



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$, $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

a, b, c - натуральные, очевидно, что чтобы минимизировать abc в разложении на простые должны входить только 2, 3, 5, т.к. ~~остальные~~ это единственные простые, на которые должны делиться наши произведения. Удельно разберём 2, 3, 5.

$ab: 2^8$, $bc: 2^{12}$, $ac: 2^{14}$. Рассмотрим произведение $ab \cdot bc \cdot ac$

Оно делится хотя бы на $2^8 \cdot 2^{12} \cdot 2^{14} = a^2 b^2 c^2: 2^{34}$
 $abc: 2^{17}$

$\begin{cases} ab: 3^{14} \\ bc: 3^{20} \\ ac: 3^{21} \end{cases} \rightarrow a^2 b^2 c^2: 3^{14} \cdot 3^{20} \cdot 3^{21} \Rightarrow (abc)^2: 3^{55}$

Т.к. числа a, b, c - натуральные, а 55 на 2 не делится,

3^{28} (хотя бы если бы это было 3^{27} , то $(abc)^2: 54 < 55$ - не верно) \Rightarrow

$abc: 3^{28}$

$\begin{cases} ab: 5^{12} \\ bc: 5^{17} \\ ac: 5^{39} \end{cases} \rightarrow (abc)^2: 5^{12+17+39} \Leftrightarrow (abc)^2: 5^{68} \rightarrow abc: 5^{34}$

Итак, чтобы выполнялось условие задачи должны выполняться

следующие выражения: $\begin{cases} abc: 2^{17} \\ abc: 3^{28} \\ abc: 5^{34} \end{cases} \Rightarrow$ мин значение abc ,
удовлетворяющее этим
условиям - $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

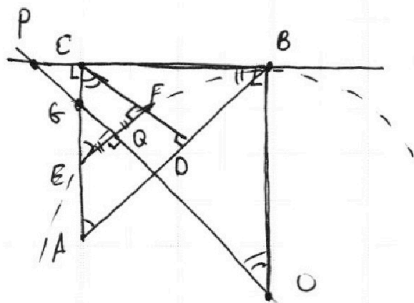
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD \parallel EF \Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle CAD \sim \triangle ABC.$$

Площади относятся как квадрат
коэффициента подобия.

$$S_{ADC} = \frac{5}{5+2} S_{ABC} = \frac{5}{7} S_{ABC}$$

O - центр окружности, проходящей через
B, E, F, и G. пересек. пер-ов.

Проведем сер. пер. для EF - QO.

пусть он пересекает продолжение BC в т. P т.к. $\angle B$ - прямой (касание) \Rightarrow

$$\angle POB = 90^\circ - \angle PPO = 90^\circ - \angle PCV = \angle BEQ \text{ (п.ч. } \triangle \text{ с верт. углами)}$$

$$\Rightarrow \angle CAB + \angle POB = 90^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

По формуле приведения
 $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \pi - 2x$$

$$\arcsin \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow 10 \arcsin(\alpha) \in [-5\pi; 5\pi]$$

$$\arcsin \alpha = \arcsin(\alpha + 2\pi k) = \arcsin(\pi - \alpha), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пусть $\frac{\pi}{2} + x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow$

$$10\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \pi - 2x$$

$$\rightarrow x \in [-\pi; 0]$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x \rightarrow 4\pi = -12x \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \text{ - подходит.}$$

Пусть $\frac{\pi}{2} + x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x - 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$12x = 20\pi k - 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi k$$

$$-3\pi + 6\pi k \leq -\pi + 5\pi k \leq 6\pi k$$

$$-2\pi + 6\pi k \leq 5\pi k \leq \pi + 6\pi k \rightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

Одним $\pi - 2x \in [-5\pi; 5\pi] \Rightarrow$ (условие I)

~~$$-5\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 5\pi$$~~

~~$$-15\pi \leq -\pi + 5\pi k \leq 15\pi \rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2, 3\}$$~~

