



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) a_1, b_2, c_2 - степени двух в разложении
чисел a, b, c на простые
 a_3, b_3, c_3 - степени трех. $a_3 b_3 c_3$ - степени трех

$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = k_2 \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14} \\ ac = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 3^{27} \cdot 5^{19} \end{cases}$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$abc = 2^{12} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 3},$$

также значение $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ - тоже значение abc
аналогично $a_1, b_2, c_2 \dots$ ~~однозначно~~
 $k_{12}, k_{22}, k_{32} \dots$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = k_{12} + 18 \\ a_2 + c_2 = k_{22} + 12 \\ a_2 + c_2 = k_{32} + 14 \end{cases}$$

система имеет реш. при

$$k_{12} = k_{22} = k_{32} = 0$$

$$a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 9$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = k_{13} + 14 \\ a_3 + c_3 = k_{23} + 20 \\ a_3 + c_3 = k_{33} + 21 \end{cases}$$

$$a_3 - b_3 = k_{13} - k_{23} + 1$$

$$2a_3 = \cancel{15} + k_{13} - k_{23} + k_{33}$$

имеет единственное решение $k_{13} = 7$,
а о.с.m. = 0

$$\begin{cases} a_3 = 8 \\ b_3 = 14 \\ c_3 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = k_{15} + 12 \\ a_5 + c_5 = k_{25} + 17 \\ a_5 + c_5 = k_{35} + 19 \end{cases}$$

$$a_5 - b_5 = \cancel{22} + k_{15} - k_{25}$$

$$a_5 + b_5 = 12 + k_{15}$$

$$2b_5 = -10 + k_{15} + k_{25} - k_{35}$$

$$k_{15} = 10, \text{ о.с.m.} = 0$$

$$\begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 22 \\ c_5 = 17 \end{cases}$$

~~все~~ Каждое члено ~~не~~ числа не являются степенями
2, 3, 5, причем сумма $a + b + c$ членов. \Rightarrow их нет в мин.

$$\begin{cases} a = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{12} \\ b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0 \\ c = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \end{cases} \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}1) \arcsin(\cos(\lambda)) &= \pi - 2x \\2) \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \pi - 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(t) \left(t \in [-1, 1] \right) &\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\3) \arcsin(t) &\in [-\pi, \pi] \\t = \sin(\frac{\pi}{2} - x) &\in [-1, 1] \\-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x &\leq \pi \\-\frac{3\pi}{2} \leq -x &\leq \frac{\pi}{2} \\-\pi \leq x &\leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1) x \in [-2\pi, -\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) &= \frac{\pi}{2} - x - \pi \\ 3\pi - 2x - 2\pi &= \pi - 2x \\ 2x &= -2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) x \in [-\pi, 0] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) &= \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \\ \pi - 3\pi + 2x &= \pi - 2x \\ 2x &= 2\pi \\ x &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) x \in [0, \pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) &= \frac{\pi}{2} - x \\ 5\pi - 2x &= \pi - 2x \\ 2x &= 4\pi \\ x &= 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \lambda \in [\pi, 2\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= -\pi - (\frac{\pi}{2} - \lambda) \\ -3\pi + 2\lambda &= \pi - 2x \\ 2x &= 4\pi \\ x &= 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5) x \in [2\pi, 3\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) &= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \\ 5\pi - 2x &= \pi - 2x \\ 2x &= 4\pi \\ x &= 2\pi\end{aligned}$$

Ответ: $x = 2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \cancel{\text{з}} - \frac{\sqrt{a^2+9}}{4} \geq \frac{3\sqrt{a^2+9} + 15}{2}$$

$$7\sqrt{a^2+9} + 30 \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$2) \frac{\sqrt{a^2+9}}{4} \leq \frac{-3\sqrt{a^2+9} + 15}{2}$$

$$7\sqrt{a^2+9} \leq 30$$

$$\sqrt{a^2+9} \leq \frac{30}{7}$$

$$a^2 \leq \frac{30^2}{49} - 9^2$$

$$a^2 \leq \frac{9}{7} \cdot \frac{11}{7}$$

$$\frac{-3\sqrt{51}}{7} \leq a \leq \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

~~з~~ 1 & 2 $\Rightarrow a \in \left[-\frac{3\sqrt{51}}{7}; \frac{3\sqrt{51}}{7}\right]$ - это не сложно
найти б для реш.

