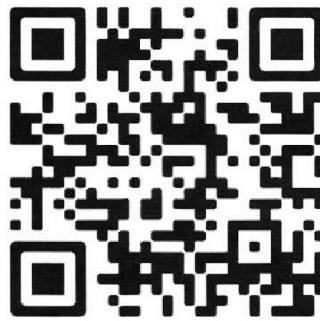




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{По условию } ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}, bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

a, b, c - натуральные, очевидно, что чтобы минимизировать abc в разложении
на простые должны входить только 2, 3, 5, т.к. ~~остальные~~ это единственные
простые, на которые должны делиться наши произведения. Отдельно
разберём 2, 3, 5.

$$ab : 2^8, bc : 2^{12}, ac : 2^{14}. \text{ Рассмотрим произведение } ab \cdot bc \cdot ac$$

$$\text{Число } abc \text{ должно быть } 2^8 \cdot 2^{12} \cdot 2^{14} = a^2 b^2 c^2 : 2^{34} \\ abc : 2^{17}$$

$$\begin{cases} ab : 3^{14} \\ bc : 3^{20} \\ ac : 3^{21} \end{cases} \rightarrow a^2 b^2 c^2 : 3^{14} \cdot 3^{20} \cdot 3^{21} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{55}$$

Т.к. числа a, b, c - натуральные, а 55 на 2 не делится,

минимальное возможное число, на которое делится abc -
 3^{28} (~~если~~ если бы это было 3^{27} , то $(abc)^2 : 54 < 55$ - не верно) \Rightarrow

$$abc : 3^{28}$$

$$\begin{cases} ab : 5^{12} \\ bc : 5^{17} \\ ac : 5^{39} \end{cases} \rightarrow (abc)^2 : 5^{12+17+39} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{68} \rightarrow abc : 5^{34}.$$

Итак, чтобы соблюдалось условие задачи, должны выполняться

следующие выражения: $\begin{cases} abc : 2^{17} \\ abc : 3^{28} \\ abc : 5^{34} \end{cases} \Rightarrow \text{минимальное } abc,$
 $\text{удовлетворяющее условию} - 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$



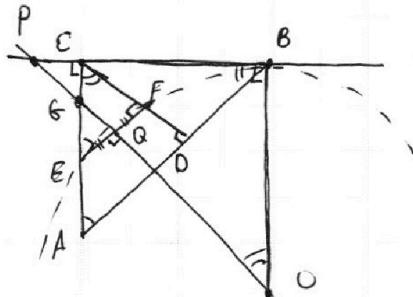
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$AD \parallel EF \Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CAD \sim \triangle ABC.$$

Площади относятся как квадраты
коэффициентов подобия.

$$S_{ADC} = \frac{5}{5+2} S_{ABC} = \frac{5}{7} S_{ABC}$$

O - центр окружности, проходящей через
B, E, F, и r. пересек сер. пер-ов.

Проведём сер. перп для EF - QO.

пусть он пересекает продолжение BC в r. P r. k. $\angle B$ -прямой (касание) \Rightarrow

$$\angle POB = 90^\circ - \angle BPO \approx 90^\circ. \text{ Значит, } \angle PCB = \angle BEQ \text{ (n.y. } \triangle \text{ с верт. углами)}$$

$$\Rightarrow \angle CAB + \angle POB = 90^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

По формуле приведения
 $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow 10 \arcsin(x) \in [-5\pi; 5\pi]$$

$$\arcsin x = \arcsin(x + 2\pi k) = \arcsin(\pi - x), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Тогда } \frac{\pi}{2} + x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \pi - 2x \quad \rightarrow \quad x \in [-\pi; 0]$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x \quad \rightarrow \quad 4\pi = -12x \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} \text{ - нognogub.}$$

$$\text{Тогда } \frac{\pi}{2} + x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$\rightarrow x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$

$$10\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$12x = 20\pi k - 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi k$$

$$-3\pi + 6\pi k \leq -\pi + 5\pi k \leq 6\pi k$$

$$-2\pi + 6\pi k \leq 5\pi k \leq \pi + 6\pi k \rightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