~~$$k \in \{-2; -1; 0; 1; 2, 3\}$$~~

Пусть $\frac{\pi}{2} + x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k\right] \rightarrow$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = \pi - 2x$$

$$-8x = -4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$$

~~$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

$$-5\pi \leq \pi - 2\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k\right) \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq \frac{2}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi k \leq 4\pi$$

$$-10\pi \leq 2\pi + 10\pi k \leq 12\pi \rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \text{с учетом условия I}$$

$$k \in \{-1; 0; 1\}$$

Пусть $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi] \rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) =$
 $= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k.$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \rightarrow -5\pi \leq \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k\right) \leq 5\pi$$

$$-5\pi \leq \pi - 2\pi + 5\pi k \leq 5\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi k - \pi \leq 5\pi \rightarrow k \in \{0; 1\}$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq 2\pi k + \pi$$

$$4\pi k \leq \pi + 5\pi k \leq 2\pi k + 2\pi$$

$$k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$k \in \{0; 1\}$$

Таким образом, рассмотрим все случаи, получим, что

Ответ:

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k, & k \in \{-1; 0; 1\} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, & n \in \{0; 1\} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

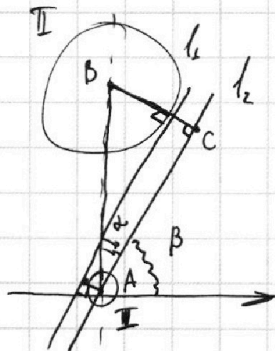
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)



Пусть l_2 - касат. Через центр I проведем $l_3 \parallel l_1$.
Касательная перпендикулярна радиусу в т. касания. - продлим
ее до l_2 в т. C .

$$BC = 6 + 1 = 7$$

$$AB = 10 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{7}{10} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{7}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow m = \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right)\right) \cup \left(\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{7}{10}\right) + \frac{\pi}{2}\right); +\infty\right) \Rightarrow$$

$$a \in \left(-\infty; -3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right)\right) \cup \left(3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{7}{10}\right)\right); +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

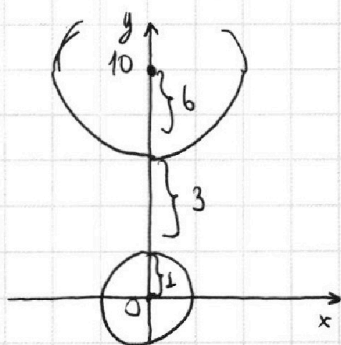
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$$

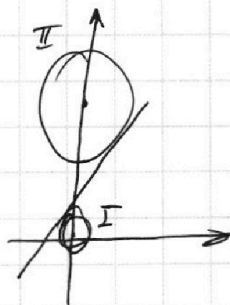
Первое уравнение - некоторая параметрическая прямая, а второе - две окружности. Чтобы ур-е имело 4 корня прямая должна пересекать окружности в двух точках каждой.



$\frac{a}{3}$ - угол наклона прямой, $\frac{4}{3}b$ - сдвиг относительно оси Oy

Если для некоторого $a \exists b$, ур. условия, это значит, что мы можем так подвинуть прямую вдоль Oy , что прямая пересечёт обе окружности. Поймем, когда для любого положения прямой она не будет пересекать 2 окружности. Рассмотрим одну из окружностей.

касательных:



Пусть она задается ур-ем $mx + n$. Если мы будем двигать такую касательную вверх, то она уже не пересечётся с первой окружностью, а если вниз - со второй. Теперь рассмотрим все прямые вида $kx + l$, $k \in [0; m)$. ~~Выберем~~ Подберём l так, чтобы эта прямая касалась окр. т.к. $k < m$, второй окружности она касаться не будет, а значит и не сможет пересечься в 4-х точках (рассуждение аналогично). \Rightarrow такие прямые тоже не подходят

не подходит.

Теперь же рассмотрим прямые $kx + l$, $k \in (m; +\infty)$. Подберём l так, чтобы прямая касалась окр. I. Окр. II она будет пересекать уже в двух точках, т.к. $k > m$. Аналогично найдём l_2 , чтобы прямая касалась окр. II, а окр. I пересекала в 2-х точках. В силу непрерывности на отрезке $[l_1; l_2]$ найдётся l , т.ч. прямая пересечёт окр. I и окр. II в 2-х точках каждой. \Rightarrow такие прямые подходят.