$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$ - сложно.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 200 - 36) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2x+4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

Графика этих функций - окружности, которые не пересекаются, т.к. расстояние между центрами = 20, а сумма радиусов \neq

что для того и речи нечестно, что для обоих урав при подстановке y было ≥ 0

$$1) x^2 + \left(\frac{2x+4b}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 + 4x^2 + 8xbx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$(2^2 + 1^2)x^2 + 8xbx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D_{1/4} = a^2 - (a^2 + b^2)(b^2 - 9) = 9a^2 + 8b^2 - 9b^2$$

$$D_{1/4} = 26a^2b^2 - (a^2 + b^2)(16b^2 - 9) = 9a^2 + 8b^2 - 9 \cdot 16b^2 > 0$$

$$\frac{9a^2 + 8b^2}{2} > 16b^2$$

$$-\sqrt{\frac{9a^2 + 8b^2}{2}} < b < \sqrt{\frac{9a^2 + 8b^2}{2}}$$

$$2) x^2 + \left(\frac{2x+4b-30}{3}\right)^2 - 6^2 = 0$$

$$9x^2 + a^2x^2 - 2ax(4b-30) + (4b-30)^2 - 36 = 0$$

$$D_{1/4} = a^2x^2 - (4b-30)^2 - (a^2 + b^2)((4b-30)^2 - 36^2) =$$

$$= a^2 \cdot 36 - 9(4b-30)^2 + 9 \cdot 36 > 0$$

~~$$6^2a^2 - (4b-30)^2 + 36^2 > 0$$~~

~~$$9a^2 + 8b^2 > (4b-30)^2$$~~

~~$$-\frac{3\sqrt{a^2 + b^2}}{2} < 4b - 30 < 3\sqrt{a^2 + b^2}$$~~

$$-\frac{3\sqrt{a^2 + b^2} + 30}{2} < b < \frac{3\sqrt{a^2 + b^2} + 30}{2}$$

Рассмотрим случай, когда
условия от D_1 и D_2 не пересек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ДД1: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\log_5^3(2x) - 3\log_5(2x) - \log_5 x^3(625) + 3 = 0$$

$$\log_5^3(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 = 0$$

$$3\log_5^3(2x) - 23 + 9\log_5(2x) = 0$$

$$\log_5^3(3) + 4\log_5(3) - \log_5^3(6,25) + 3 = 0$$

$$\log_5^3(4) + \frac{1}{\log_5(4)} + \frac{1}{3\log_5(4)} + 3 = 0$$

$$3\log_5^3(4) + \frac{1}{\log_5(4)} - 23 + 9\log_5(4) = 0$$

$$3\log_5^3(2x) + 3\log_5^3(3) + 9((\log_5(2x) + \log_5(3)) = 0$$

$$(\log_5(2x) + \log_5(3))((\log_5^3(2x) - \log_5^3(2x)\cdot\log_5(4) + \log_5^2(2x)\cdot\log_5^2(4) + - \\ - (\log_5(2x)\cdot\log_5^3(4) + \log_5^3(4) + 3)) = 0$$

$$\begin{cases} \log_5(2x) + \log_5(3) = 0 \rightarrow \log_5(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \log_5^3(2x) - \dots + \log_5^3(4) + 3 = 0 \rightarrow \text{m.z. логарифм } 0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$. $(\cancel{\log_5^3})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 95$$

$$(y_2 - y_1) : 5 \quad y_2 - y_1 = 5k$$
$$-80 \leq y_2 - y_1 \leq 80$$
$$-16 \leq k \leq 16$$

$$x_2 - x_1 + k = 9$$
$$x_2 - x_1 = 9 - k$$

Если $y_1 : 5$, то мы можем решить задачу
для паралл. с верш. $O'(0,0)$, $R'(28,0)$, $P'(-16,16)$,
 $Q'(2,16)$.
т.к. $y_2 : 5$ и $\frac{80}{5} = 16$
и урав $x_2 - x_1 + k = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9x^2 + a^2 x^2 + 2a(46 - 30/x) + (46 - 30/x)^2 - 324 = 0$$

