



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab; 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc; 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac; 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

Пусть  $a = 2^e \cdot 3^f \cdot 5^g$ .  $\alpha, \beta, c, d, e, f, g \in \mathbb{N}$

$$b = 2^h \cdot 3^i \cdot 5^j$$

$$c = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$a^2 \geq$$

$$\begin{cases} a+d \geq 7 \\ a+d+g \geq 14 \\ a+g \geq 14 \end{cases}$$

$$2(a+d+g) \geq 34$$

$$a+d+g \geq 17$$

$$a+d+g = 17$$

$$a^3 \geq$$

$$\begin{cases} b+c \geq 11 \\ b+h \geq 15 \\ b+h \geq 17 \end{cases}$$

$$2(b+c+h) \geq 43$$

$$b+c+h \geq \frac{43}{2}$$

$$b+c+h = 22$$

$$a^4 \geq$$

$$\begin{cases} c+f \geq 14 \\ c+k \geq 18 \\ c+k \geq 19 \end{cases}$$

$$2(c+f+k) \geq 75$$

$$c+f+k \geq \frac{75}{2}$$

$$c+f+k = 38$$

Одн.вр:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$



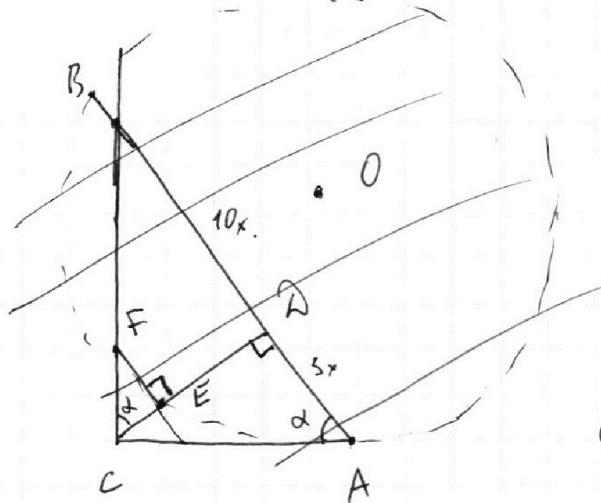
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



FE || AB

FE ⊥ CD.

$\triangle ACD \sim \triangle ADC$ :

$$AC = AD \quad AD =$$

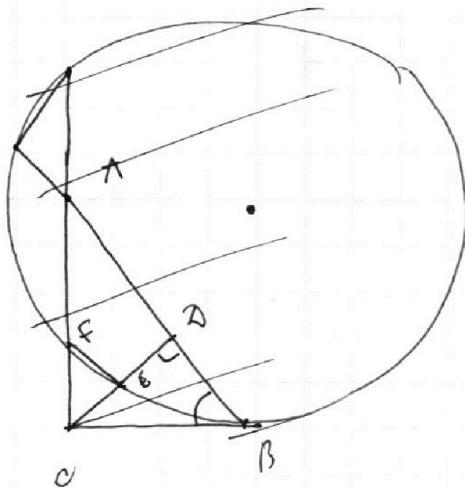
$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \alpha = \\ S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot CE \sin \alpha$$

$$\frac{AC \cdot AD}{CF \cdot CE} = k^2$$

$$(u, \text{u} \frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE})$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{13}{7}$$





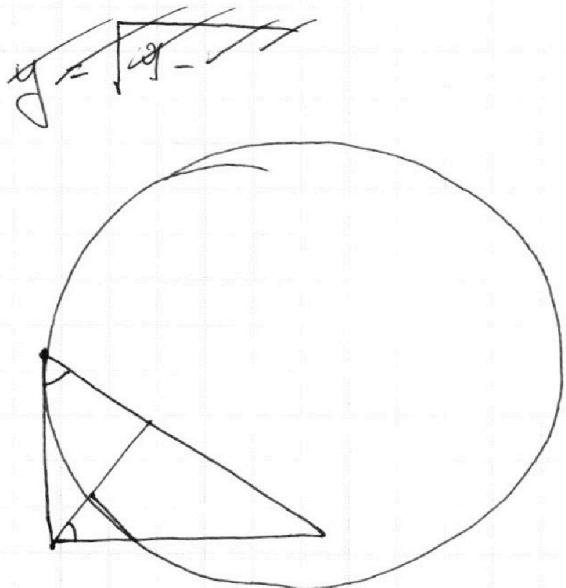
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF$$

