МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

По условию $ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, $ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$, $bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$.

a, b, c – натуральные, очевидно, что чтобы минимизировать abc в разложении на простые должны входить только 2, 3, 5, т.к. ~~остальные~~ это единственные простые, на которые должны делиться наши произведения. Отдельно разберём 2, 3, 5.

$ab \vdots 2^8$, $bc \vdots 2^{12}$, $ac \vdots 2^{14}$. Рассмотрим произведение $ab \cdot bc \cdot ac$

Оно делится хотя бы на $2^8 \cdot 2^{12} \cdot 2^{14}$ – $a^2b^2c^2 \vdots 2^{34}$

$abc \vdots 2^{17}$

$$\begin{cases} ab \vdots 3^{14} \\ bc \vdots 3^{20} \\ ac \vdots 3^{21} \end{cases} \rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 3^{14} \cdot 3^{20} \cdot 3^{21} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{55}.$$

Т.к. числа a, b, c – натуральные, а 55 на 2 не делится,

минимальное возможное число, на которое делится abc – 3^{28} (~~[illegible]~~ если бы это было 3^{27}, то $(abc)^2 \vdots 54 < 55$ – не верно) $\Rightarrow$

$abc \vdots 3^{28}$

$$\begin{cases} ab \vdots 5^{12} \\ bc \vdots 5^{17} \\ ac \vdots 5^{39} \end{cases} \rightarrow (abc)^2 \vdots 5^{12+17+39} \Leftrightarrow (abc)^2 \vdots 5^{68} \rightarrow abc \vdots 5^{34}.$$

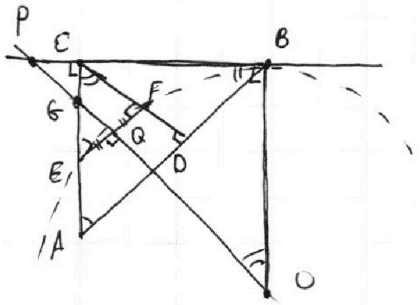
Итак, чтобы соблюдалось условие задачи должны выполняться следующие выражения: $\begin{cases} abc \vdots 2^{17} \\ abc \vdots 3^{28} \\ abc \vdots 5^{34} \end{cases}$ $\Rightarrow$ min значение abc, удовлетворяющее этим условиям – $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AD \parallel EF \Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CAD \sim \triangle ABC$.

Площади относятся как квадрат коэффициента подобия.

$S_{ADC} = \frac{5}{5+2} S_{ABC} = \frac{5}{7} S_{ABC}$

O – центр окружности, проходящей через B, E, F. и т. пересеч. сер. пер-ов.

Проведём сер. перп для EF – QO.
пусть он пересекает продолжение BC в т. P т. к. $\angle B$ - прямой (касание) =>

$\angle POB = 90^\circ - \angle BPO$ ~~=90°~~. Заметим, что $\angle PCG = \angle GEQ$ (п.у. $\triangle$ с верт. углами)

$\Rightarrow \angle CAB + \angle POB = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$

По формуле приведения $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = \pi - 2x$

$\arcsin\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow 10\arcsin(\alpha) \in [-5\pi; 5\pi]$

$\arcsin\alpha = \arcsin(\alpha + 2\pi k) = \arcsin(\pi - \alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$

Пусть $\frac{\pi}{2}+x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = \frac{\pi}{2}+x \Rightarrow$

$\longrightarrow x \in [-\pi; 0]$

$10\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \pi - 2x$

$5\pi + 10x = \pi - 2x \longrightarrow 4\pi = -12x \longrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$ - подходит.