$$\therefore (46 - 48)/(46 - 12) = 0$$

$$D_{12} = a^2(266^2 - 240b + 500) - (9+a^2)((46-30)^2 - 324) =$$

$$D_{12} = a^2(46-30)^2 - (9+a^2)((46-30)^2 - 324) =$$

$$= -9(46-30)^2 + 9 \cdot 324 + 324a^2 \geq 0$$

$$9x^2 + (ax+46)^2 - 9 = 0$$

$$(9+a^2)x^2 + 8abx + 46^2 - 9 = 0$$

$$D_{12} = a^2 \cdot 266^2 - (9+a^2)(266^2 - 9) =$$

$$= -9 \cdot 266^2 + 81 + 9a^2 \geq 0 \Rightarrow -266^2 + 9 + a^2 \geq 0$$

$$a^2 + 9 > 266^2$$

$$D_{12} = a^2(46-30)^2 - (9+a^2)((46-30)^2 - 324) =$$

$$= -9(46-30)^2 \cancel{+ 36(46-30)} + 324 \cdot 9 + 324a^2 =$$

$$= -(46-30)^2 + 324 + 36a^2 = -266^2 + 240b + 500 + 324 + 36a^2 \geq 0$$

$$-(26-15)^2 + 81 + 9a^2 \geq 0$$

$$a^2 + 9 > \frac{(26-15)^2}{9}$$

$$16b^2 < a^2 + 9$$

$$\left\{ b^2 < \frac{a^2 + 9}{16} \right.$$

$$(26-15)^2 < 9a^2 + 81$$

$$-3\sqrt{a^2 + 9} < 26-15 < 3\sqrt{a^2 + 9}$$

$$-\frac{\sqrt{a^2 + 9}}{4} < b < \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{4}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{2} < b < \frac{3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{2}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{2} \geq 3\cancel{\sqrt{a^2 + 9}} - \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{4}$$

$$30 \geq 7\sqrt{a^2 + 9}$$

$$\frac{90}{45} \geq a^2 + 9$$

$$\frac{200 - 481}{15} \geq a^2$$





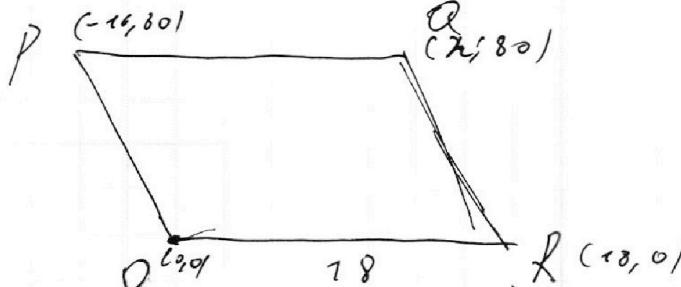
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$26^2 + 80^2 \approx (-16+80)^2 - 2 \cdot 16 \cdot 80 = \\ = 96^2 - 2460$$

$$2(x_2 - x_1)/\sqrt{4x} = 34$$

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$5x_2 + y_2 = 45$$

$$y_2 = 45 - 5x_2$$

$$y_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 9$$

$$y = \frac{\alpha x + 45}{3} = \cancel{\frac{\alpha x}{3}} + \frac{\alpha x}{3} + \cancel{15}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 20)^2 = 36 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{9} + \frac{2}{3} \alpha x \cancel{dt} + \cancel{d^2} = 0$$

$$9x^2 + \alpha^2 x^2 + 80x + 16b^2 - 9 = 0$$

$$9x^2 + (\alpha x + 46 - 30)^2 - 324$$

$$(9 + \alpha^2)x^2 + 80x + 16b^2 - 9 = 0$$

$$9x^2 + \alpha^2 x^2 + 2(\alpha x + 46 - 30) + (46 - 30)^2 - 324$$

$$\Delta/\alpha = 16\alpha^2 b^2 - (2\alpha b)^2 / (9 + \alpha^2) = 16\alpha^2 b^2 - 16b^2 \cancel{\alpha^2} - 144b^2 + 81 + 9\alpha^2$$