В силу симметрии ~~мы~~ относительно Oy , все значения $\frac{a}{3}$, которые нам подходят, ~~лежат~~ $-\infty; m) \cup (m; +\infty)$ Найдём m :

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (\log_5(2x))^4 - 3 \log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3 \\ (\log_5 y)^4 + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} (5^{-1}) - 3 \end{cases}$$

ОДЗ:
 $2x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$
 \downarrow
 $\log_5 2x \neq 0$
 $y \neq 1; \log_5 y \neq 0$

$$\begin{cases} (\log_5 2x)^4 - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ (\log_5 y)^4 + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \log_5 2x$, $\beta = \log_5 y$

$$\begin{cases} \alpha^4 - \frac{3}{\alpha} = \frac{4}{3\alpha} - 3 & | \cdot 3\alpha \\ \beta^4 + \frac{4}{\beta} = \frac{-1}{3\beta} - 3 & | \cdot 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\alpha^5 - 9 = 4 - 9\alpha \\ 3\beta^5 + 12 = -1 - 9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0 \\ 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0 \end{cases}$$

$$3\alpha^5 + 9\alpha - 13 + 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0 \rightarrow 3\alpha^5 + 3\beta^5 + 9\alpha + 9\beta = 0$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + 3\alpha + 3\beta = 0$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4) + 3(\alpha + \beta) = 0$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3) = 0 \rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \log_5(2x) + \log_5 y &= 0 \\ \log_5(2xy) &= 0 \\ \downarrow \\ 2xy &= 1 \\ xy &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Пусть $f(x) = x^5 + 3x$, хотим найти все пары α, β , что $f(\alpha) = -f(\beta)$ (т.к. $\alpha^5 + 3\alpha = -(\beta^5 + 3\beta)$)

Заметим, что $f'(x) = 5x^4 + 3 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает.

Также заметим, что $f(x) = -f(-x)$ — функция нечетная \Rightarrow

Из этого можно следовать то, что каждое значение ~~принимает~~ ~~равно~~ равно функции принимается равно один раз, а равенство $f(\alpha) = -f(\beta)$ выполняется только при $\alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = -\beta$ — единственный возможный случай, а значит $xy = \frac{1}{2}$ — единств. возможный ответ.

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

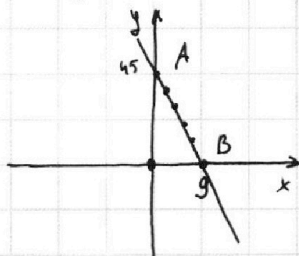
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим наше выражение более подробно:

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45.$$

Пусть $x_1, y_1 = 0$, тогда точки, которые нам подходят - прямая $y_2 = 45 - 5x_2$.



Вот заметить, что для любого целого x_2 значение y_2 тоже целое.

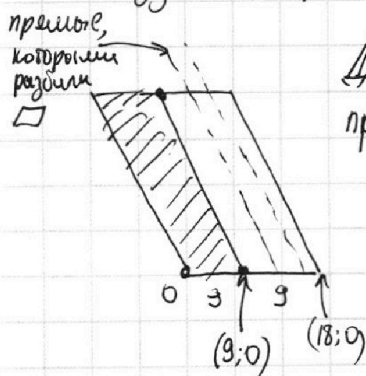
Также заметим, что прямая $R(18; 0) Q(2; 80)$ параллельна "всей" прямой AB ("все прямые" - ~~для каждой~~ ~~эта~~ каждую целую точку можно подставить как начало координат, относительное расстояние между точкой и прямой не

изменится)

Таким образом, давайте разрежем наш параллелограмм прямыми, проходящими через точки с целочисленными координатами (ранее было сказано, что такие прямые всегда проходят через них).

Имеем 19 прямых (т.к. в основании лежит 19 точек с целыми коорд.), на каждой такой прямой внутри параллелограмма - $(80:5)+1=17$ (т.к. при изменении x на 1 y меняется на 5)

Разделим параллелограмм на 2 области



Для каждой точки из закрашенной области (вкл. границы) прямая, на которой находятся подходящие точки $(x_2; y_2)$ ~~она~~ проходит через \square и пересекается с ним в 17 точек. \Rightarrow

Всего точек в закрам. области - $10 \cdot 17$, где каждой в пару найдется еще 17 точек \Rightarrow ~~каждой~~ ~~еще~~ $10 \cdot 17 \cdot 17$ (т.к. мы строим нашу картинку таким образом, чтобы каждую пару считать 1 раз)

