



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, & \delta = \frac{7b-x}{3a} \text{ ; } \frac{7b-x}{3a} - \frac{x}{3a} \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ (\lambda^2 + 7)^2 + \delta^2 - 4 \quad (\lambda^2 + \delta^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24} \quad (1)$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad (2)$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \quad (3)$$

(1) · (2); (2) · (3); (3) · (1):

$$abc \cdot b : 2^{20} \cdot 3^{28} \cdot 5^{32}$$

$$abc \cdot c : 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61} \quad (X)$$

$$abc \cdot a : 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}$$

$$(abc)^4 : 2^{68} \cdot 3^{86} \cdot 5^{150}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{21,5} \cdot 5^{37,5}$$

т.к. abc - натуральное, то

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{но } abac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

пример:

$$a = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$\text{ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

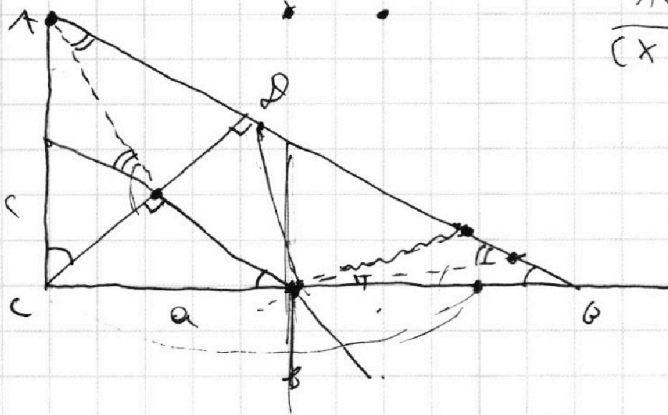
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CX} = \frac{\sqrt{10}a}{\sqrt{10}a}$$

$$\frac{(10n^2 + a^2)}{10n^2 + b^2} = \frac{10n^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot 10n^2}$$

$$10n^2 \cdot a^2 + a^4 = 100n^4 + 10nb^2$$

$$(10n^2 + b^2)b^2 = 100n^4 + 10nb^2$$

$$a^4 + 10n^2 \cdot a^2 + 10n^2 a^2 =$$

$$\frac{3^2 + 10^2}{10 + 100}$$

$$\frac{10n + a}{10n + b} = \frac{10n}{b} =$$

$$10bn + ab = 10n^2 + 10nb$$

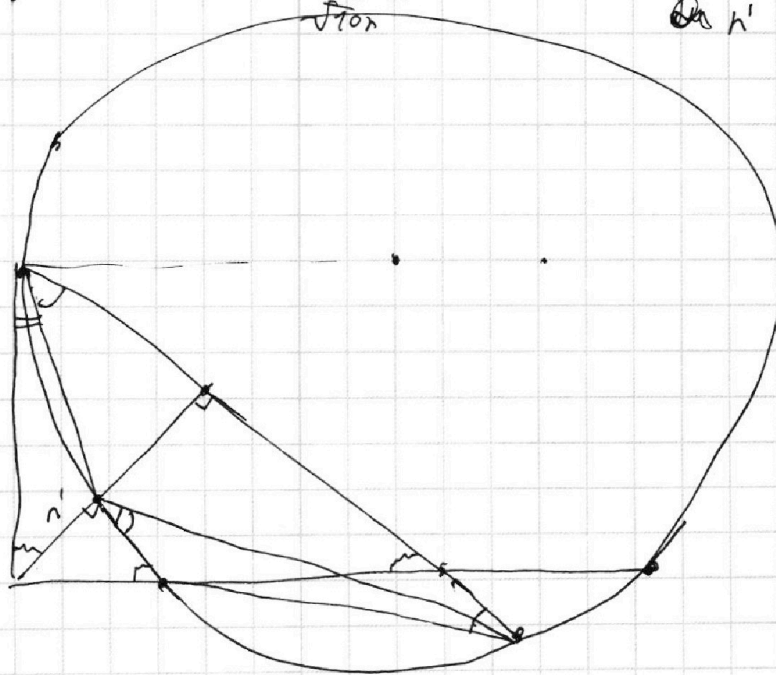
$$0b = 10n^2$$

$$\frac{c}{\sqrt{10}n} = \frac{a}{\sqrt{10}n}$$

$$\frac{\sqrt{30}n}{\sqrt{10}n} = \frac{\sqrt{130}n}{\sqrt{10}n} = \frac{13n}{a}$$

$$\frac{27}{a3}$$

$$\frac{76}{3a}$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \\ + 576 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 576 \\ 25 \\ \hline 2880 \\ 1752 \\ \hline 14400 \\ - 48 \end{array}$$

$$\frac{10n}{\sqrt{10}n} = \frac{\sqrt{130}n}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = k^2 = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \frac{3x^2 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{13})^2}{380 \cdot x^2}$$

$$= \frac{3(10 + 13 + 2\sqrt{130})}{130} = \frac{69}{130} + \frac{6\sqrt{130}}{130}$$

