МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc$ делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac$ делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $a_2, b_2, c_2$ – степени двоек в разложении чисел $a, b, c$ на простые
$a_3, b_3, c_3$ – степени троек. $a_5 b_5 c_5$ – степени пятёрок
~~$a_2+b_2=8$~~

$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^{8} \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \\ bc = k_2 \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{cases} \qquad k_1, k_2, k_3 \in N$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 3},$$

чем меньше $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ – тем меньше $abc$
аналог. Аналогично $a_2 b_2 c_2 \ldots$ обозначим $k_{12}, k_{22}, k_{32} \ldots$

$$\begin{cases} a_2+b_2 = k_{12}+8 \\ b_2+c_2 = k_{22}+12 \\ a_2+c_2 = k_{32}+14 \end{cases}$$
система имеет реш при $k_{12}=k_{22}=k_{32}=0$
$\underline{a_2=5 \quad b_2=3 \quad c_2=9}$

$$\begin{cases} a_3+b_3 = k_{13}+14 \\ b_3+c_3 = k_{23}+20 \\ a_3+c_3 = k_{33}+21 \end{cases}$$
$a_3-b_3 = k_{33}-k_{23}+1$
$2a_3 = \underline{15+k_{13}-k_{23}+k_{33}}$
что бы делилось возьмём $k_{33}=1$,
а ост. $=0$

$$\begin{cases} a_3=8 \\ b_3=6 \\ c_3=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5+b_5 = k_{15}+22 \\ b_5+c_5 = k_{25}+17 \\ a_5+c_5 = k_{35}+39 \end{cases}$$
$a_5-b_5 = 22+k_{35}-k_{25}$
$a_5+b_5 = 22+k_{15}$
$2b_5 = -10+k_{15}+k_{25}-k_{35}$
$k_{15}=10$, ост $=0$
$$\begin{cases} b_5=0 \\ a_5=22 \\ c_5=17 \end{cases}$$

Какие либо числа не являющ. степенями 2, 3, 5 приведут к увел. произв. => их нет в мин. варианте

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{22} \\ b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0 \\ c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17} \end{cases} \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$

$\arcsin(t)\ (t \in [-1; 1]) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$10\arcsin(t) \in [-5\pi; 5\pi]$

$\pi - 2x \in [-5\pi; 5\pi]$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$

1) $x \in [-2\pi; -\pi]$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi$

$5\pi - 10x - 20\pi = \pi - 2x$

$8x = -16\pi$

$x = -2\pi$

2) $x \in [-\pi; 0]$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x)$

$10\pi - 5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{3}$

3) $x \in [0; \pi]$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$

4) $x \in [\pi; 2\pi]$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = -\pi - (\frac{\pi}{2} - x)$

$-10\pi - 5\pi + 10x = \pi - 2x$

$12x = 16\pi$

$x = \frac{4\pi}{3}$

5) $x \in [2\pi; 3\pi]$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi$

$5\pi - 10x + 20\pi = \pi - 2x$

$8x = 24\pi$

$x = 3\pi$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $-\frac{\sqrt{a^2+9}}{4} \geq \frac{3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$

$7\sqrt{a^2+9}+30 \geq 0 \quad a \in R$

2) $\frac{\sqrt{a^2+9}}{4} \leq \frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$

$7\sqrt{a^2+9} \leq 30$

$\sqrt{a^2+9} \leq \frac{30}{7}$

$a^2 \leq \frac{30^2}{7^2} - 3^2$

$a^2 \leq \frac{9}{7} \cdot \frac{51}{7}$

$\frac{-3\sqrt{51}}{7} \leq a \leq \frac{3\sqrt{51}}{7}$

1 & 2 $\Rightarrow$ $a \in \left[-\frac{3\sqrt{51}}{7}; \frac{3\sqrt{51}}{7}\right]$ - мы не сможем найти $b$ для 4 реш.