$$= 9\alpha^2 + 81 - 144b^2 > 0$$

$$x^2 + \frac{(\alpha x + 46 - 30)^2}{9} = 36$$

$$\cancel{\alpha} \rightarrow$$

$$9x^2 + (\alpha^2 x^2 + 16b^2 + 800 - 60\alpha x - 240b + 8\alpha x b) = 324$$

$$30^2 - 28^2 =$$

$$= \cancel{900} - \cancel{784} =$$

$$= 116 =$$

$$(9 + \alpha^2)x^2 + (\alpha x + 46 - 30)^2 + 16b^2 - 240b + 876 = 0$$

$$48 \cdot 12 = \\ = 576$$

$$\Delta/\alpha = 16\alpha^2 b^2 - 2\alpha b(1800\alpha^2 - 16\alpha^2 b^2 + 240b) + \cancel{144b^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{ab} + 3 = 0$$

$$b^4 - \frac{23}{3a} + 3 = 0 \quad b^4 + \frac{23}{3b} + 3 = 0$$

~~$$a^4 - b^4 - \frac{23}{3a} - \frac{23}{3b} = 0$$~~

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{23}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right) = 0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2) - \frac{23}{3ab} = 0$$

~~$$a^4 + 9a - 13 = b^4 + 9b + 23 = 0$$~~

$$a^4 + b^4 + 9a + 9b = 0$$

$$(a+b)(a^3 - ab^2 + a^2b^2 - a^3b + b^4) + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= -b \\ a^3 - ab^2 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 - ab(b^2 + a^2) + a^2b^2 + 9 \leq 0 \quad x^4 = \frac{1}{2}$$

~~$$(a^2 - b^2 - ab)/(a^2 + b^2) + a^2b^2$$~~

$$(a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 - ab((a+b)^2 - ab) - ab(b^2 + a^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

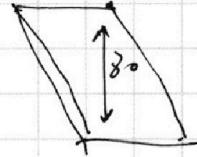
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



$$y_2 - y_1 : 5$$

$$(y_2 - y_1) = 3(x_2 - x_1)$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 5k \quad 0 \leq k \leq 16$$

$$3(x_2 - x_1) + 5k = 45$$

$$x_2 - x_1 + k = 9$$

$$x_2 - x_1 \geq 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = b_2 \cdot 3^{24} \cdot 5^{72}$$

$$bc = b_2 \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = b_2 \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} = a^? b^? c^?$$

$$abc = 2^{22} \cdot 3^{27} \cdot 5^{31} \cdot \sqrt{3k_1 k_2 k_3}$$

$$\sqrt{3k_1 k_2 k_3} \min = 3$$

$$\begin{array}{c} a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \\ b = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \\ c = \end{array}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 2^4 \\ b_2 + c_2 = 2^2 \\ a_2 + c_2 = 2^4 \end{cases}$$

$$abc = 2^{22} \cdot 3^{27} \cdot 5^{35}$$

$$a_2 - b_2 = 2^4 - 2^2 = 2$$

$$a_2 + b_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$$

$$a_3 + b_3 = 2^4$$

$$a_3 + c_3 = 2^0$$

$$a_3 + c_3 = 2^2$$

$$a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 2^4$$

$$a_5 + b_5 = 2^2$$

$$a_5 + c_5 = 2^7$$

$$a_5 + c_5 = 3^9$$

$$b_5 = -5$$

$$a_5 - b_5 = 2^2$$

$$a_5 + b_5 = 2^2 \quad a_5 + b_5$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 2^2 + x_5 \\ b_5 + c_5 = 2^7 + y_5 \\ a_5 + c_5 = 3^9 + z_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 - b_5 = 2^2 + c_5 - y_5 \\ a_5 + b_5 = 2^2 + x_5 \\ a_5 = 2^2 + \frac{x_5 + z_5 - y_5}{2} \end{cases}$$

*

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 2^2 \\ a_2 + c_2 = 2^4 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 2^4 \\ b_3 + c_3 = 2^0 \\ a_3 + c_3 = 2^1 \end{cases} \Rightarrow a_3 - b_3 = 1 \Rightarrow 2a_3 = 2^5 \quad 2^5 / 2$$

$$\Rightarrow a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 2^4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