Ответ: 2890

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

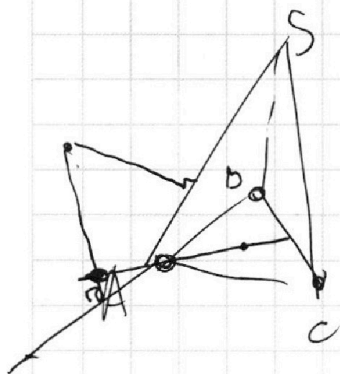
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$x = \alpha^5 + 3\alpha$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3$$

$$f(x) = f(y)$$

$$\begin{cases} 3a^5 - 9 = 4 - 9a \\ b^4 + \frac{4}{8} = \frac{-1}{3b} - 3 \quad | \cdot 3b \end{cases}$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4)$$

$$\begin{cases} 3\alpha^5 - 9 = 4 - 9\alpha \\ 3\beta^5 + 12 = -1 + 9\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^5 + 3\alpha &= -\beta^5 - 3\beta \\ \alpha^5 + 3\alpha &= -(\beta^5 + 3\beta) \quad | : \alpha^2\beta^2 \\ \frac{\alpha^3}{\beta^2} + \frac{3\alpha}{\alpha^2\beta^2} &= -\left(\frac{\beta^3}{\alpha^2} + 3\right) \end{aligned}$$

$$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta^2 - \alpha\beta)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta^2$$

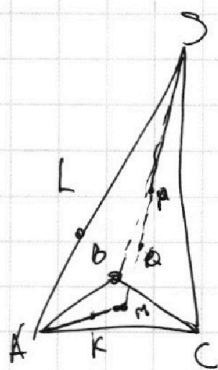
$$\alpha > 0, \beta < 0$$

$$\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3 = 0 \quad | : \beta^4$$

$$\frac{\alpha^4}{\beta^4} - \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{3}{\beta^4}$$

$$\frac{1}{\beta^3} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) + 1 + \frac{3}{\beta^4} = 0$$

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right) + 1 + \frac{3}{\beta^4} = 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\log_5^4(2x) = 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\alpha^4 \beta^4 = \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{4}{3\alpha} + \frac{1}{3\beta}$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc &: 2^{11} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^8 \\ bc &: 2^{12} \\ ac &: 2^{14} \end{aligned} \quad \begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &: 2^{34} \\ abc &: 2^{17} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} c &= 2^9 \\ a &= 2^5 \\ b &= 2^3 \end{aligned}$$

$k = -2 \rightarrow$

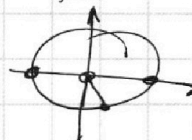
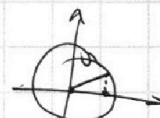
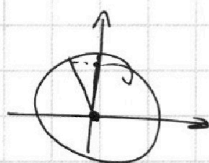
$$100 \cdot (1-x^2) = \pi^2 - 2\pi x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi + 12x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}\pi$$



$$\begin{cases} y = \frac{4b+ax}{3} = \frac{4}{3}b + \frac{a}{3}x \\ x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + (y-10)^2) = 36 \end{cases}$$

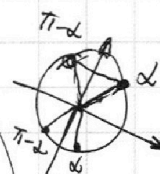
- через расстояния

$$\begin{aligned} &17 \\ &+ 39 \\ \hline &56 \\ &+ 12 \\ \hline &69 \end{aligned}$$