$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$ - сможем.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+100-36)=0 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{ax+4b}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &x^2+y^2=1 \\ &x^2+(y-10)^2=6^2 \end{aligned}\right.$$

графики этих функций - окружности, которые не пересекаются, т.к. расстояние между центрами $=10$, а сумма радиусов 7

чтобы было 4 реш нужно, чтобы $D$ обоих урав при подстановке $y$ было $>0$

1) $x^2+\left(\frac{ax+4b}{3}\right)^2-1=0$

$9x^2+a^2x^2+8abx+16b^2-9=0$

$(a^2+9)x^2+8abx+16b^2-9=0$

~~$D/4 = a^2b^2-(a^2+9)(b^2-9)=9a^2+81-9b^2$~~

$D/4 = 16a^2b^2-(a^2+9)(16b^2-9)=9a^2+81-9\cdot16b^2>0$

$a^2+9>16b^2$

$-\frac{\sqrt{a^2+9}}{4}<b<\frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$

2) $x^2+\left(\frac{ax+4b-30}{3}\right)^2-6^2=0$

$9x^2+a^2x^2-2ax(4b-30)+(4b-30)^2-18^2=0$

$D/4 = a^2(4b-30)^2-(a^2+9)((4b-30)^2-18^2)=$

$=a^2\cdot18^2-9(4b-30)^2+9\cdot18^2>0$

~~$36a^2-4(2b-15)^2+18^2>0$~~

~~$9a^2+9^2\cdot4>2(2b-15)^2$~~

~~$-\frac{3\sqrt{a^2+9^2}}{2}<2b-15<\frac{3\sqrt{a^2+9}}{2}$~~

$6^2a^2-(4b-30)^2+18^2>0$

$9a^2+9^2>(2b-15)^2$

$-3\sqrt{a^2+9}<2b-15<3\sqrt{a^2+9}$

$\frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2}<b<\frac{3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$.

Рассмотрим случаи когда условия от $D^1$ и $D^2$ не пересек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{2} \\ y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}(5) - \log_{8x^3}(625) + 3 = 0$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} + 3 = 0$

$3\log_5^5(2x) - 13 + 9\log_5(2x) = 0$

$\log_5^4(y) + 4\log_y(5) - \log_{y^3}(0{,}2) + 3 = 0$

$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5(y)} + \frac{1}{3\log_5(y)} + 3 = 0$

$3\log_5^5(y) + 13 + 9\log_5(y) = 0$

сложим

$3\log_5^5(2x) + 3\log_5^5(y) + 9(\log_5(2x) + \log_5(y)) = 0$

$(\log_5(2x) + \log_5(y))(\log_5^4(2x) - \log_5^3(2x)\cdot\log_5(y) + \log_5^2(2x)\cdot\log_5^2(y) - \log_5(2x)\log_5^3(y) + \log_5^4(y) + 3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \log_5(2x) + \log_5(y) = 0 \rightarrow \log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \quad \underline{xy = \frac{1}{2}} \\ \log_5^4(2x) - \ldots + \log_5^4(y) + 3 = 0 \rightarrow \varnothing \end{array}\right.$

т.к. всегда больше 0

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

$(y_2-y_1) \vdots 5$ $\qquad y_2-y_1=5k$

$-80 \le y_2-y_1 \le 80$

$-16 \le k \le 16$

$x_2-x_1+k=9$

$x_2-x_1=9-k$

Если $y_1 \vdots 5$, то мы хотим решить задачу для парал. с коорд. $O'(0,0)$, $R'(18,0)$, $P'(-16,16)$, $Q'(2,16)$.

т. к. $y_2 \vdots 5$ и $\frac{80}{5}=16$

и урав $x_2-x_1 + k=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$9x^2+a^2x^2+2a(4b-30)x+(4b-30)^2-324=0$