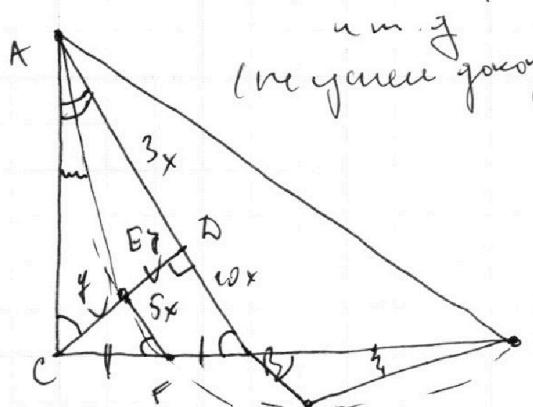
$$\frac{AB}{BA} = \frac{13}{10}$$

следует  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$   
(по 2м умн)

$$CF = FB$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{DC \cdot AD}{CE \cdot EF} =$$

$$= \frac{2y \cdot 3x}{5x \cdot y} = \frac{6}{5} = 1,2.$$



Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

~~for  $\arccos t \leq \pi$~~ .

~~$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$~~

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\frac{3\pi}{2} + x}{5} \leq \pi & (1) \\ -1 \leq \sin x \leq 1 & (2) \end{cases}$$

(2):  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{6x}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi n, 1 \cdot 5$$

$$6x = \pi + 10\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi n}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{5} + \frac{x}{5} + 2\pi k, 1 \cdot 5$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, 1 \cdot \frac{5}{4}$$

$$x = \pi + \frac{10\pi k}{4}$$

(1):

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$k=0: \pi$$

$$k=1: \pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{7\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$k=-1: \pi - \frac{5\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

при  $k > 1$  и  $k < -1$  решений нет.

$$n=0: \frac{\pi}{6}$$

$$n=-1: \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$n=1: \frac{11\pi}{6}$$

при  $n > 1$  и  $n < -1$  решений нет.

$$n=2: \frac{\pi}{6} + \frac{20\pi}{6} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{-21}{5}$$

при этом биссектрисы будут пересекаться  
 макс. 2 раза. (на рис. показано).

$$y = \left(-\frac{1}{3a}\right) x + \frac{7b}{3a}$$

$$\frac{1}{3a} = \frac{21}{5} : a = \frac{5}{63}.$$

Ответ:  $a \in \left(-\frac{5}{63}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{63}\right)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{9} - \left(\frac{x+7}{\sqrt{5}}\right)^2) = u - \left(\frac{x+7}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$9 - \left(\frac{x+7}{\sqrt{5}}\right)^2 = u - \left(\frac{x+7}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$9 = \left(\frac{x+7}{\sqrt{5}}\right)^2 + -2 \cdot \frac{x+7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(x+7)^2 + y^2 = u ; \quad x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = u - (x+7)^2$$

$$y = \sqrt{u - (x+7)^2}$$

$$y' = -2(x+7) \cdot \frac{1}{\sqrt{u - (x+7)^2}}$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\frac{x+7}{\sqrt{u - (x+7)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\frac{(x+7)^2}{u - (x+7)^2} = \frac{x^2}{9 - x^2}, \quad (x+7)^2 \cdot 9 - (x+7)^2 \cdot x^2 = 9x^2 - x^2(x+7)^2$$

$$4x^2 = 9x^2 + 14 \cdot 9x + 49 \cdot 9$$

$$5x^2 + 14 \cdot 9x + 49 \cdot 9 = 0$$

$$\Delta = (14 \cdot 9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 9 = 14^2(9^2 - 4 \cdot 5) =$$

$$= 14^2 \cdot 36 = 46 \cdot 6$$

$$x = \frac{-14 \cdot 9 \pm 14 \cdot 6}{10} \left[ \begin{array}{l} -\frac{14 \cdot 15}{10} = -7 \cdot 3 = -21 \\ -\frac{14 \cdot 3}{10} = -\frac{21}{5} \end{array} \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обратимся к задаче с минимаксом по  $y$  коорд.