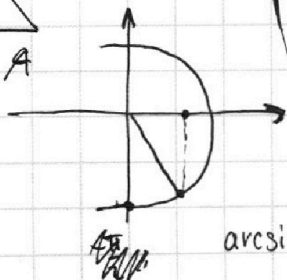
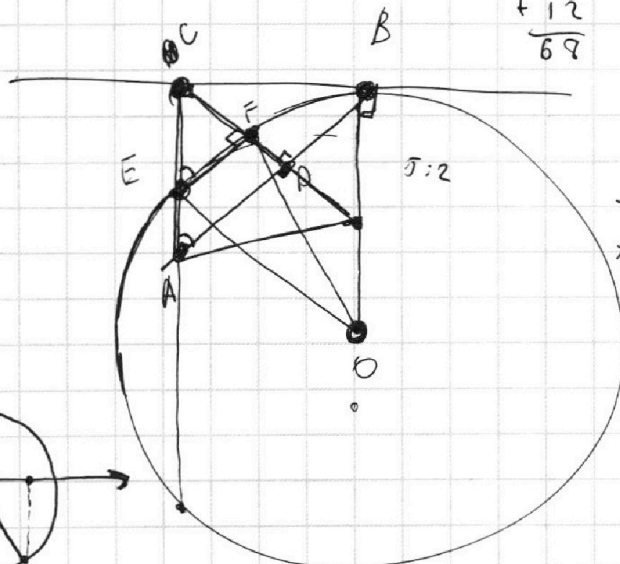
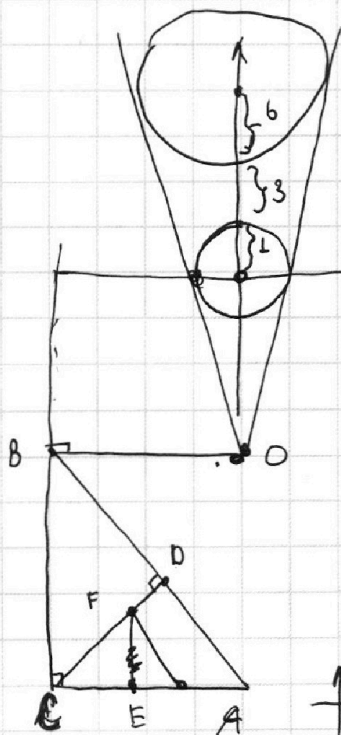
$$\alpha + 2\pi$$

$$\alpha + 4\pi$$

$$\alpha + 6\pi$$



$$x^4 - \frac{3}{x} = \frac{4}{3x} - 3$$



$$\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

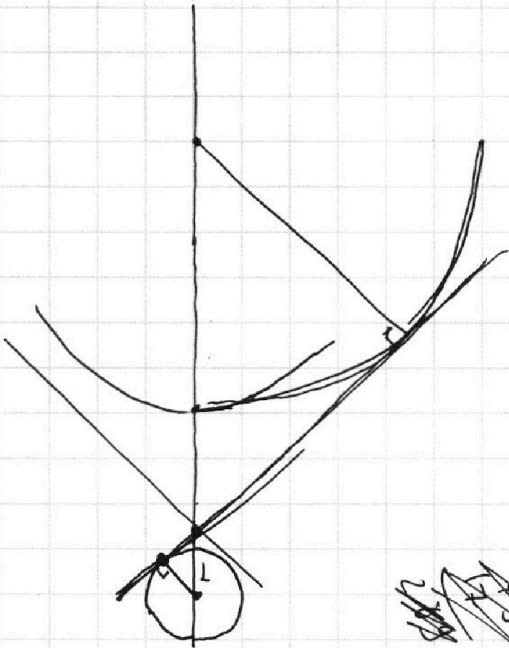
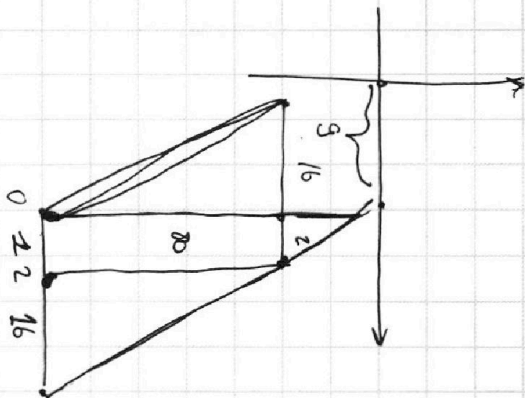
- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

: 5



$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3$$

$$6^4 + \frac{4}{6} = \frac{1}{3}6 - 3$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$

$$3a^5 - 9 - 4 + 9a = 0$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$5\Delta x + \Delta y = 45$$

$$\Delta x = 9 - \frac{\Delta y}{5}$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a \frac{bc}{a}$$

$$a^4 - 6^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{6} = \frac{4}{3}a + \frac{1}{36}$$

$$a^4 - 6^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{6} - \frac{4}{3}a - \frac{1}{36} = 0$$

(0; 90)
(2; 80)

$$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 x} = \frac{4}{3 \log_5 x} - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - 3$$

$$\log_5^4 y + \log_5 y = \frac{4}{3 \log_5 y} - 3$$