Пусть $\frac{\pi}{2}+x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right] \longrightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = \frac{\pi}{2}+x-2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\longrightarrow x \in [-\pi+2\pi k; 2\pi k]$

$10\left(\frac{\pi}{2}+x-2\pi k\right) = \pi - 2x$

$5\pi + 10x - 20\pi k = \pi - 2x$

$12x = 20\pi k - 4\pi$

$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$-\pi + 2\pi k \le -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi k$

$-3\pi + 6\pi k \le -\pi + 5\pi k \le 6\pi k$

$-2\pi + 6\pi k \le 5\pi k \le \pi + 6\pi k \longrightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2\}$ (условие I)

Однако $\pi - 2x \in [-5\pi; 5\pi] \Rightarrow$

~~$-5\pi \le -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \le 5\pi$~~

~~$-15\pi \le -\pi + 5\pi k \le 15\pi$~~ $\longrightarrow$

~~$k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$~~

Пусть $\frac{\pi}{2}+x \in \left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi+2\pi k\right] \longrightarrow$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2}+x-2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$.

$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x + 20\pi k = \pi - 2x$

$-8x = -4\pi - 20\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$

$2\pi k \le \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \le 2\pi k + \pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(продолжение)

$-5\pi \le \pi - 2\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k\right) \le 5\pi$

$-6\pi \le \frac{2}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi k \le 4\pi$

$-18\pi \le 2\pi + 10\pi k \le 12\pi \longrightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow$ с учетом условия I $k \in \{-1; 0; 1\}$.

Пусть $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi] \longrightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k.$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \longrightarrow$

$-5\pi \le \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k\right) \le 5\pi$

$-5\pi \le \pi - 2\pi + 5\pi k \le 5\pi$

$-5\pi \le 5\pi k - \pi \le 5\pi \longrightarrow k \in \{0; 1\}$

$2\pi k \le \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \le 2\pi k + \pi$

$4\pi k \le \pi + 5\pi k \le 4\pi k + 2\pi$

$k \in \{-1; 0; 1\} \longrightarrow k \in \{0; 1\}$.

Таким образом, рассмотрели все случаи, получаем, что

Ответ:

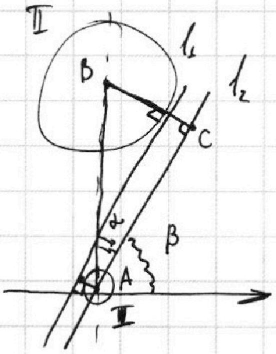
$$x = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k, \quad k \in \{-1; 0; 1\} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, \quad n \in \{0; 1\} \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)



Пусть l_1 - касат. Через центр I проведем $l_2 \parallel l_1$.
Касательная перпендикулярна радиусу в т. касания - продлим её до $\cap\, l_2$ в т. C.

$BC = 6+1 = 7$
$AB = 10$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha = \frac{7}{10} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{7}{10}\right) \Rightarrow$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow m = tg(\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -tg\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right)\right) \cup \left(tg\left(\arcsin\left(\frac{7}{10}\right) + \frac{\pi}{2}\right); +\infty\right) \Rightarrow$$

$$a \in \left(-\infty; \underline{-3tg\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right)}\right) \cup \left(3tg\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right); +\infty\right)$$

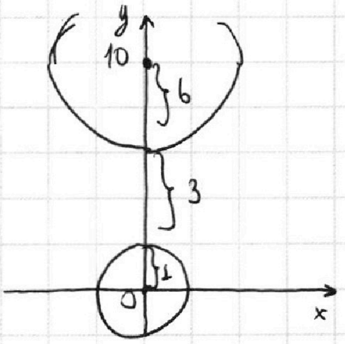
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

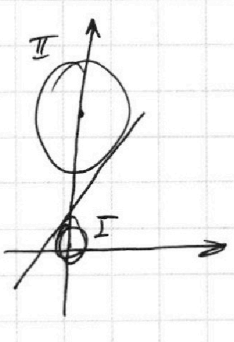
$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Первое уравнение - некоторая параметрическая прямая, а второе - две окружности. Чтобы ур-е имело 4 корня прямая должна пересекать окружности в двух точках каждую.



