CK}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{CE \cdot CF}{(m+n)^2 - 2mn}$$

$$\frac{CE \cdot CK}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{CE \cdot CF}{(m+n)^2 - 2mn}$$

$$\frac{CE \cdot CK}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{CE \cdot CF}{(m+n)^2 - 2mn}$$

$$\frac{CE \cdot CK}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{CE \cdot CF}{(m+n)^2 - 2mn}$$

$$\frac{CE \cdot CK}{(m+n)^2 - 2mn} = \frac{CE \cdot CF}{(m+n)^2 - 2mn}$$

$$0 = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{m} - \frac{t}{m} + \frac{t}{m} - \frac{t}{m}$$

$$0 = t^2 + 13t^2 - 2t^2 + 7t^2 - 4$$

$$0 = t^2 + 13t^2 - 2t^2 + 7t^2 - 4$$

$$0 = t^2 + 13t^2 - 2t^2 + 7t^2 - 4$$

На одной странице можно оформить только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопределен.



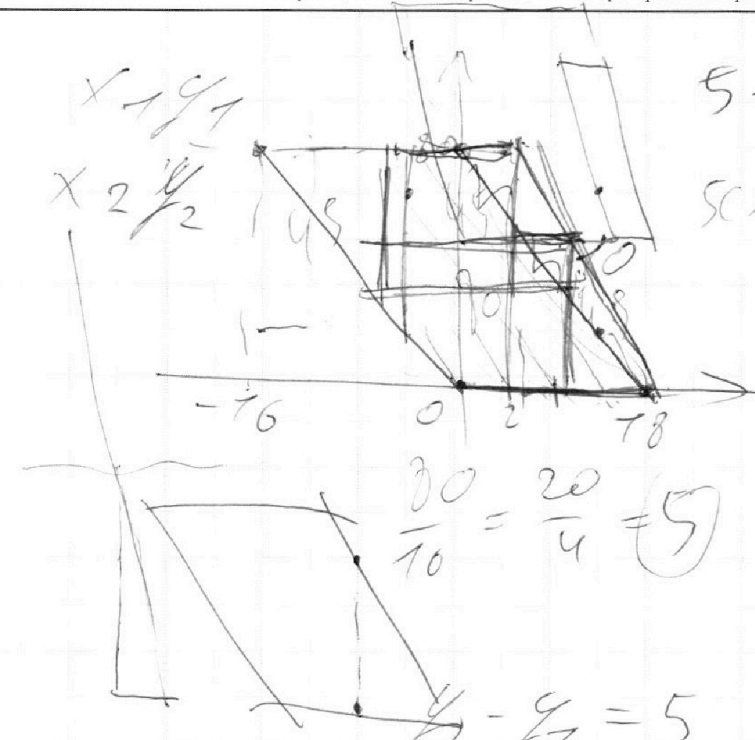
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

~~$$x_2 - x_1 \leq 9$$~~

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$4 \cdot 11$$

$$4 \cdot 43$$

$$3 \cdot 42$$

$$2 \cdot 2$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 4$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2$$

$$\frac{20}{10} = \frac{20}{4} = 5$$

$$y_2 - y_1 = 5$$

$$y_2 - y_1 = 10$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

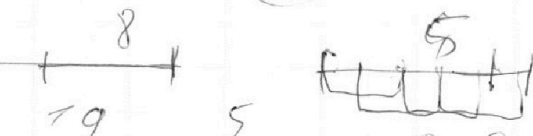
000000

9

$$5 - 3 = 2$$

$$18 - 9$$

15



000000

0000000000

30	380
	380
	380

$$80/15 = 6$$

$$80/25$$

$$\frac{44}{5} = 8.8$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 2.5$$

33  
81  
33

~~285~~  
~~1440~~  
~~1440~~  
~~1440~~

98  
145

100+16



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1      2      3      4      5      6      7
- 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 227 \\
 96 \\
 \hline
 333 \\
 643 \\
 323 \\
 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4326 \\
 2 \\
 \hline
 2763 \\
 8723 \\
 0441 \\
 182 \\
 201 \\
 454 \\
 54 \\
 734
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 943 \\
 951 \\
 031 \\
 1 \\
 734 \\
 56 \\
 831
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \sin \arcsin(\cos x) = \sqrt{7} - 2x$$

$$\cos x = 2 \in [-1, 1]$$

$$\cos 2 = x \in [-1, 1]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - 2^2}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin(\sin 2) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$10 \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{7} - 2x$$