$$y_1^2 = 9 - x^2 \quad y_1 = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y_1' = \frac{-2x \cdot 1}{2\sqrt{9-x^2}} \quad y_1' = K$$

$$y_2^2 = u - (x-7)^2$$

$$y_2^2 = u - (x-7)^2$$

$$y_2' = \sqrt{u - (x-7)^2}$$

$$y_2' = -2(x-7) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u - (x-7)^2}}$$

$$y_1' = y_2' \quad \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{x+7}{\sqrt{u-(x+7)^2}}$$

$$\frac{x^2}{9-x^2} = \frac{(x-7)^2}{u-(x+7)^2}; \quad u x^2 - x^2 (x+7)^2 = (9-x^2)(x+7)^2$$
$$u x^2 - x^2 (x^2 + 14x + 49) = (9-x^2)(x^2 + 14x + 49)$$

$$u x^2 - x^4 - 14x^3 - 49x^2 = 9x^2 + 14 \cdot 9x + 49 \cdot 9 \Rightarrow x^4 - 14x^3 - 49x^2$$

$$5x^2 + 14 \cdot 9x + 49 \cdot 9 = 0$$

$$\Delta = (14 \cdot 9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 9 = (14 \cdot 9)^2 - 14^2 \cdot 5 \cdot 9 =$$
$$= 14^2 (9^2 - 5 \cdot 9) = 14^2 \cdot 36 = 14^2 \cdot 6^2$$

$$x = \frac{-14 \cdot 9 \pm 14 \cdot 6}{10} = \begin{cases} \frac{-14 \cdot 15}{10} = -21 \\ \frac{-14 \cdot 3}{10} = -\frac{21}{5} \end{cases}$$

Проверка решения:  
 $y_0 = -21$  и  $y_0^2 = 9$ .

$$x_0 = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$y_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): (x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4) (x^2 + y^2 - 9) = 0.$$

$$((x+7)^2 + y^2 - 4) (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ или } x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ур-е окружность,  
вершина которой

$$x_0 = -7, y_0 = 0.$$

$$\text{радиус } r_1 = 2$$

(1) - предполагаем  
из сей ур-е  
принят.

+  
Ур-е окружность,  
вершина концентрическая

$$x_{02} = 0, y_{02} = 0$$

$$\text{радиус } r_2 = 2.$$

Ищема числа решений  
недля, когда, приняв (1)  
пересекают конкурую окр.  
в 2х точках.

$$a=0:$$

$$x = 7b.$$

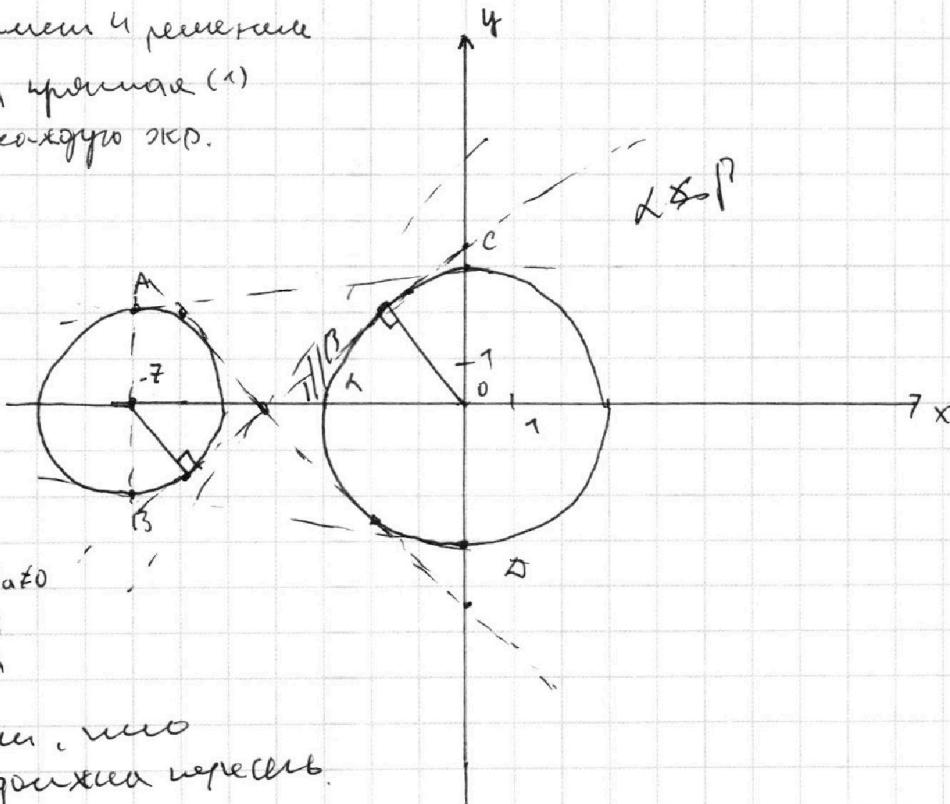
1 верн. прямая  
макс. 2 реш.  
 $\Rightarrow$

