

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (начало)

Чтобы произведение abc было наименьшим,
 a, b, c должны иметь только множители (простые)
2, 3, 5.

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 7$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

Должны выполняться условия (все эти условия)

$$a_1 + b_1 \geq 7$$

$$b_1 + c_1 \geq 13$$

$$a_1 + c_1 \geq 14$$

$$a_2 + b_2 \geq 8$$

$$b_2 + c_2 \geq 15$$

$$a_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_3 + b_3 \geq 14$$

$$b_3 + c_3 \geq 18$$

$$a_3 + c_3 \geq 13$$

~~Необходимо минимизировать суммы~~
минимизируем суммы (это справедливо, т.к.
 $a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3$ каждой из
множителей 2, 3 или 5)
 $2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 34$

$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$, выполнение выполняется при

$$a_1 = 4, b_1 = 3, c_1 = 10$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 43$$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21,5$, для натуральных a_2, b_2, c_2

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 22, a_2 = 6, b_2 = 5, c_2 = 11$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1
№87 (продолжение)

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 25$$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq 38$, т.к. $a_3 + c_3 \geq 43$, то нам подходит

$$b_3 = 0, a_3 = 14, c_3 = 29$$

$$\text{ОТВЕТ: } 2^{17} \cdot 3^{43} \cdot 5^{2843}$$

~~$$a = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

Т.к. AC - касательная, то

$$OA \perp AC, \angle CAF = \frac{1}{2} \angle AOF = \alpha$$

$$FF' = AC, AF' = FC$$

$$\operatorname{tg} \angle CAF = \frac{CF}{AC}$$

$$\operatorname{tg} \angle AOF = \frac{F}{R}$$

Пусть $BD = x$,

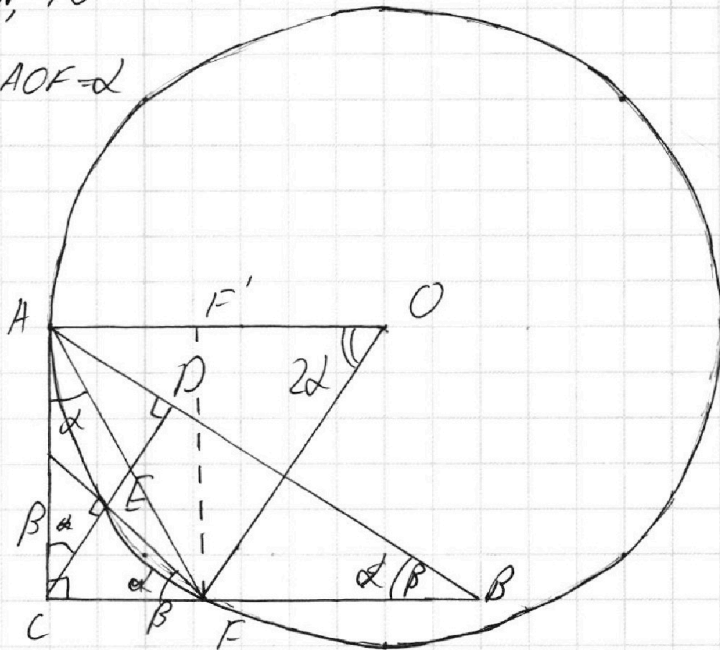
тогда $AD = 0,3x$

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} =$$

$$= x \sqrt{0,3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{BD} = \sqrt{0,3}$$

$$\triangle CFE \sim \triangle ACD \sim \triangle ABC$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AC}{CF} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 (начало)

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \pi. \text{ т.к. } \arccos x \in [0; \pi], \text{ то}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{5} + \pi \cdot \frac{1}{5} \quad \left(\frac{3\pi}{2} + \pi\right) \in [0; \pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

Возьмем косинус

от обеих частей, получим уравнение

следствия, поэтому после проверим корни

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{5} = \frac{6x}{5} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \frac{4x}{5} = \frac{4}{5}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi m \end{cases}$$