$\frac{a}{3}$ - угол наклона прямой, $\frac{4}{3}b$ - сдвиг относительно оси Oy

Если для некоторого a $\exists$ b, уд. условию, это значит, что ~~a~~ мы можем так подвинуть прямую вдоль Oy, что прямая пересечёт обе окружности. Поймём, когда для любого положения прямой она не будет пересекать 2 окружности. Рассмотрим одну из общих внутр. касательных:



Пусть она задается ур-ем $mx+n$ ($m>0$). Если мы будем двигать такую касательную вверх, то она уже не пересечётся с первой окружностью, а если вниз - со второй. Теперь рассмотрим все прямые вида $kx+f$, $k\in[0;m)$. ~~Подберём~~ Подберём f так, чтобы эта прямая касалась окр. т.к. $k<m$, второй окружности она касаться не будет, а значит и не сможет пересечься в 4-х точках (рассуждение аналогично). $\Rightarrow$ такие прямые тоже не подходят.

Теперь же рассмотрим прямые $kx+f$, $k\in(m;+\infty)$. Подберём f_1 так, чтобы прямая касалась окр. I. Окр. II она будет пересекать уже в двух точках, т.к. $k>m$. Аналогично найдём ~~f~~ f_2, чтобы ~~a~~ прямая касалась окр. II, а окр. I пересекала в 2-х точках. В силу непрерывности на отрезке $[f_1;f_2]$ найдется f, т.ч. ~~а~~ прямая пересечёт окр. I и окр. II в 2-х точках каждую. $\Rightarrow$ такие прямые подходят.

В силу симметрии ~~отн~~ относительно Oy, все значения $\frac{a}{3}$, которые нам подходят, ~~также~~ - $(-\infty;-m)\cup(m;+\infty)$. Найдём m:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_5(2x))^4 - 3\log_{2x}5 = \log_{(2x)^3}5^4 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4\log_y 5 = \log_{y^3}(5^{-1}) - 3 \end{cases}$$

ОДЗ:

$2x \neq 1 \to x \neq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$\log_5 2x \neq 0$

$y \neq 1;\ \log_5 y \neq 0$

$$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ (\log_5 y)^4 + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \log_5 2x$, $\beta = \log_5 y$

$$\begin{cases} \alpha^4 - \frac{3}{\alpha} = \frac{4}{3\alpha} - 3 \quad |\cdot 3\alpha \\ \beta^4 + \frac{4}{\beta} = \frac{-1}{3\beta} - 3 \quad |\cdot 3\beta \end{cases} \to \begin{cases} 3\alpha^5 - 9 = 4 - 9\alpha \\ 3\beta^5 + 12 = -1 - 9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0 \\ 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0 \end{cases}$$

$3\alpha^5 + 9\alpha - 13 + 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0 \to 3\alpha^5 + 3\beta^5 + 9\alpha + 9\beta = 0$

$\alpha^5 + \beta^5 + 3\alpha + 3\beta = 0$

$(\alpha+\beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4) + 3(\alpha+\beta) = 0$

$(\alpha+\beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3) = 0 \to \alpha = -\beta$

$\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3 = 0$

$\log_5(2x) + \log_5 y = 0$

$\log_5(2xy) = 0$

$\downarrow$

$2xy = 1$

$xy = \frac{1}{2}$

Пусть $f(x) = x^5 + 3x$, хотим найти все пары α, β, что $f(\alpha) = -f(\beta)$ (т.к. $\alpha^5 + 3\alpha = -(\beta^5 + 3\beta)$)

Заметим, что $f'(x) = 5\alpha^4 + 3 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает.
Также заметим, что $f(x) = -f(-x)$ – функция нечётная $\Rightarrow$

Из монотонности следует то, что каждое значение ~~...~~ функция принимает ровно один раз, а равенство $f(\alpha) = -f(\beta)$ выполняется только при $\alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = -\beta$ – единственный возможный случай, а значит $xy = \frac{1}{2}$ – единств. возможный ответ.

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

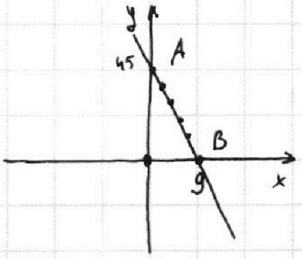
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим наше выражение более подробно:

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45.$

Пусть $x_1, y_1 = 0$, тогда точки, которые нам подходят – прямая $y_2=45-5x_2$.