$$a \neq 0:$$

$$3ay = -x + 7b \mid : 3a \neq 0$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

Мы можем, что  
прямая должна пересечь  
окружность в двух точках



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(6xy) = 0 \text{ или } A = 0$$

$$\begin{aligned} 6xy &= 1 \\ xy &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Тогда  $\log_7 6x = a$   
 $\log_7 y = b$ .

$$4 + a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 0$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -4.$$

$$(a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) - ab(a^2 + b^2) = ab$$

$$(a+b)(a^2(a-b) + b^2(a-b)) - ab(a^2 + b^2 - ab) = -4.$$

$$(a+b)(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2 - ab) = -4.$$

$$(a+b)(a-b)(a^2 + b^2) - ab \frac{a^2 + b^2}{a+b} = -4 \quad |(a-b)$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2(a-b)(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 4(a+b) = 0$$

Ответ:  $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4. \quad (1)$$

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7(y) + 6 \log_y 7 = \log_7(7^5) - 4 \quad (2).$$

$$6x = t.$$

(1):

$$\log_7^4 t - 2 \log_7 t = \frac{3}{2} \log_7 7 - 4. \quad = \log_7^4(7^5) - 4.$$

$$\log_7^4 t - \frac{7}{2} \log_7 t + 4 = 0$$

$$\log_7^4(y) + 6 \log_y 7 =$$

$$\log_7^4 t - \frac{7}{2} \log_7 t + 4 = 0 \quad | \cdot 2 \log_7 t \neq 0.$$

$$- \frac{5}{2} \log_7 t - 4.$$

$$2 \log_7^5 t + 8 \log_7 t - 7 = 0 \quad (3)$$

$$\log_7^4(y) + \frac{7}{2} \log_7 7 + 4 = 0$$

$$2 \log_7 6x + 8 \log_7 6x - 7 = 0.$$

$$\log_7^4(y) + \frac{7}{2} \log_7 7 + 4 = 0 \quad (\log_7 7)^2$$

$$2 \log_7^5(y) + 8 \log_7 y + 7 = 0. \quad (4)$$

(3) + (4):

$$2 \log_7 6x + 8 \log_7 6x + 2 \log_7^5(y) + 8 \log_7 y = 0 \quad | : 2.$$

$$4(\log_7 6x + \log_7 y) + \log_7^5 6x + \log_7^5 y = 0.$$

$$4 \cdot \log_7(6xy) + \log_7^5 6x + \log_7^5 y = 0$$

$$4 \log_7(6xy) + (\log_7 6x + \log_7 y)(\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \cdot \log_7^2 y + \log_7^2 6x \cdot \log_7^2 y - \log_7^3 6x \cdot \log_7^2 y + \log_7^2 6x \cdot \log_7^2 y) = 0$$

A (сам метод)

$$\log_7(6xy) (4 + \log_7^5 6x - \log_7^3 6x \cdot \log_7^2 y + \log_7^2 6x \cdot \log_7^2 y - \log_7^3 6x \cdot \log_7^2 y + \log_7^2 6x \cdot \log_7^2 y + \log_7^2 y)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$b \geq 0, \quad b \leq 40. \quad b = |y_1 - y_2|$$

$$a > 0 \quad a \leq 10 \quad a = |x_1 - x_2|$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

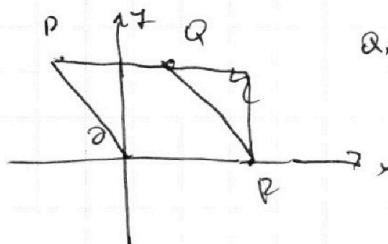
- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$P(-17, 68), Q(2, 68), R(19, 0) \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}.$$