т.к. $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$, то нам подходят

$$\text{только } x = -\frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{2}, x = \pi$$

$$x = \pi, 1) x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$5 \arccos(\sin(-\frac{3\pi}{2})) = 0, \text{ верно}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В(продолжение)

$$2) x = \frac{\pi}{6}$$

$$5 \arccos\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{3}, \text{ верно}$$

$$3) x = \frac{11\pi}{6}$$

$$5 \arccos\left(\sin \frac{11\pi}{6}\right) = \frac{10\pi}{3}, \text{ верно}$$

$$4) x = \frac{7\pi}{2}$$

$$5 \arccos\left(\sin \frac{7\pi}{2}\right) = 5\pi, \text{ верно}$$

$$5) x = \pi$$

$$5 \arccos(\sin \pi) = \frac{5\pi}{3}, \text{ неверно}$$

$$\text{ОТВЕТ: } x = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



М4 (начало)

$$\begin{cases} 3 + 3x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

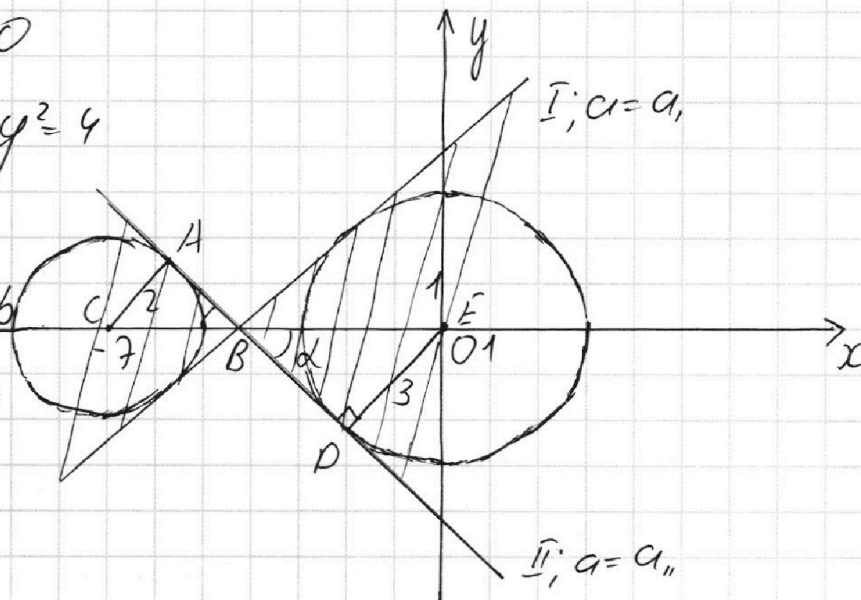
$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 3ay = -x + 7b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3ay = -x + 7b \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$



1. при $a = 0$:

$x = 7b$, это вертикальная прямая, она не может иметь 4 пересечения с окружностями

2. $a \neq 0$:

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

b регулирует только смещение прямой по вертикали, значит граничными случаями являются I и II . при всех других случаях

$\forall a \in [a_1, a_2]$ прямая имеет такой коэффициент наклона, что не сможет пройти

через две окружности сразу (необходимое для 4-х решений условие)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№4 (продолжение)

Рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BDE$, $DE=3$,

$$AC=2$$

Пусть $BE=x$, $\angle DBE=\alpha$, тогда $BC=7-x$

$$\sin \alpha = \frac{2}{7-x} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = 21 - 3x$$

$$x = \frac{21}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3a''} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

из симметрии относительно Ox следует, что

$$a_1 = -a'', \quad a'' = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow a_1 = +\frac{2\sqrt{6}}{15}$$

нам подходит $a \in (-\infty; a_1) \cup (a_1; +\infty)$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (исчисло) 7^3

(1) $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{\sqrt[3]{36x^2}} \sqrt[3]{43} - 4$ ОДЗ:

$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{|6x|} 7 - 4$
 $\begin{cases} x > 0 & \log_7 6x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \Rightarrow \log_{6x} 7 \neq 0 \end{cases}$

$\log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 = -4$ $|6x| = 6x, \text{ т.к. } x > 0$

(2) ~~$\log_7^4 y + 6 \log_7^2 y + 6 = \log_{y^2}(7^5) - 4$~~ ОДЗ:

$\log_7^4 y + 6 \log_{xy} 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$
 $\begin{cases} y \neq 0 \\ y \neq 1 \Rightarrow \log_7 y \neq 0 \\ \log_7^2 y \neq 0 \end{cases}$

$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$ $|y| = y, \text{ т.к. } y > 0$

$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 = -4$

тогда должны быть справедливы система:

$$\begin{cases} \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 = -4 & (3) \\ \log_7^2 y - \log_7^2 6x + \frac{7}{2} (\log_7^2 y + \log_{6x} 7) = 0 \end{cases}$$

$$\left((\log_7 y + \log_7 6x) (\log_7 y - \log_7 6x) (\log_7^2 y + \log_7^2 6x) + \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7 y \cdot \log_{6x} 7} \right) = 0$$

1. $\log_7 y + \log_7 6x = 0$

$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

ур-е (3) имеет вид $t^5 + \frac{7}{2}t + \frac{7}{2} = 0$, где

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5/продолжение)

$$t = \log_2 y, t \neq 0$$

Это ур-е 5-й степени, поэтому оно имеет

хотя бы 1 вещественный корень,

значит $xy = \frac{1}{6}$ ~~может существовать~~ существует

2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

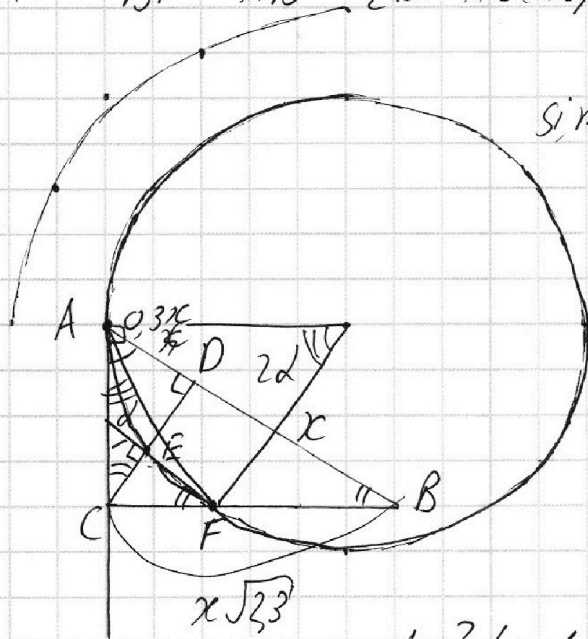
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AF^2 = BF^2 + AB^2 - 2BF \cdot AB \cos \beta$$

$90^\circ - \beta - \alpha$ \cos^2 $90^\circ - \alpha$



$$1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = 2, \cos^2 \beta = \frac{1}{26}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CF}{AC} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{AC}{CF} = \frac{5}{13} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$BF = x \sqrt{3} \cdot \frac{CF}{AC}$$

$$\frac{CF}{R - FC} = \frac{CF}{AF} = \sin \alpha$$

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{AC}{R}$$

$$BC = \frac{x}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$AF^2 = 2R^2(1 - \cos 2\alpha) = 4R^2 \sin^2 \alpha = x \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{10}} = x \sqrt{\frac{23}{10}} = \frac{10}{73}$$

$$AF = 2R \sin \alpha$$

$$\sin^2 \beta = \frac{13}{73}$$

$$AC = R \cdot \sin 2\alpha = 2R \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$CF = 2R \sin^2 \alpha$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7 \frac{y}{x}$$