Однако $\pi - 2x \in [-5\pi; 5\pi] \Rightarrow$ (условие I)

$$-5\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 5\pi$$

$$-5\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 15\pi \rightarrow \text{без } -2, -1, 0, 1, 2, 3 \text{ и } \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

$$\text{Тогда } \frac{\pi}{2} + x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k\right] \rightarrow$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$
$$= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k.$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = \pi - 2x$$

$$-8x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$$

$$\text{Получаем } 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

$$-5\pi \leq \pi - 2\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k\right) \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq \frac{2}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi k \leq 4\pi$$

$$-18\pi \leq 2\pi + 10\pi k \leq 12\pi \rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \text{с учетом условие I}$$

$k \in \{-1; 0; 1\}$

Решеб $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi] \rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) =$
 $= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k.$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \rightarrow -5\pi \leq \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k\right) \leq 5\pi$$

$$-5\pi \leq \pi - 2\pi + 5\pi k \leq 5\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi k - \pi \leq 5\pi \rightarrow k \in \{0; 1\}$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$

$$4\pi k \leq \pi + 5\pi k \leq 3\pi k + 2\pi$$

$$k \in \{-1; 0; 1\} \rightarrow k \in \{0; 1\}.$$

Такими образом, рассмотрели все случаи, получивши, что

Отвр:

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k, & k \in \{-1; 0; 1\} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, & n \in \{0; 1\} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

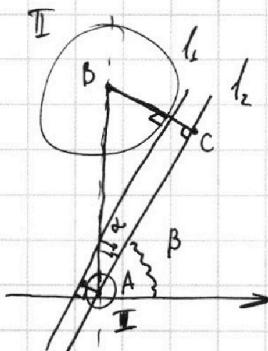
7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)



Пусть l_1 - касат. Через центр I проведем $l_2 \parallel l_1$.
Касательная перпендикулярна радиусу в т. касания - продолжим её до л. l_2 в т. С.

$$BC = 6 + 1 = 7 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{10} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{7}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow m = \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right)\right) \cup \left(\operatorname{tg}\arcsin\left(\frac{7}{10}\right) + \frac{\pi}{2}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$a \in \left(-\infty; -3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right)\right) \cup \left(3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right); +\infty\right)$$



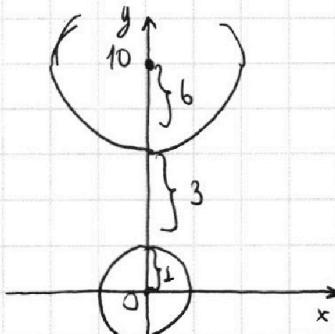
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$$

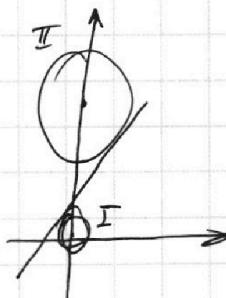
Первое уравнение - некоторое выражение прямой, а
второе - две окружности. Чтобы ур-е имело 4 корня прямая должна
пересекать окружности в двух точках каждую.



$\frac{a}{3}$ - угол наклона прямой, $\frac{4}{3}b$ - сдвиг относительно оси Оу

Если для некоторого $a \neq b$, уд. условие, это
значит, что прямая может так подойти
прямую ближе Оу, что прямая пересечёт обе
окружности. Получим, когда для любого
положения прямой она не будет пересекать 2
окружности. Рассмотрим одну из таких выпр.

касательных:



Пусть она задана ур-ем $mx + n$. Если она будет
двигаться такую касательную вверх, то она уже не пересе-
тет с первой окружностью, а если вниз - со второй.
Теперь рассмотрим все прямые видов $kx + f$, $k \in [0; m]$.
Подберем f так, чтобы эти прямые касались окр.
т.к. $k < m$, второй окружности она касаться не будет,
а значит и не сможет пересечь в 4-х точках
(рассуждение аналогично). \Rightarrow такие прямые тоже
не подходит.

Теперь же рассмотрим прямые $kx + f$, $k \in (m; +\infty)$. Подберем f так, чтобы
прямая касалась окр. I. Окр. II она будет пересекать либо в двух точках, т.к.
 $k > m$. Аналогично найдём f_2 , чтобы прямая касалась окр. II, а окр. I
пересекалась в 2-х точках. В силу непрерывности на отрезке $[f_1; f_2]$ найдётся f ,
т.ч. прямая пересечёт окр. I и окр. II в 2-х точках касания. \Rightarrow
такие прямые подходит.