$\dots(4b-48)(4b-12)=0$

$D/4=a^2(16b^2-240b+900)-(9+a^2)((4b-30)^2-324)=$

$D/4=a^2(4b-30)^2-(9+a^2)((4b-30)^2-324)=$

$=-9(4b-30)^2+9\cdot324+324a^2\ge0$

$9x^2+(ax+4b)^2-9=0$

$(9+a^2)x^2+8abx+16b^2-9=0$

$D/4=a^2\cdot16b^2-(9+a^2)(16b^2-9)=$

$=-9\cdot16b^2+81+9a^2>0\Rightarrow-16b^2+9+a^2>0$

$a^2+9>16b^2$

$D/4=a^2(4b-30)^2-(9+a^2)((4b-30)^2-324)=$

$=-9(4b-30)^2+324\cdot9+324a^2=$

$=-(4b-30)^2+324+36a^2=-16b^2+240b-900+324+36a^2>0$

$-(2b-15)^2+81+9a^2>0$

$a^2+9>\frac{(2b-15)^2}{9}$

$16b^2<a^2+9$

$$\begin{cases}b^2<\frac{a^2+9}{16}\\(2b-15)^2<9a^2+81\end{cases}$$

$-3\sqrt{a^2+9}<2b-15<3\sqrt{a^2+9}$

$-\frac{\sqrt{a^2+9}}{4}<b<\frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$

$\frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2}<b<\frac{3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$

$\frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2}\ge\frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$

$30\ge7\sqrt{a^2+9}$

$\frac{900}{49}\ge a^2+9$

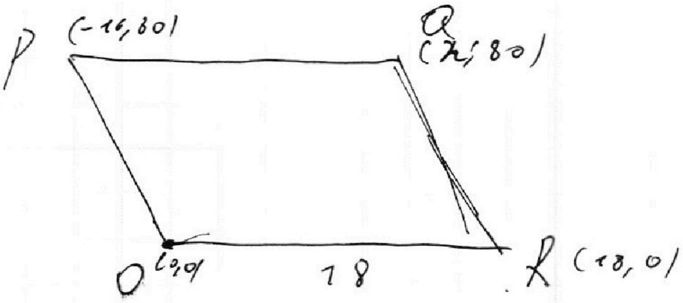
$\frac{900-441}{49}\ge a^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5x_2^2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$




$16^2 + 80^2 = (16+80)^2 - 2\cdot 16 \cdot 80 =$
$= 96^2 - 2560$

$(x_2 - x_1)_{MAX} = 34$

$x_1 = y_1 = 0$

$5x_2 + y_2 = 45$

$y_2 = 45 - 5x_2$

$y_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 9$

$y = \frac{ax+4b}{3} = \cancel{\frac{ax+d}{3}}\ \frac{ax}{3} + d$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$

$x^2 + \frac{a^2x^2}{9} + \frac{2}{3}axd + d^2 = 0$

$D =$

$9x^2 + (ax + 4b - 30)^2 - 324$

$9x^2 + a^2x^2 + 2a(4b-30) + (4b-30)^2 - 324$

$9x^2 + a^2x^2 + 8axb + 16b^2 - 9 = 0$

$(9+a^2)x^2 + 8axb + 16b^2 - 9 = 0$

$D/4 = 16a^2b^2 - (16b^2-9)(9+a^2) = 16a^2b^2 - 16b^2a^2 - 144b^2 + 81 + 9a^2 =$

$= 9a^2 + 81 - 144b^2 > 0$

$x^2 + \frac{(ax+4b-30)^2}{9} = 36$

$9x^2 + (a^2x^2 + 16b^2 + 900 - 60ax - 240b + 8axb) = 324$

$(9+a^2)x^2 + (8ab - 60a)x + 16b^2 - 240b + 576 = 0$

$D/4 = 16a^2b^2 - 240a^2b + 900a^2 - 16a^2b^2 + 240a^2b + \ldots\ 24^2$

$30^2 - 18^2 =$
$= 48 \cdot 12 =$
$48 \cdot 12 =$
$= 24^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{\cancel{3a}} + 3 = 0$

$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \qquad b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$

$\cancel{a^4 - b^4}\ a^4 - b^4 - \frac{13}{3a} - \frac{13}{3b} = 0$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 0$

$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3ab}\right) = 0$

$3a^4 + 9a - 13 = b^4 + 9b + 13 = 0$

$a^5 + b^5 + 9a + 9b = 0$

$(a+b)(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9) = 0$

$a = -b \qquad \log_5(2x) = -\log_5(y)$

$a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9 > 0 \qquad \log_5(2xy) = 0$

$xy = \frac{1}{2}$

$a^4 + b^4 - ab(b^2+a^2) + a^2b^2 + 9 > 0$

$\cancel{(a^2 - b^2 - ab)(a^2 + b)} + a^2b^2$

$(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - ab((a+b)^2 - ab \qquad -ab(b^2+a^2)$