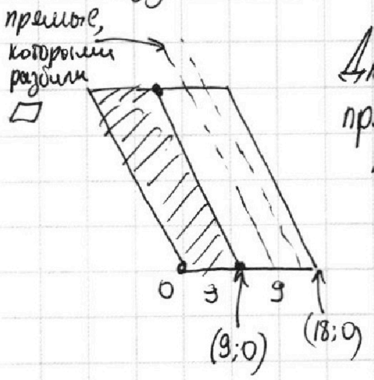


Стоит заметить, что для любого целого x_2 значение y_2 тоже целое.

Также заметим, что прямая $R(18;0)$ $Q(2;80)$ параллельна „всем" прямым AB („все прямые" – ~~для каждой точки~~ каждую целую точку можно подставить как начало координат, относительное расположение точки и прямой не изменится) Таким образом, давайте рассечём наш параллелограмм прямыми, проходящие через точки с целочисленными координатами (ранее было сказано, что такие прямые всегда проходят через них).

Имеем 19 прямых (т.к. в основании лежит 19 точек с целыми коорд.), на каждой такой прямой внутри параллелограмма – $(80:5)+1=17$ (т.к. при изменении x на 1 y меняется на 5)

Разделим параллелограмм на 2 области



Для каждой точки из закрашенной области (вкл. границы) прямая, на которой находятся подходящие точки $(x_2;y_2)$ проходит через ▱ и пересекается с ним в 17 целых точках. =>

Всего точек в закраш. области – $10\cdot17$, для каждой в пару найдется ещё 17 точек => $10\cdot17\cdot17$ (т.к. мы строим нашу картинку таким образом, чтобы каждую пару считать 1 раз)

Ответ: 2890

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

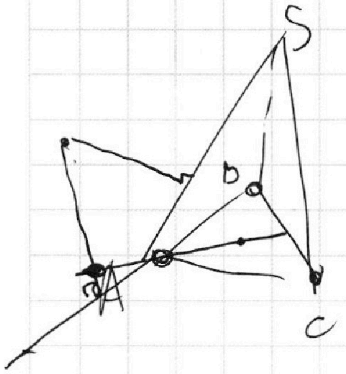
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$x = \alpha^5 + 3\alpha$

$f(x) = f(y)$



$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3$

$$\begin{cases} 3a^5 - 9 = 4 - 9a \\ b^4 + \frac{4}{b} = \frac{-1}{3b} - 3 \quad | \cdot 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5 - 9 = 4 - 9a \\ 3b^5 + 12 = -1 + 9b \end{cases}$$

$\alpha^5 + 3\alpha = -\beta^5 - 3\beta$

$\alpha^5 + 3\alpha = -(\beta^5 + 3\beta) \quad | : \alpha^3\beta^2$

$\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{3\alpha}{\alpha^2\beta^3} = -\left(\frac{\beta^2}{\alpha^3} + 3\right.$

$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha+\beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4)$

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$

$(\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

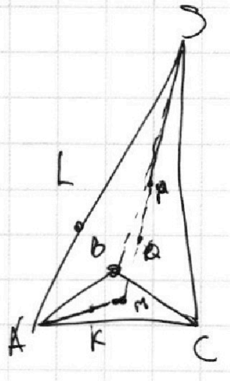
$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta)$

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a + 3b^5 + 9b = 0 \\ a^5 + 3a + b^5 + 3b = 0 \end{cases}$$

$(\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2)$

$(\alpha^2+\beta)^2 - \alpha\beta((\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha\beta) = (\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$

$\alpha > 0, \beta < 0$



$\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3 = 0 \quad | : \beta^4$

$\frac{\alpha^4}{\beta^4} - \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{3}{\beta^4}$

$\frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) + 1 + \frac{3}{\beta^4} = 0$

$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right) + 1 + \frac{3}{\beta^4} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\alpha^4 - \beta^4 - \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{4}{3}\alpha + \frac{1}{3\beta}$

$ab: 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$
$bc: 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$
$ac: 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$