расп. точек.
в остальных случаях раздм-
рается аналогично

ответ. $\frac{69}{130} + \frac{6\sqrt{130}}{130}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \frac{AO}{OB} = \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{3}{10}, \text{ пусть } AO = 3x, \text{ тогда } OB = 10x$$

$$6) \triangle AOC - \text{прямоугольный, } \angle C - \text{острое} \\ \text{тогда } \Rightarrow OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{30}x$$

$$7) \triangle AOC: \angle COA = 90^\circ, \text{ значит} \\ AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = \sqrt{39}x$$

$$8) \triangle COB: \angle COB = 90^\circ, \text{ значит} \\ BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{30 + 100}x = \sqrt{130}x$$

$$9) \frac{EC}{OB} = \frac{AC}{AO} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{10}}, \text{ и}$$

$$EC = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot OB, \quad OB = \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot EC$$

$$10) KF = BC - FB = \sqrt{130}x - \frac{\sqrt{10}}{3} EC$$

$$11) \triangle FEC \sim \triangle OBC \quad (EF \parallel AO): \text{ значит}$$

$$\frac{FC}{EC} = \frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{30}x}{\sqrt{130}x} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$FC \cdot \sqrt{3} = EC \cdot \sqrt{13}$$

$$\sqrt{390}x - \sqrt{10}EC = \sqrt{13}EC$$

$$EC = \frac{\sqrt{390}x}{\sqrt{10} + \sqrt{13}}$$

$$12) \triangle AOC \text{ и } \triangle CFE: \angle E = \angle O = 90^\circ; \angle A = \angle FCE \\ \text{значит } \triangle AOC \sim \triangle CFE \text{ (по 2 углам)}$$

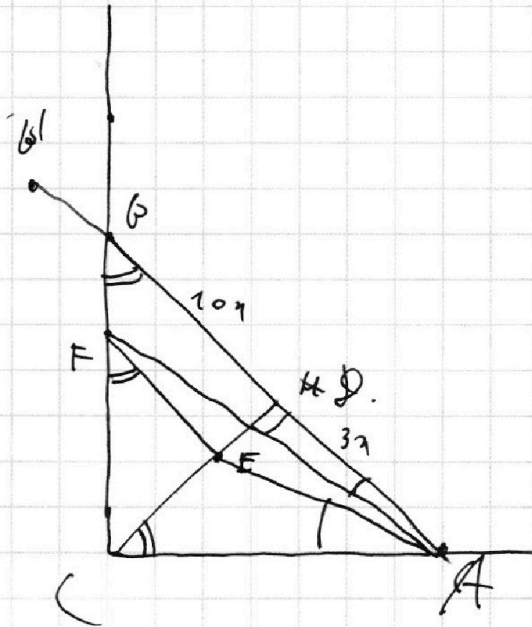
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



решение:

- 1) пусть $AB \cap BC = B'$, тогда $B'AEF$ — вписанная трапеция, тогда она $PIB \Rightarrow \angle AB'E = \angle B'AF$ (вписанная трапеция)
- 2) BC : BC касательная к AB , $\angle AB'E$ отражается по AB в $BC \Rightarrow \angle AB'E = \angle CAE = \angle B'AF = \alpha$.
- 3) пусть $\angle CBA = \beta$, тогда $\angle ECA = \beta$ тоже.
- 4) $\triangle AEC$ и $\triangle AFB$: $\angle CAF = \angle EAC = \alpha$, $\angle C = \angle ECA = \beta$
 $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB$ (по двум углам) $\frac{EC}{FB} = \frac{AC}{AB}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos \sin x = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$I \arccos \sin x \in [0; \pi]$$

$$5 \arccos \sin x \in [0; 5\pi]$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$I \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x, \text{ если } \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi = 6x$$

$x = \frac{5\pi}{6}$ - не подходит

$$II \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi; \text{ если } \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \leq \pi$$

$$II \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$III \arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\frac{25\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$6x = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ - не подходит при } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$IV \arccos \sin x = x + \frac{3\pi}{2} \text{ при } x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$V \arccos \sin x = x - \frac{5\pi}{2} \text{ при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

$$VI \arccos \sin x = -\frac{3\pi}{2} - x \text{ при } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0 - \frac{\pi}{2}\right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\text{II} \quad 5x - \frac{5\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = 8\sqrt{c}$$

$$\underline{x = \sqrt{c}} \quad \in [0; \sqrt{c}]$$

$$\text{IV} : 5x + \frac{15\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = -\frac{12\sqrt{c}}{2} < ; x < 0 \Rightarrow x \notin \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}; \frac{7\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$\text{V} \quad 5x - \frac{25\sqrt{c}}{2} = \frac{3\sqrt{c}}{2} + x$$

$$4x = 26\sqrt{c}$$

$$x = \frac{13\sqrt{c}}{2} \quad \notin \left[-\frac{\sqrt{c}}{2}; 0\right]$$

$$\text{VI} \quad 6x = -\frac{15\sqrt{c}}{2} - \frac{3\sqrt{c}}{2}$$

$$6x = -\frac{18\sqrt{c}}{2}$$

$$6x = -9\sqrt{c}$$

$$\underline{x = -\frac{3\sqrt{c}}{2}} \quad \in \left[-\frac{3\sqrt{c}}{2}; -\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\sqrt{c}}{2}; \sqrt{c}; \frac{\sqrt{c}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