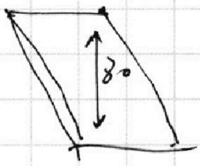
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$




$y_2-y_1 \,\vdots\, 5$

$(y_2-y_1)=5(\cancel{x_2-x_1}\ 9-x_2+x_1)$

$y_1=0 \quad y_2=5k \quad 0\le k\le 16$

$5(x_2-x_1)+5k=45$

$x_2-x_1+k=9$

$x_2-x_1\ge 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = k_1 2^{8} \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$bc = k_2 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac = k_3 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} = a^2 b^2 c^2$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{31} \cdot \sqrt{3 k_1 k_2 k_3}$

$\cancel{abc} = \sqrt{3 k_1 k_2 k_3}_{min} = 3$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{35}$

$a = 2^{4} \cdot 3^{7} \cdot 5^{6} \cdot k_1$

$b = 2^{4} \cdot 3^{7} \cdot 5^{6}$

$c =$

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 12 \\ a_2 + c_2 = 14 \end{cases}$

$b_2 - a_2 = -2$

$a_2 - b_2 = 14 - 12 = 2$

$a_2 + b_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$

$a_3 + b_3 = 14$
$b_3 + c_3 = 20$
$a_3 + c_3 = 22$

$a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 14$

$a_5 + b_5 = 12$
$b_5 + c_5 = 17$
$a_5 + c_5 = 39$

$b_5 = -5$

$a_5 - b_5 = 22$
$a_5 + b_5 = 12$

$a_5 + b_5$

$\begin{cases} a_5 + b_5 = 12 + x_5 \\ b_5 + c_5 = 17 + y_5 \\ a_5 + c_5 = 39 + z_5 \end{cases}$

~~$a_5 - b_5 = 12 + z_5 - y_5$~~
~~$a_5 + b_5 = 12 + x_5$~~
~~$a_5 = 12 + \frac{x_5 + z_5 - y_5}{2}$~~

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 12 \\ a_2 + c_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 14 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ a_3 + c_3 = 21 \to 22 \end{cases}$

$a_3 - b_3 = 1 \Rightarrow 2a_3 = 15 \quad 15 \not\vdots 2$

$\Rightarrow a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

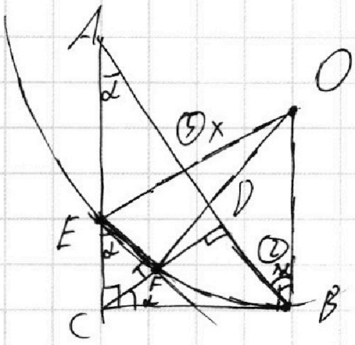
$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$

$10 \cdot \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$ $\quad \arcsin \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$\frac{10\pi}{2} - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi$

$x = \frac{\pi}{2}$




$AB \parallel EF$

$AD : DB = 5 : 2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ?$

$CD^2 = 5x \cdot 2x = 10x$

$CD = x\sqrt{10}$

$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CF}{2}$

$\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = k$

$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{EF \cdot CF}{2k^2}$

$a = \cancel{4} x_2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_5$

$\cancel{x_2 = 0}$ $\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 + x_2 \\ a_2 + c_2 = 14 + z_2 \\ b_2 + c_2 = 12 + y_2 \end{cases}$

$a_2 - b_2 = 2 + z_2 - y_2 + z_2$

$a_2 = 5 + \frac{x_2 - y_2 + z_2}{2}$

$a_2 = 5$

$b_2 = 8 + x_2 - 5 = 3$

$c_2 = 9 + y_2 = 9$

$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

$x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$ $\quad 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k)$

$5\pi - 10x - 20\pi k = \pi - 2x$

$8x = 5\pi - 20\pi k$

$x = \frac{5\pi}{8} - \frac{5}{2}\pi k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} a_5+b_5=12 \\ b_5+c_5=17 \\ a_5+c_5=39 \end{cases}$$

$a_5-b_5=22 \quad a_5+b_5=12$

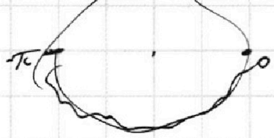
$a_5+b_5 \geq a_5-b_5 \Rightarrow -10\geq 0$