$$100(1 - x^2) = 7 - 4\sqrt{7}x + 4x^2$$

$$104x^2 - 4\sqrt{7}x + 97 - 100 = 0$$

$\Delta = 16 \cdot 7 - 4(100 - 100) \cdot 104 =$

$$= 16 \cdot 7 - 4 \cdot 100 \cdot 104 = 112 - 41600 = -41488$$

$$x = \frac{4\sqrt{7} \pm \sqrt{41488}}{208}$$

$$\sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\sin 2 = 6 \quad \sin 2 = \cos x$$

$$\arcsin 6 = 2$$

$$\cos x = \sqrt{1 - 6^2} = \sqrt{1 - 36} = \sqrt{-35}$$

$$6^2 + 2^2 = 40$$

$$1 - 8 \sin^2 x = 4 \sin^2 x = x$$

$$\sqrt{1 - 6^2} = \sqrt{1 - 36} = \sqrt{-35}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) \cap (x^2 + y^2 - 209 + 64) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1) \cap (x^2 + y^2 - 209 + 64) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 209 + 64 = 0$$

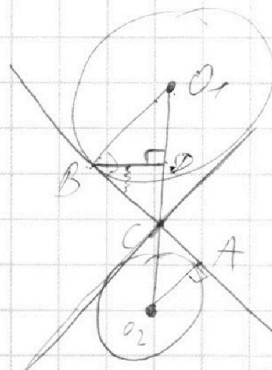
$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

Упр. упрел.

$$O_1 B D \cap O_2 C B$$

$$\frac{6}{60} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1 D}{O_1 B}$$



$$O_1 B C \sim O_2 A C$$

$$\frac{6}{7} = \frac{O_1 C}{O_2 B}$$

$$O_1 C = O_2 \cdot 6$$

$$O_1 C + O_2 C = 10$$

$$O_2 C + 6 O_2 C = 10$$

$$O_2 C = \frac{10}{7}$$

$$b = \frac{75}{14}$$

$$\frac{4b}{3} = \frac{10}{7}$$

$$O_1 C = \frac{60}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$ ,  $b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$ ,  $a \cdot c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$   
 $a \cdot b \cdot c = ?$

~~$a : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$~~   
 ~~$b : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$~~   
 ~~$c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$~~

$a : 3^{27-x}$      $b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$

$a : 3^{15-x}$      $75-x = x$

$x = \frac{75}{2}$      $x = 8$

$b : 3^7$

$c : 3^{13}$

$b : 3^6$

$c : 3^{14}$

$a : 5^x$

$c : 5^{34-x}$

$a : 3^8$      $b : 3^6$      $c : 3^{14}$

$b : 5^{72-x}$      $c : 5^{13-34+x}$   
 $72-x = x-22$

$a : 5^{15}$      $c : 5^{22}$

$34 = 2x$      $x = 17$

$a : 2^x$

$b : 2^{8-x}$

$c : 2^{72-8+x}$

$c : 2^{74-x}$

$a : 2^5$      $b : 2^3$      $c : 2^9$

$4+x = 74-x$   
 $2x = 70$      $x = 35$

Тогда  $a \cdot b \cdot c = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17} \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3$

$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$

$\frac{5}{5} = \cos \alpha = \frac{8}{7}$

$\frac{5}{7} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

$\frac{5}{7} = \frac{1 + \frac{8}{7}}{2}$

$\frac{5}{5} = \frac{20}{35}$

$\frac{5}{5} = \frac{20x}{35}$

$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{40}{35}$





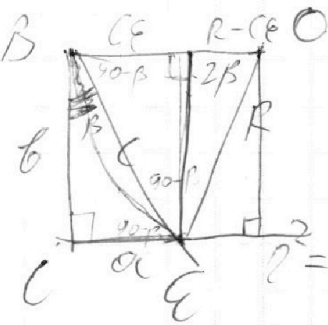
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2\beta = \frac{b}{R} = 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$2aR = c^2$$

$$R = \frac{c^2}{2a}$$

$$R^2 = b^2 + R^2 - 2R \cdot a + a^2$$

$$25x^2 + 100x^2 = \sqrt{725x^2}$$

$$\frac{25+100}{\sqrt{725}} x$$

$$R = \frac{49x^2}{2\sqrt{725x^2}} = \frac{49x}{10\sqrt{5}} = 25.5$$

$$c = 25x$$

$$R = \frac{2c}{3\sqrt{5}} = 25$$

$$R^2 - 2R(c + c^2 + R^2) = 2$$

$$R = \frac{49}{50} \sqrt{5} x \quad AC = 5\sqrt{5} x$$

$$24x^2 + \frac{4}{9} FE^2 = 2 \cdot \frac{25}{3} FE \cdot R$$

$$\frac{2c}{3\sqrt{5}} = 25 \Rightarrow R = 25 \sqrt{5} R = 2c \sqrt{5}$$

$$\cos \lambda = \frac{FE}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \lambda = \frac{5x}{3\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{3R}{c} = \sin \beta = 2R = 2B \Rightarrow B = 3R = B$$

$$FE = 2R \cdot \sin(\frac{\lambda}{2}) = 3R$$

$$R^2 = 4x^2 + 20x^2 = 24x^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{6}x$$

$$3.55x$$

$$\angle CBE = B = 3R = B$$

$$\angle BOE = 2R$$

$$\angle BFE = \lambda$$

$$\angle FBE = \angle CBE - \angle CBF$$

$$\frac{FE}{2R} = \sin \lambda = 2R$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