В силу симметрии относительно Оу, все значения $\frac{a}{3}$, которые
мы подходит, $m - (-\infty; m) \cup (m; +\infty)$. Найдём m :

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (\log_5(2x))^4 - 3 \log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} (5^{-1}) - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - \cancel{\log_5 \frac{3}{\log_5 2x}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ (\log_5 y)^4 + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \log_5 2x$, $\beta = \log_5 y$

$$\begin{cases} \alpha^4 - \frac{3}{\alpha} = \frac{4}{3\alpha} - 3 & | \cdot 3\alpha \\ \beta^4 + \frac{4}{\beta} = -\frac{1}{3\beta} - 3 & | \cdot 3\beta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3\alpha^5 - 9 = 4 - 9\alpha \\ 3\beta^5 + 12 = -1 - 9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0 \\ 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0 \end{cases}$$

$$3\alpha^5 + 9\alpha - 13 + 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0 \rightarrow 3\alpha^5 + 3\beta^5 + 9\alpha + 9\beta = 0$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + 3\alpha + 3\beta = 0$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4) + 3(\alpha + \beta) = 0$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4) = 0 \rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3 = 0$$

Пусть $f(x) = x^5 + 3x$, хотим найти

все пары α, β , для $f(\alpha) = -f(\beta)$ (т.к. $\alpha^5 + 3\alpha = -(\beta^5 + 3\beta)$)

Заметим, что $f'(x) = 5x^4 + 3 \Rightarrow$ функция многочлен возрастает.

Также заметим, что $f(x) = -f(-x)$ — функция нечетная \Rightarrow

Из многочленов следует то, что каждое значение ~~может~~ возникнуть
функции принимает ровно один раз, а равенство $f(\alpha) = -f(\beta)$
выполняется только при $\alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = -\beta$ — единственная возможная
случае, а значит $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ — единственный возможный ответ.

Ответ: $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

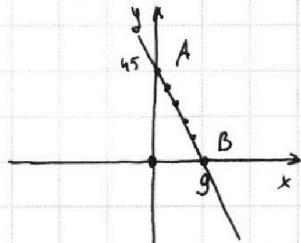


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим наше выражение более подробно:

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45.$$

Пусть $x_1, y_1 = 0$, тогда точки, которых нам подходит — прямая $y_2 = 45 - 5x_2$.



Следует заметить, что для любого целого x_2 значение y_2 тоже целое.

Такие значения, что прямые $R(18; 0)$ $Q(2; 80)$ параллельны всем прямым AB («все прямые» — ~~должен подойти~~ каждую целую точку можно подставить как начало координат, относительное расположение точек и прямых не изменится).

Имеем 19 прямых (т.к. в основании лежит 19 точек с целыми коорд.), на каждой из которых прямой вне прямого параллелограмма — ~~18~~ $(80 : 5) + 1 = 17$ (т.к. при изменении $x_2 \pm 1$ значение y_2 меняется на 5).

Разделим параллелограмм на 2 области



Две концы всех изображенных областей (вкл. граничные) прямые, на которых находятся подходящие точки $(x_2; y_2)$ ~~которые~~ проходят через \square и пересекаются с ними в 17 целых точках. \Rightarrow

Всего точек в закраин. областях — $10 \cdot 17$, где каждая

из них находит 17 точек \Rightarrow ~~точек~~ ~~точек~~

~~точек~~ $10 \cdot 17 \cdot 17$ (т.к. мы сгруппировали картины таким образом, чтобы каждую пару могли \pm раз)

Ответ: 7090

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

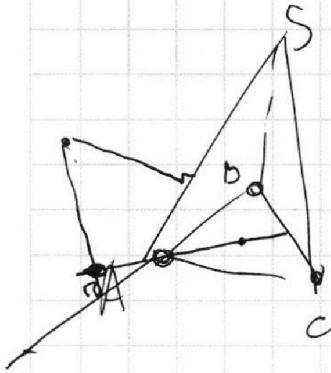
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4)$$