$ab: 2^8$
$bc: 2^{12}$
$ac: 2^{14}$

$a^2b^2c^2: 2^{34}$
$abc: 2^{17} \longrightarrow$

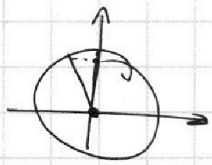
$c = 2^9$
$a = 2^5$
$b = 2^3$

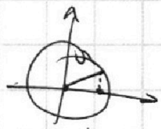
$k = -2 \to$

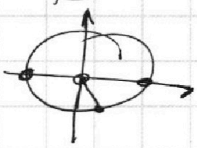
$\cancel{10\cdot\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x}$

$100\cdot(1-x^2) = \pi^2 - \cancel{4\pi x + 4x^2}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$





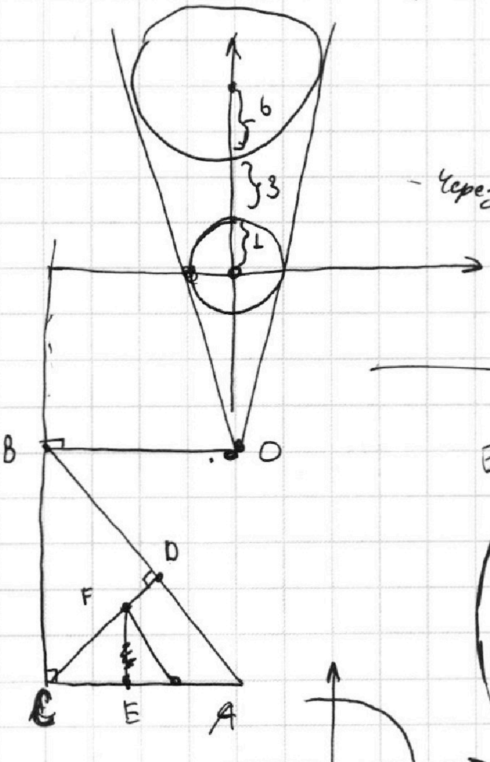


$10\cdot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \pi - 2x$

$5\pi + 10x = \pi - 2x$

$4\pi + 12x = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{3}\pi$

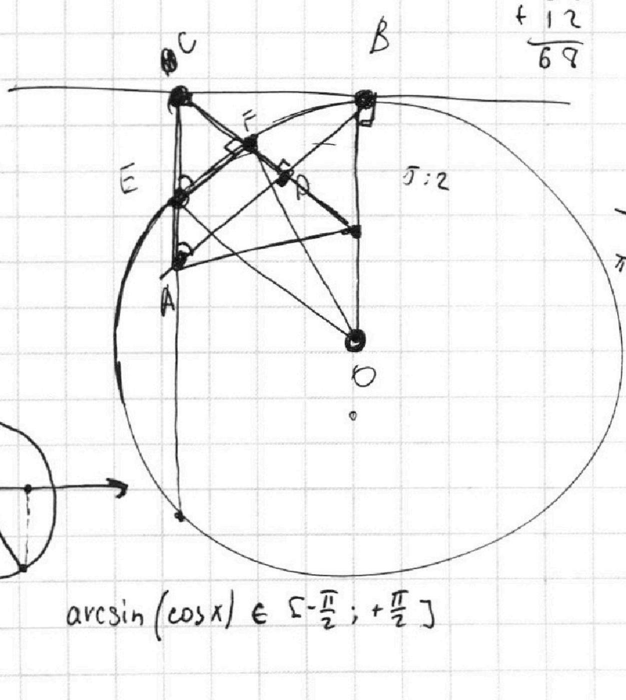
$$\begin{cases} y = \dfrac{4b+ax}{3} = \dfrac{4}{3}b + \dfrac{a}{3}x \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ (x^2+(y-10)^2 = 36 \end{array}\right. \end{cases}$$