$$\log_7 y = p$$

$$\log_7 6x = q$$

$$p^4 + \frac{7}{2}p$$

$$p^5 + 4p + \frac{7}{2} = 0$$

$$p^5 = -4p - \frac{7}{2}$$

$$(p - q)$$

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$(p - q)(p^2 + q^2) + \frac{7}{29p} = 0$$

$$29p(p - q)(p^2 + q^2) = -7$$

$$29p(p^3 + q^2p - qp^2 - q^3) = -7$$

$$29p^4 + 29q^3p^2 - 29q^2p^3 - 29q^4p = -7$$

$$2 \frac{q^4}{p} + q^3 \frac{q^4}{p^2}$$

$$-\frac{q^4}{p^4} + \frac{q^3}{p^3} - \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{-7}{29p^3} = \frac{7}{8p+7}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$



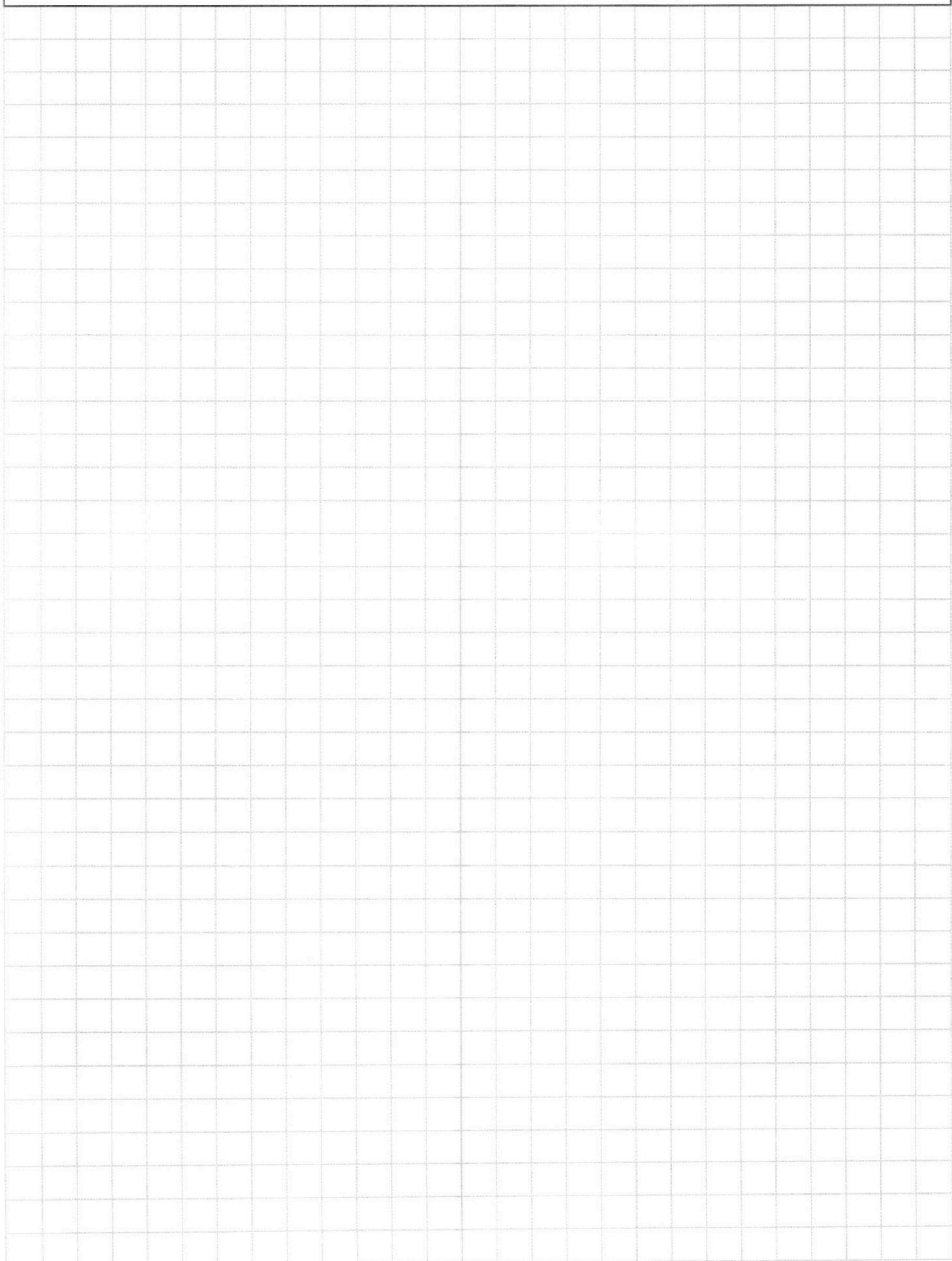
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x = \log_7 36x^2 \cdot 3^3 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7 (y^2 / 2^5) \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 49} \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$\log_7^4 6x - 2 \cdot \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} = -4$$