A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>)



$$\alpha = PR = \sqrt{(-17-19)^2 + 68^2} = \sqrt{36^2 + 68^2} = \\ = \sqrt{4^2 \cdot 9^2 + 4^2 \cdot 17^2} = 4\sqrt{9^2 + 17^2} = \\ = 4\sqrt{81 + 289} = 4\sqrt{370} < \\ < 4 \cdot 20 = 80$$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq \alpha^2$$

$$a \geq 0 \quad b \geq 0.$$

$$\begin{cases} a + b = 40, \\ a^2 + b^2 \leq 80^2 \end{cases}$$

$$b = 40 - a$$

$$a^2 + (40 - a)^2 \leq 80^2$$

$$a^2 + 16a^2 + 1600 - 80a + 40^2 - 80^2 \leq 0$$

$$17a^2 + 320a + (40 - 80)(40 + 80) \leq 0$$

$$17a^2 + 320a - 40 \cdot 120 \leq 0$$

$$\Delta = 320^2 + 4 \cdot 17 \cdot 4800 = 10^2 \cdot 2^2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 10^2 = \\ = 10^2 (16^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3) = 10^2 (1024 + 3264) =$$

$$= 10^2 \cdot 14288,$$

$$a = \frac{-320 \pm \sqrt{4288}}{34}$$

$$a \leq \frac{-320 + 10 \cdot 66}{34} = \\ = \frac{340}{34} = 10$$



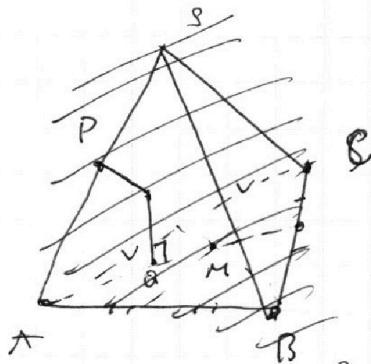
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



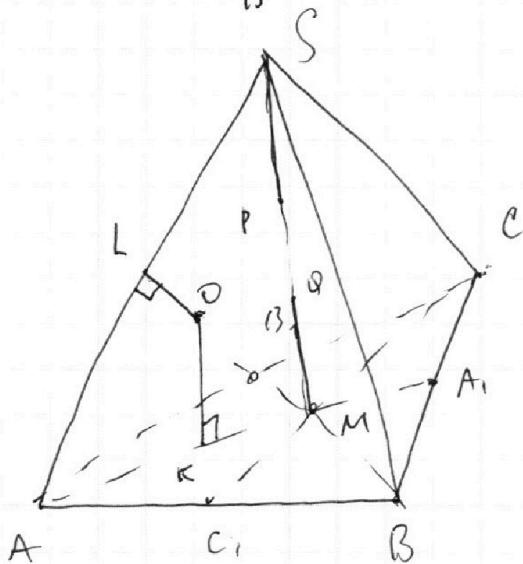
$$SA = BC = 10$$

$$S_{\text{параллелограмма}} = 60, SL = MR.$$

Теорема касания лежит  
на АМ

Утверждение из училища

$$LO = OK$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

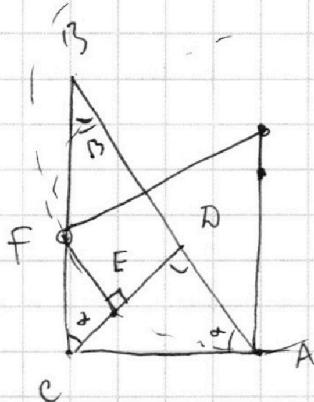
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК



ΔA<sup>11</sup>E<sup>F</sup>.

$$\frac{AB}{BF} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{13}{10}$$

ΔACD ~ ΔCEF.

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} ?$$

$$\begin{aligned} a^2 - a^2 e^2 + a^2 b^2 &= -4, \\ a^2 e^2 + (a^2 + b^2)(a^2 - a^2 e^2 + a^2 b^2 - b^2) &= 0, \end{aligned}$$

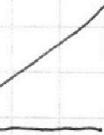
$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq \pi$$

$$\sin x = \cos \frac{3\pi}{20} + \frac{x}{5}.$$



$$5\pi - \frac{3\pi}{2}$$

$$\approx 10\pi - \frac{3\pi}{2}$$

$$\approx \frac{7\pi}{2}$$

a, b, c.