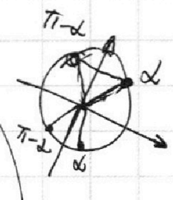


— через расстояние

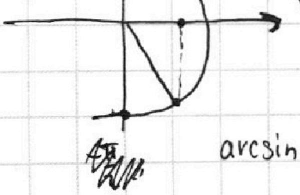
$17 + 39 = 56$
$56 + 12 = 68$

$\alpha + 2\pi$
$\alpha + 4\pi$
$\alpha + 6\pi$





$x^4 - \frac{3}{x} = \frac{4}{3x} - 3$



$\arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

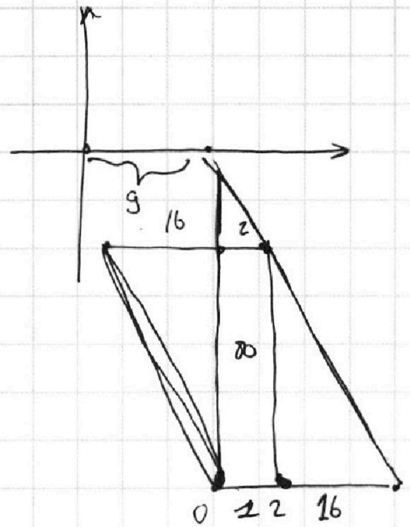
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

$\vdots 5$



$a^4-\frac{3}{a}=\frac{4}{3}a-3$

$b^4+\frac{4}{b}=-\frac{1}{3b}-3$

$a^5-3=\frac{4}{3}-3a$

$3a^5-9-4+9a=0$

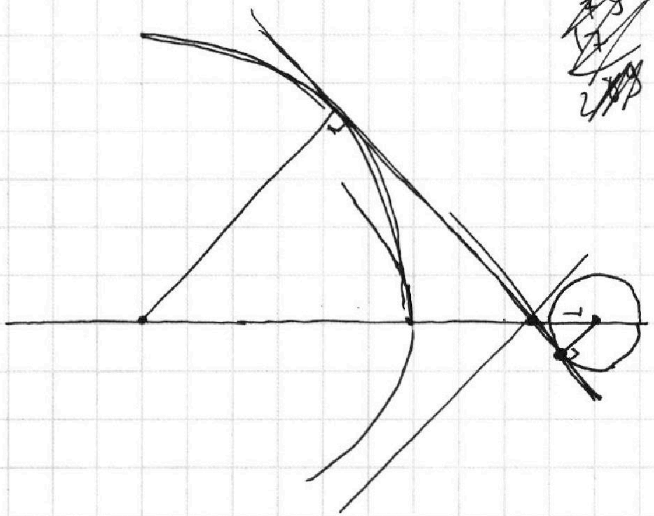
$3a^5+9a-13=0$

$5\Delta x+\Delta y=45$

$\Delta x=9-\frac{\Delta y}{5}$

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$

$\log_a b+\log_a c=\log_a bc$



$a^4-b^4-\frac{3}{a}-\frac{4}{b}=\frac{4}{3}a+\frac{1}{3b}$

$a^4-b^4-\frac{3}{a}-\frac{4}{b}-\frac{4}{3a}-\frac{1}{3b}=0$

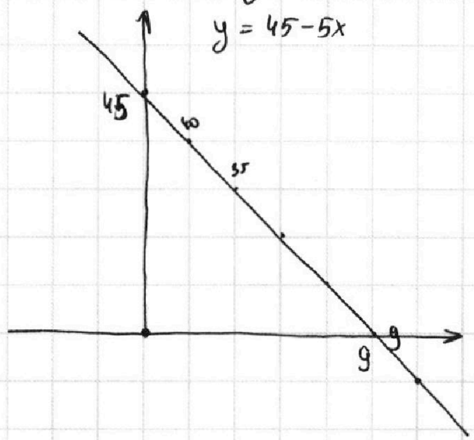
$\log_5^4 2x-\frac{3}{\log_5 2x}=\frac{4}{3\log_5 2x}-3$

$t^4-\frac{3}{t}=\frac{4}{3}t-3$

$\log_5^4 y+\frac{4}{\log_5 y}=-\frac{1}{3\log_5 y}-3$

$5x+y=45$

$y=45-5x$



(0;90)

(2;80)

(18;0)