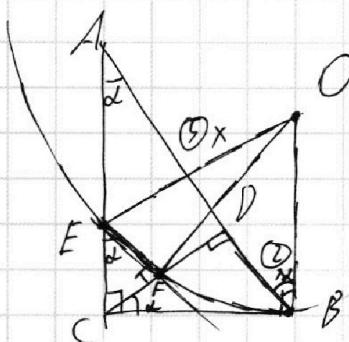
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

$$10 \cdot \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x \quad \arcsin \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{10\pi}{2} - 10x = \pi - 2x$$

$$8x = \frac{9\pi}{2}$$
$$x = \frac{9\pi}{16}$$



$$AB \parallel EF$$

$$AD : DB = 3 : 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$CD^2 = 5x \cdot 2x = 10x$$
$$CD = x\sqrt{10}$$

$$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CF}{2}$$

$$\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = k \quad S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} =$$
$$= \frac{EF \cdot CF}{2 \cdot EF^2}$$

$$\alpha = x_2, \alpha_2 = \alpha_3, \alpha_5$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 6 + x_2 \\ a_2 + c_2 = 12 + z_2 \\ b_2 + c_2 = 12 + y_2 \end{cases}$$

$$a_2 - b_2 = 2 + y_2 - z_2 - y_2 + z_2$$

$$a_2 = a_2 = 2 + \frac{x_2 - y_2 + z_2}{2}$$

$$a_2 = 5$$

$$b_2 = 8 + x_2 - 5 = 3$$

$$b_2 + c_2 = c_2 = 5 + y_2 = 9$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k] \quad 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k)$$

$$5\pi - 10x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$8x = 5\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{8} - \frac{5}{2}\pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 22 \\ a_5 + b_5 + c_5 = 72 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$$

$$b_5 - a_5 = 22 \quad a_5 + b_5 = 72$$

$$a_5 + b_5 \geq a_5 - b_5 \Rightarrow -10 \geq 0$$

8²⁰

$$\frac{\pi}{2} - 2x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

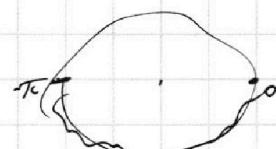
$$a_5 + b_5 = 22$$

$$b_5 + c_5 = 72$$

$$a_5 + c_5 = 39$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 9 \\ a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 22 \\ 6 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 0 \\ c = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \end{array}$$

$$\underline{abc} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 28 \cdot 39$$



$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt{3} \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

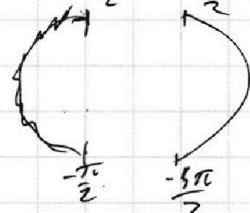
$$\arcsin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] = 2\pi \cdot \arcsin \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$-\pi \leq \pi - 2x \leq \pi$$

$$-\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\pi - \arcsin(\cos(x))) = \sin(\pi - 2x) = \sin(2x)$$



$$\sin(\dots) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(\alpha - \beta) =$$

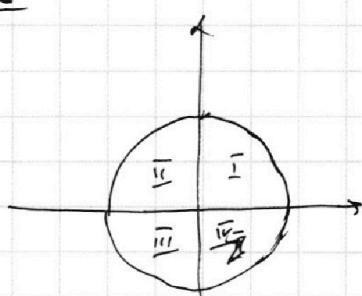
$$2 \cos\left(\frac{\pi - \arcsin(\cos(x)) + 2x}{2}\right) \sin(\dots) = 0 = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) - (\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)) =$$

$$\pi - \arcsin(\cos(x)) + x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$= 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\cos(x)) - x = \pi k$$

2



$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$\forall x \in [-\pi; -\pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$2\left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right) = \pi - 2x$$

$$4\pi - 4x = \pi - 2x$$

$$x = -\pi$$

$$x = -\pi$$

$$x = -\pi$$



$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$=\frac{\pi}{2} - x - \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

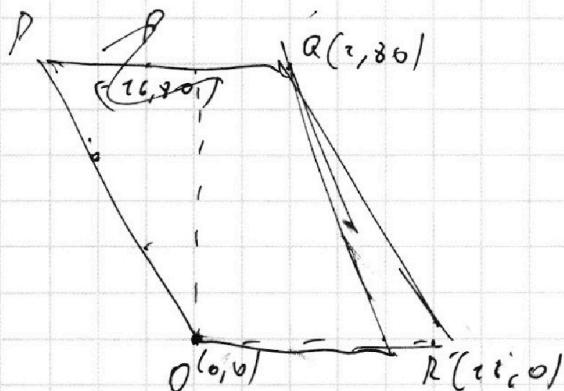
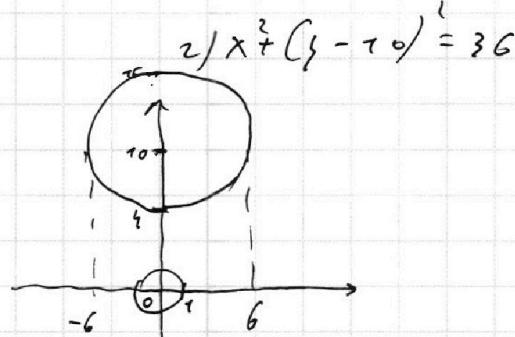
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 9x - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

"реш."