$5^{20}$

$\frac{\pi}{2}-2x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

$a_5+b_5=22$
$b_5+c_5=17$
$a_5+c_5=39$

$a_5=22;\ b_5=0 \quad c_5=17$



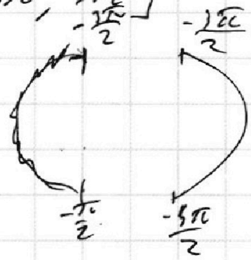
$a=2^5\cdot3^8\cdot5^{22}$
$b=2^3\cdot3^6\cdot5^0$
$c=2^9\cdot3^{14}\cdot5^{17}$

$\underline{abc=2^{17}\cdot3^{28}\cdot5^{39}}$

$\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

№3 $\quad 10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))=\pi-2x$

$\arcsin t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 10\cdot\arcsin t\in[-5\pi;5\pi]$



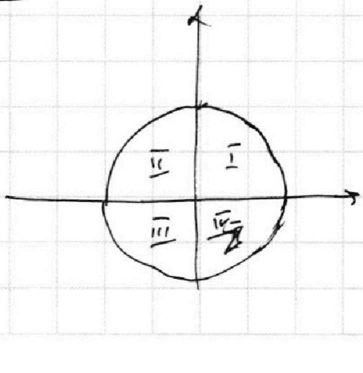
$-5\pi\leq\pi-2x\leq5\pi$
$-6\pi\leq-2x\leq4\pi$
$-2\pi\leq x\leq3\pi$

$\sin(10\arcsin(\cos(x)))=\sin(\pi-2x)=\sin(2x)$

$\sin(\ldots)-\sin(2x)=0 \qquad \sin(\alpha)-\sin(\alpha-\beta)=$

$2\cos\left(\frac{10\arcsin(\cos(x))+2x}{2}\right)\sin(\ldots)=0 \qquad =\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)-$
$-(\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta))=$
$=2\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$\left[\begin{array}{l} 5\arcsin(\cos(x))+x=\frac{\pi}{2}+\pi k \\ 5\arcsin(\cos(x))-x=\pi k \end{array}\right.$$



1) $x\in \mathrm{I} \quad \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))=$

1) $x\in[-2\pi;-\pi]$

$\frac{\pi}{2}-x\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))=$
$=\frac{\pi}{2}-x-2\pi$

$10(\frac{\pi}{2}-x-2\pi)=\pi-2x$

$-15\pi-10x=\pi-2x$

~~$x=-16\pi$~~ $\varnothing$

~~$3x=15\pi$~~
~~$x=5\pi$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

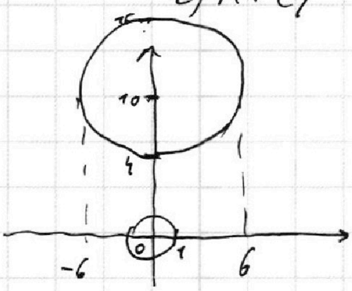
$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$ 4 реш.