$$\frac{5}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 7} =$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7 y \cdot \frac{1}{\log_7 y} = -4$$

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_7^5 y + 4 \log_7 y + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_7 6x = u$$

$$\log_7 y = v$$

$$u + v = \log_7 6xy$$

$$7^{u+v} = 6xy$$

$$xy = \frac{7^{u+v}}{6}$$

$$u^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{u} = -4$$

$$v^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{v} = -4$$

$$u^4 - v^4 + u^4 - v^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u} \right) = 0$$

$$v^2 + (v-u)(v+u)(v^2+u^2) + \frac{7}{2} \frac{u+v}{uv} = 0$$

$$(v+u) / (v-u)(v^2+u^2) + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{uv} = 0$$

$$(v-u) / (v^2+u^2) = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{uv}$$

$$\begin{array}{l} v \neq 0 \\ v \neq 0 \end{array}$$

$$v^3 + v^2v - uv^2 - v^3 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{uv}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_7 6x \cdot \frac{7}{x} = -4 \\ \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7 y \cdot 7 = -4 \end{cases}$$

$xy = ?$

$$\begin{cases} 5 + 4x - \frac{7}{2} = 0 \\ 2 \cdot 5 + 8x - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2} (\log_7 y + \log_7 6x) = 0$$

$$\log_7 6xy = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\log_7 6x = p$$

$$\log_7 y = q$$

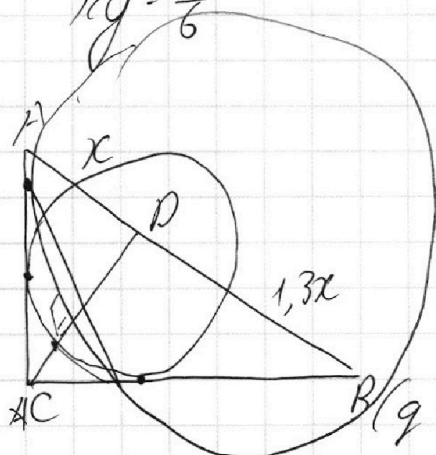
$$p^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{p} = -4$$

$$q^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{q} = -4$$

$$p^4 = q^4$$

$$q^4 - p^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right) = 0$$

$$(q - p)(q + p)(q^2 + p^2) + \frac{7}{2} \left(\frac{q+p}{qp} \right) = 0$$



$$y - \frac{y}{1.3y} = 1.3$$

$$1.3y = y - x$$

$$x =$$

$$(q + p) = 0 \quad (q - p)(q^2 + p^2) + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{qp} = 0$$