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36$$
$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$1) x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$\frac{9x + 4b}{3}$$
$$y =$$



$$5x_2 + y_2 - 5x_1 + y_1 - 45 = 0$$

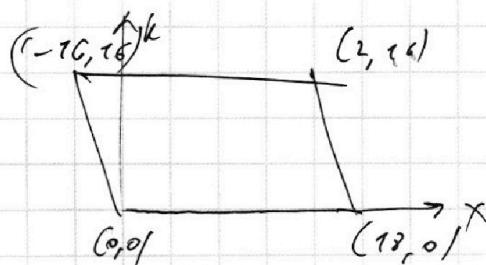
$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45.$$

$$1) y_2 \geq y_1 \quad y_2 - y_1 \geq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$y_2 - y_1 = 5k$$

$$-26 \leq k \leq 20$$



$$x_2 - x_1 + k = 5$$

$$-6 \leq x_2 - x_1 \leq$$

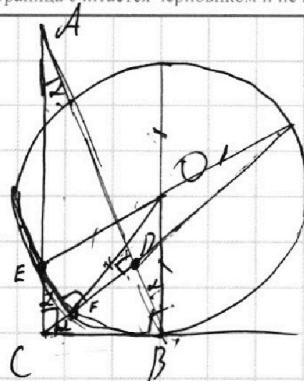
На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (ax + b)^2 = 4$$

$$x^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 = 4$$

$$(1 + a^2)x^2 + 2abx + b^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + (a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - 4 = 0$$

$$\Delta = 4a^2b^2 - (144b^2 - 81 + 16a^2b^2 - 9a^2) =$$

$$= -4 \cdot 11 \cdot b^2 + 81 \geq 0$$

$$\Delta_{12} = 16a^2b^2 - (144b^2 - 81 + 16a^2b^2 - 9a^2) =$$

$$= -144b^2 + 81 \geq 0$$

$$\begin{aligned} & a^2 \leq 9 \\ & \rightarrow -3 \leq a \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -144b^2 + 81 \geq 0 \\ & 144b^2 \leq 81 \\ & b^2 \leq \frac{81}{144} \\ & b \leq \frac{9}{12} \\ & b \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \sin^2 \alpha = \frac{1}{7}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - ab + b^2 + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2 + 3 - ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 + 3 = 0$$

$$(a^2 - b^2)^2 + 3a^2b^2 + 3 - ab(a^2 + b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 + 3 - ab(a^2 + b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^3(2x) - 3 \log_5(5) = \log_5(6) + 3$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^3(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + \frac{4}{3} \log_5(5) + 3 = 0$$

$$\cancel{\log_5^3(2x)} - \frac{4}{3} \log_5(5) = 0$$

$$8t^3 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$$

$$t^3 - \frac{9+1}{3t} + 3 = 0$$

$$3t^5 - 9t - 17 = 0 \quad \text{реш}$$

$$\begin{cases} g > 0 \\ g \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^3(g) + \frac{4}{\log_5(g)} = -\frac{7}{3} \log_5(4) - 3$$

$$g^3 + \frac{4}{g} + \frac{1}{3g} + 3 = 0$$

$$g^3 + \frac{13}{3g} + 3 = 0$$

$$g^3 + 9 + 3(g-t) = 0$$

$$t^3 + g^3 + 3(g-t) = 0$$

$$(t+g)(t^2 - tg^2 + t^2g^2 - t^3g + g^3) + (g-t) = 0$$

$$\begin{aligned} & (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \\ & = a^3 - a^2b + a^2b^2 + b^3a^2 - ab^3 + b^3 \\ & = a^3 + ab^2 - a^2b^2 - b^3a^2 + a^3b^2 + b^3a^2 = a^3b^2 \end{aligned}$$