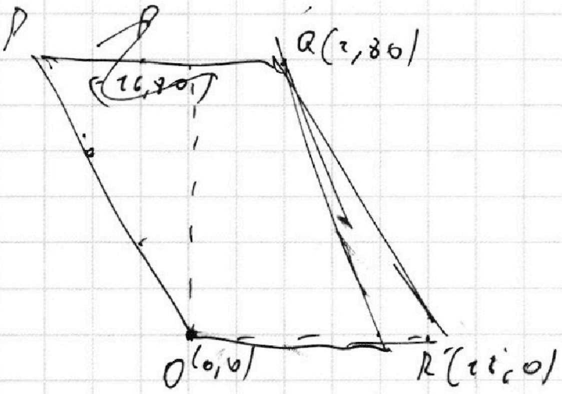
$x^2+y^2-20y+100-36$

$x^2+(y-10)^2-36$

1) $x^2+y^2=1$ 2) $x^2+(y-10)^2=36$

$y=\frac{ax+4b}{3}$




$5x_2+y_2-5x_1+y_1-45=0$

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

1) $y_2 \geq y_1$ $y_2-y_1 \vdots 5$

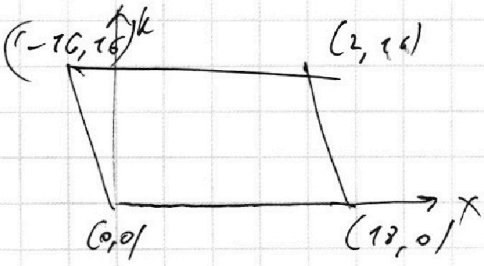
$x_2-x_1 \leq 9$

$\cancel{5(x_2-x_1)}$

$y_2-y_1=5k$

$\frac{80}{16}=5+1$

$-16 \leq k \leq 16$




$x_2-x_1+k=9$

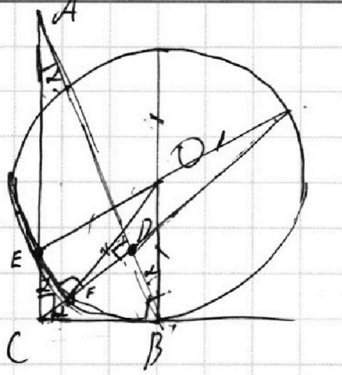
$-6 \leq x_2-x_1 \leq$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




$AD = 5x$
$DB = 2x$
$CD = x\sqrt{10}$
$\cancel{\sin(\alpha) =}$
$CB^2 = 4x^2 + 10x^2 =$
$CB = x\sqrt{14}$
$\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$
$CF = EF \cdot tg(\alpha)$
$\cancel{\sin(\alpha) = \frac{DB}{CB}} = \frac{2x}{}$
$tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$
$CF = EF\sqrt{\frac{2}{5}}$
$\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$ $y = \frac{4b + ax}{3}$

$x^2 + \frac{16b^2 + 8ab x + a^2x^2}{9} = 1$

$\cancel{9x^2}(9 + a^2)x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$

$D = 64a^2b^2 - 4(144b^2 - 81 + 16a^2b^2 - 9a^2) =$
$= -4 \cdot 144b^2$

$D_{/4} = 16a^2b^2 - (144b^2 - 81 + 16a^2b^2 - 9a^2) =$

$= -144b^2 - 9a^2 + 81 \geq 0$

$a^2 < 9$
$-3 < a < 3$

$\cancel{-(144b^2 + 9a^2 - 81)}$
$81 =$
$81 > 144b^2 + 9a^2$

$x^2 +$ $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \sin^2(\alpha) = \frac{2}{7}$

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$

$a^4 + b^4 + 3 - ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 + 3 = 0$
$(a^2 - b^2)^2 + 3a^2b^2 + 3 - ab(a^2 + b^2) = 0$
$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 + 3 - ab(a^2 + b^2) = 0$
$((a^2 + b^2) - ab)^2 + ab(a^2 + b^2) + 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^2(2x) - 3\log_{2x}(5) = \log_{8x^3}(625) \; 3$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\log_5^2(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{3}\log_{\frac{2x}{5}}(8x) + 3 = 0$

$\cancel{\log_5^2(2x) - \frac{4}{3}\log_5^2(}$

$t^2 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$

$t^2 - \frac{9+1}{3t} + 3 = 0$

$3t^3 + 9t - 13 = 0$

$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$ $\quad \log_5^2(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3}\log_5(y) - 3$

$q^2 + \frac{4}{q} + \frac{1}{3q} + 3 = 0$

$q^2 + \frac{13}{3q} + 3 = 0$

$3q^3 + 9q + 13 = 0$

$3(t^3 + q^3) + 9(q - t) = 0$

$t^3 + q^3 + 3(q - t) = 0$

$(a^3 + b^3)(a^2 - ab + b^2) =$
$= a^5 - a^4b + a^3b^2 + b^3a^2 - ab^4 + b^5$

$(t + q)(t^4 - tq^3 + t^2q^2 - t^3q + q^4) + (q - t) = 0$ $\quad (a + b)(a^4 + b^4 - ab^3 - ba^3 + a^2b^2) =$
$= a^5 + ab^4 - a^2b^3 - ba^4 + a^3b^2 + b^5 + a^4b - ab^4 - a^3b^2 \ldots$
$= a^5 + b^5$