$$\frac{y}{1.3x} = 1.3$$

5 12

$$y = 1.3x - 1.3x \quad 5 \quad 12 \quad 6$$

3 3 12

3 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

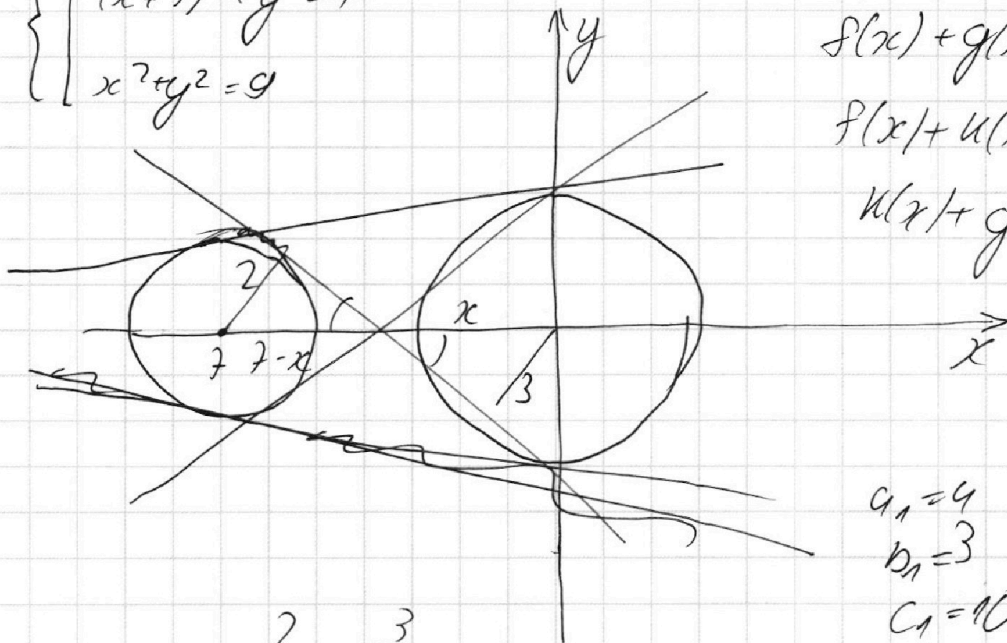
$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

-1
 $2|ax+by+c| \geq$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

4 реши $y = -x \cdot \frac{1}{3a} + \frac{7b}{3a}$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &> 5 \\ f(x) + u(x) &> 7 \\ u(x) + g(x) &> 14 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ b_1 &= 3 \\ c_1 &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{7-x} = \frac{3}{x}$$

$$a_1 + c_1 = 14$$

$$2x = 21 - 3x$$

$$x = \frac{21}{5}$$

$$\frac{74}{2} = 37$$

$$28 + 4 = 32 \quad 75$$

6 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a b c

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{19} \cdot k$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot l$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \cdot m$$

$$43 = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \frac{24\sqrt{28}}{49}$$

$$\frac{9\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{10\pi}{6}$$

$$b = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot \pi \cdot k \in [0, 5\pi]$$

$$ab^2c =$$

$$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ arcsos } x \in [0, \pi]$$

$$42 + 18 + 14 + 1 = 75$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos x =$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6} \sqrt{1-x^2}$$

$$3^{26+12} = 3^{43}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{10}{6}$$

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\cos(\arccos(x)) = \frac{4\pi - \pi}{2}$$

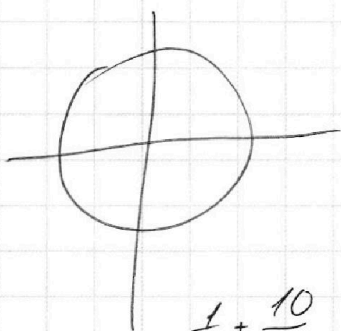
$$\frac{4}{5\pi} \cdot \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{a^2 c^2}{b^2} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$$

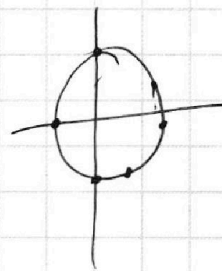
~~27~~

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}$$



$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}\right)$$



$$\frac{1}{6} + \frac{10}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5} + 2\pi n$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5} + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{6x}{5} + 2\pi n$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{4}{5}\pi + 2\pi n$$