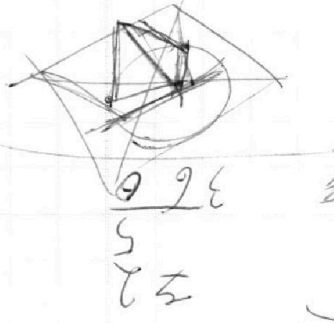
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



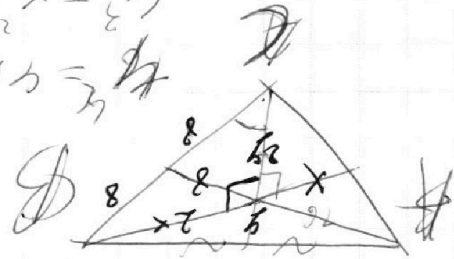
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



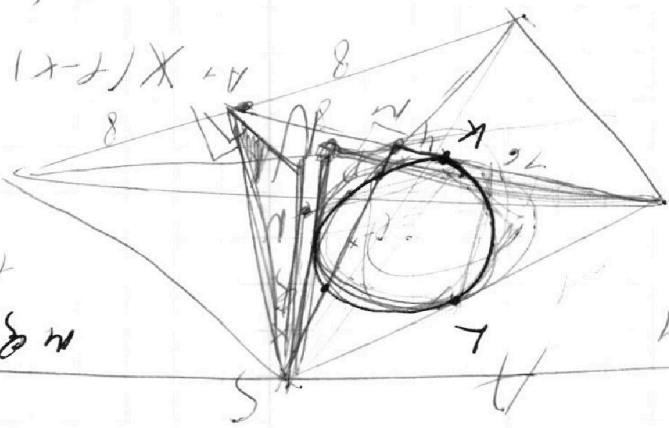
$$\begin{aligned} 4^2 + x^2 &= 4^2 \\ 4^2 + 4x + 4x^2 &= 4^2 \end{aligned}$$



$3 \times 3 \times 2 \times$

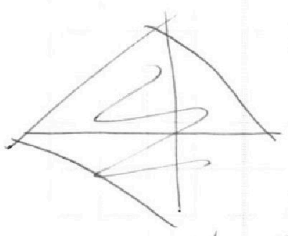
$$\begin{aligned} AS &= AK + LS = AK + AK = AK \\ AL &= AK \end{aligned}$$

$$2 \times 2 = 2 \times 2 = 4$$



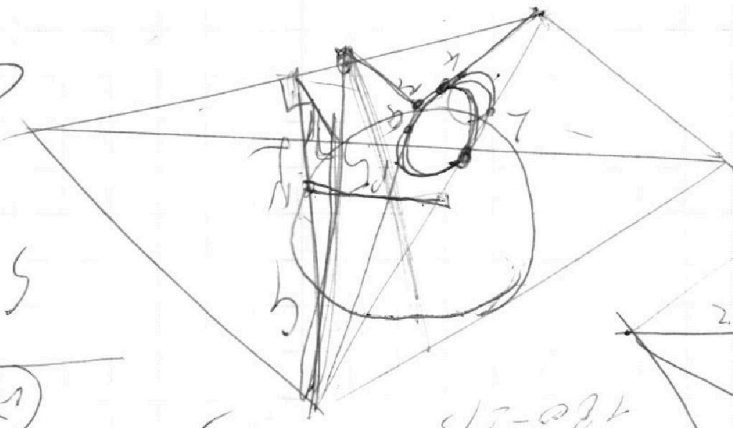
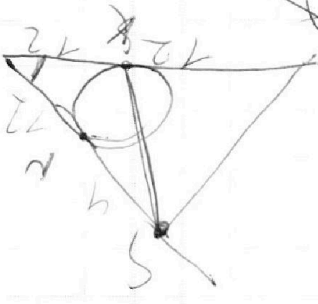
$$AL = 24$$

$$m \times 2 = 5 \times 2 = 10$$



$$5L = 4$$

$$x = \frac{2}{3}$$



$$180 - 213$$

$$180 - 90 - 213$$

$$90 < 180$$

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{3} FE$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BC}{CE}$$

$$CFE \sim BFC$$