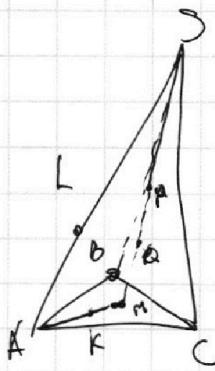
$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2$$

$$\alpha > 0, \beta < 0$$



Когда $\alpha^4 - \frac{3}{\alpha} = \frac{4}{3}\alpha - 3$

$$x = \alpha^2 + 3\alpha$$

$$f(x) = f(y)$$

$$\begin{cases} 3\alpha^5 - 9 = 4 - 9\alpha \\ \alpha^4 + \frac{4}{3} = \frac{-1}{3\alpha} - 3 \quad | \cdot 3\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha^5 - 9 = 4 - 9\alpha \\ 3\alpha^5 + 12 = -1 + 9\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^5 + 3\alpha = -\beta^5 - 3\beta \\ \alpha^5 + 3\alpha = -(\beta^5 + 3\beta) \quad | \cdot \alpha^5 \beta^5 \\ \frac{\alpha^5}{\beta^5} + \frac{3\alpha}{\alpha^5 \beta^5} = -\left(\frac{\beta^5}{\alpha^5} + 3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0 \\ 3\alpha^5 + 9\alpha + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha^5 + 9\alpha + 3\beta^5 + 9\beta = 0 \\ 3\alpha^5 + 3\alpha + \beta^5 + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$3\alpha^5 + 3\alpha + \beta^5 + 3\beta = 0$$

$$\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3 = 0 \quad | : \beta^4$$

$$\frac{\alpha^4}{\beta^4} - \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{3}{\beta^4}$$

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) + 1 + \frac{3}{\beta^4} = 0$$

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right) + 1 + \frac{3}{\beta^4} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\alpha^4 \beta^4 - \frac{3}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{4}{3\alpha + \frac{1}{3\beta}}$$

$$ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$ab : 2^8$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{34}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$bc : 2^{12}$$

$$abc : 2^{17} \rightarrow$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{71} \cdot 5^{39}$$

$$ac : 2^{14}$$

$$c = 2^9$$

$$a = 2^5$$

$$b = 2^3$$

$$k = -2 \rightarrow$$

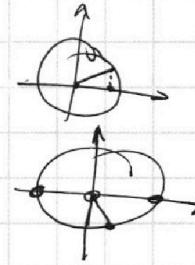
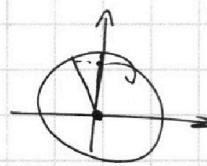
$$100 \sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$

$$100 \cdot (1-x^2) = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \pi - 2x$$

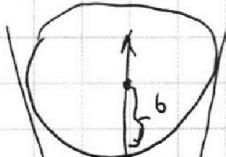
$$5\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi + 12x = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$



$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\begin{cases} y = \frac{4b + ax}{3} = \frac{4}{3}b + \frac{a}{3}x \\ x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$



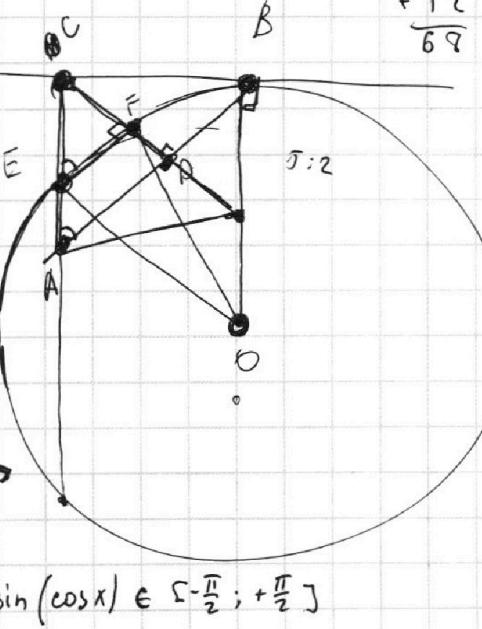
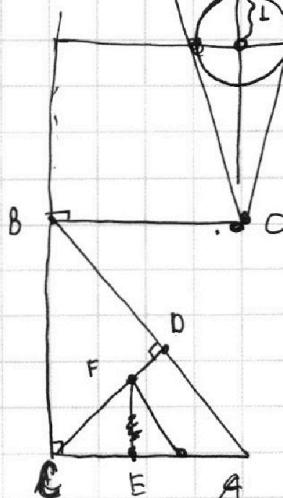
- через расстояние