$$aB : 2^{11} 3^{14} 5$$

$$bC : 2^{13} 3^{15} 5^{12}$$

$$aC : 2^{14} 3^{17} 5^{13}$$

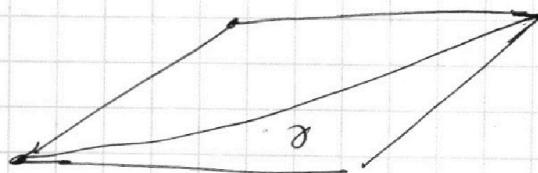
aBC

$$n_3 g + g n = 2n$$

$$2g - g^2 = 0$$

$$m = g + n$$

$$\begin{aligned} &2g - g^2 = 0 \\ &2g = g^2 \\ &2 = g \\ &n = 2g = 2^2 = 4 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

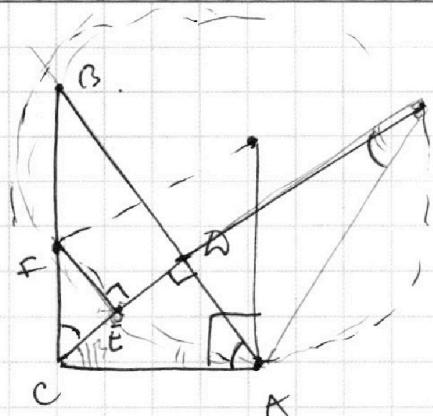
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$ .

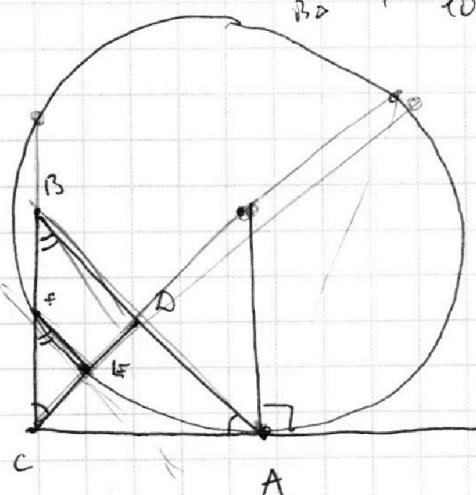
$$\frac{AB}{BD} = 1.3 = \frac{13}{10}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} CE \cdot CF \sin \alpha} =$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$AC^2 = \frac{13}{10} BD^2; AC = \frac{13}{10} BD.$$

$$\frac{AB}{BD} = 1.3 = \frac{13}{10}$$



$$\frac{FC}{CE} = \frac{CB}{CA}$$

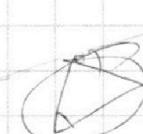
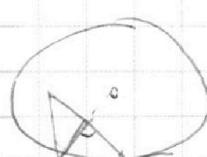
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}; AC^2 = AB \cdot AD.$$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 - ab + ab^2 - ab^3) \\ a^4 + b^4 &> 0 \quad a^2b^2 > 0 \\ a^4 - a^2b^2 + a^2b^2 - ab^3 &= ab(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

(нр 8).

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD \cdot AC}{CE \cdot CF} = \frac{AD}{CE}$$

$$\begin{aligned} \frac{AD}{CE} &= \frac{\frac{13}{10} BD}{CE} \\ \frac{AD \cdot AC}{CE \cdot CF} &= \frac{\frac{13}{10} BD \cdot AC}{CE \cdot CF} \\ AD \cdot AC &= \frac{13}{10} BD \cdot CE \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &- ab(a^2 + b^2) \\ a^4 + b^4 &> 2a^2b^2 \\ a^4 + b^4 &> 2a^2b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{EF}{DB} &= \frac{FC}{CB} \\ EF &= \frac{FC}{CB} \cdot DB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &- ab(a^2 + b^2) \\ ab(a^2 + b^2) &< a^4 + b^4 \\ ab &< a^2 + b^2 \\ ab &< a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{EF}{DB} &= \frac{FC}{CB} \\ EF &= \frac{FC}{CB} \cdot DB \\ 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ a^2 + b^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 7 \\ \hline 2407 \end{array}$$

$$\log_7 y + 6 \log_7 7 = \log_7 (7^6) - 4$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 7 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(t) - 2 \log_t \frac{1}{2} = \log_t t^2$$

$$\frac{g}{g} \frac{g}{g} \frac{g}{g}$$

$$\log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = 3 \log_{(6x)^2} 7 - 4$$

$$\frac{f_2}{t^2}$$

$$\log_7(y) + 6 \log_7 7 = 5 \log_7 7 - 4.$$

$$\log_7(y) + 6 \log_7 z = \frac{5}{2} \log_7 z - 4$$

$$\log_7(u(y)) + \frac{7}{2} \log_7 z + u = 0$$

$$2 \log_7 4(y) + 7 \log_7 z + 8 = 0$$

$$2 \log_2 y + 8 \log_2 y + 7 = 0$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0.$$

$$\alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^2\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4) =$$

$$= a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + a^2 b^4 + a^4 b - a^3 b^3$$

$$+ a^2 e^3$$

5

h · t^r g

he a g

$$\sqrt{n^2} = n$$

298

$$x_1 = h \quad x_2 = h \quad x_3 = h$$

$$\begin{array}{r} \text{ot} \\ \swarrow \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

A hand-drawn diagram on graph paper showing two circles intersecting at two points on a straight line.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕНОВИК

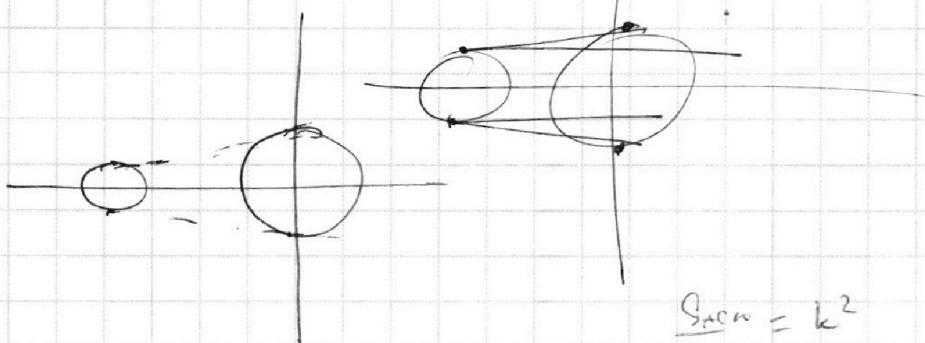
$$\frac{21}{5}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 76 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 4y)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 9 \\ & x^2 + 14x + y^2 + 4y = 0 \\ & (x+7)^2 + (y+2)^2 = 64 \end{aligned}$$

$$(x^2 + 14x + 49 + y^2 + 4y) (x^2 + y^2 - 9) = 0.$$

$$2^k \leq l + \beta^2$$



$$AB : 2^{11} 3^{14}$$

~~$$B : 2^{13} 3^{17} 5^{18}$$~~

$$BC : 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$AC : 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

$$AB =$$

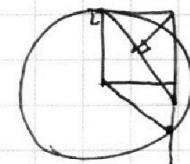
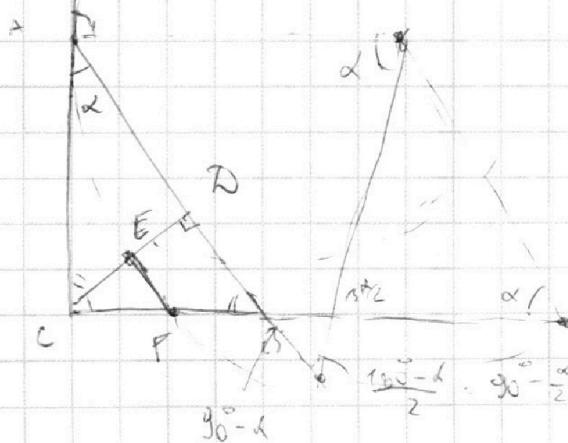
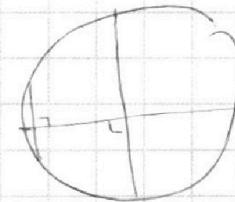
~~$$ABC : 2^{34}$$~~

$$\frac{S_{\text{окн}}}{S_{\text{ст}}}=k^2$$

$$a = \sqrt{S_{\text{ст}}}$$

$$\frac{BE}{EF} \left( \frac{CD}{EF} \right)^2 = \left( \frac{AC}{CF} \right)^2 + \sqrt{\frac{13}{16}}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{13}{16}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!