$$\frac{17}{56} + \frac{39}{12} = \frac{69}{69}$$

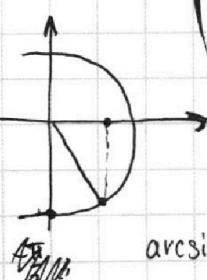
$$\alpha + 2\pi$$

$$\alpha + 4\pi$$

$$\alpha + 6\pi$$



$$x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}} - 3$$



$$\arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$$

100%

100%



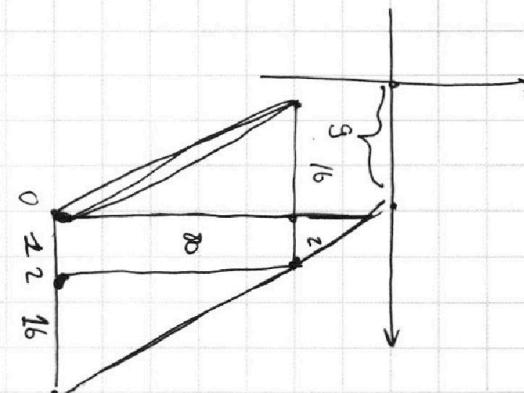
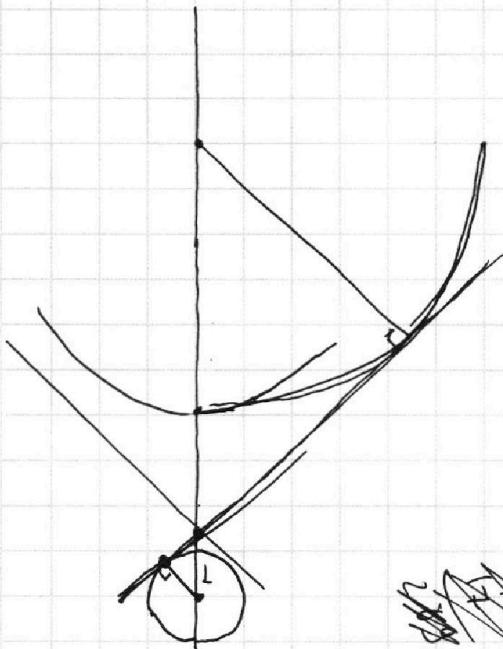
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

∴ 5

$$a^4 - \frac{a}{3} = \frac{4}{3}\pi - 3$$

$$b^4 + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}\pi - 3$$

$$a^4 - 3 = \frac{4}{3}\pi - 3$$

$$3a^5 - 9 - 4 + 9a = 0$$

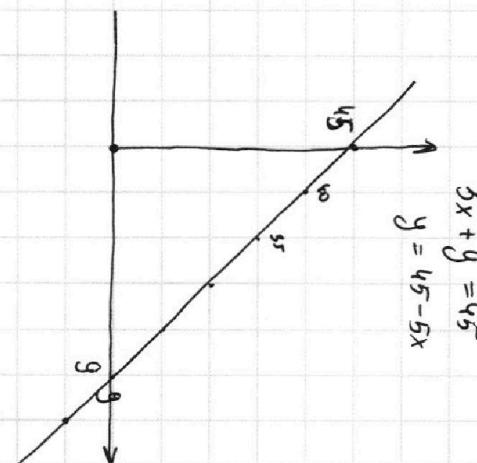
$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^4 - b^4} - \frac{3}{a^4 - b^4} = \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{36}$$

$$a^4 - b^4 - \frac{3}{a^4 - b^4} = \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{36} \approx 0$$

(0; 90)
(2; 80)

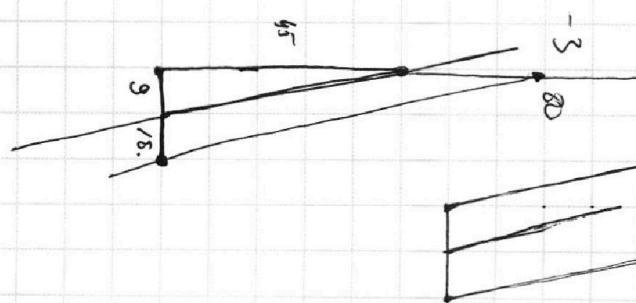
$$\log_a b + \log_a c = \log_a \frac{bc}{\sqrt{5}}$$



$$\begin{aligned} \Delta x + \Delta y &= 45 \\ \Delta y &= 45 - \Delta x \\ \Delta x &= 9 - \frac{\Delta y}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x - \frac{3}{\log_5 2x} &= \frac{4}{3}t - 3 \\ t^4 - \frac{9}{t} &= \frac{4}{3}t - 3 \end{aligned}$$

(15; 0)



$$\begin{aligned} \log_5 y + \frac{4}{3}t - 3 &= -\frac{1}{\log_5 y} \\ \log_5 y &= 3 \log_5 y - 3 \end{aligned}$$