разными способами не и научное.
пометке, что если $\sqrt{24}$ ^и $\sqrt{24}$
и научное, то семейство пара-
метров ей, ни одно не будет
иметь и т.п. с $\sqrt{24}$ значение
а равно было можно, что $\sqrt{24}$
в 1 и 3 научное (оно касат)
каждый ^{или касат} $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$
касательный. из теории $\sqrt{24}$
где $\sqrt{24}$ пересечение $\sqrt{24}$ касат.
($\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ по $\sqrt{24}$ координата
а) тогда $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ из
координатной неравенство $\sqrt{24}$
пересекается с $\sqrt{24}$ оно $\sqrt{24}$
через $\sqrt{24}$. $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$
в $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$. $\sqrt{24} = \sqrt{24}$
сн $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{24}$
 $\sqrt{24} = \sqrt{24} = \frac{48}{25 \cdot 24} = 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

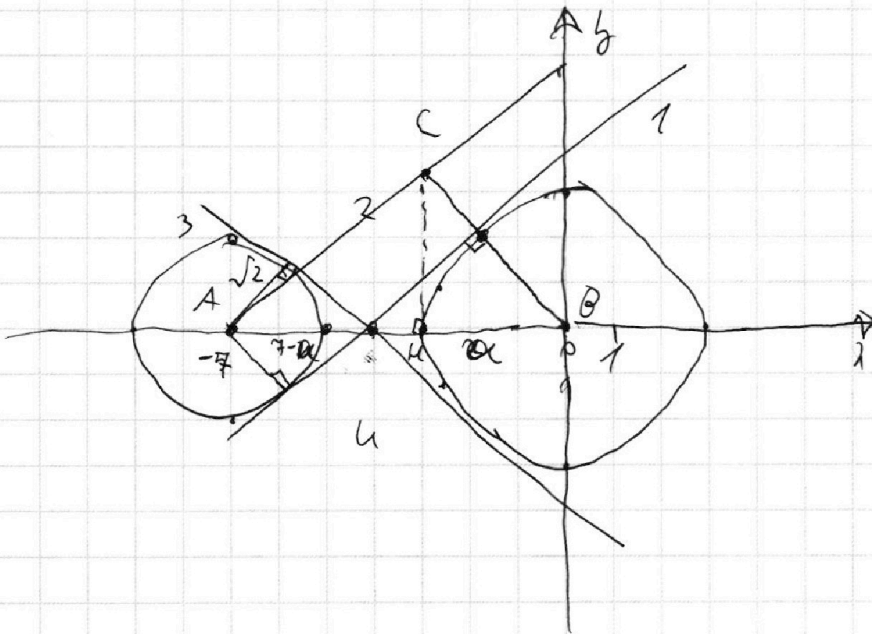
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

решение второй системы - 2 окр
с центром в $(-7; 0)$ и радиусом 2 и с центром в
 $(0; 0)$ и радиусом 3.



$= 0$
 $x + 3ay - 7b = 0$ - касательная,
 $x = 7b - 3ay$; $7b - 3ay = R \cdot F(x)$
~~найдем, когда такая прямая имеет~~
~~и m пересек с окр:~~ если только
проведем 2 общие ^{вм} касательные, они

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нч.

$$\cos \angle P \neq A = \cos \angle P < A = \frac{5}{\sqrt{24}} = k, \text{ где } k - \text{гран}$$

меньше этой прямой, поэтому
укажем наклонные угловые координаты
прямых $\frac{5}{\sqrt{24}}$ и $(-\frac{5}{\sqrt{24}})$ в одну симметричную

~~меридиан~~ ~~наклон~~ $y = \frac{76-x}{3a} = \frac{76}{3a} - \frac{x}{3a}$

$$\text{н. л. } \begin{cases} -\frac{1}{3a} \leq \frac{5}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{3a} \geq \frac{-5}{\sqrt{24}} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{a} \geq \frac{-75}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{45}{\sqrt{24}} \end{cases} \begin{cases} a \leq \frac{\sqrt{24}}{15} \\ a \geq \frac{\sqrt{24}}{-15} \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

~~Ответ при $a \in (\frac{\sqrt{24}}{-15}; \frac{\sqrt{24}}{15})$.~~

Ответ: при $a \in (\frac{\sqrt{24}}{-15}; 0) \cup (0; \frac{\sqrt{24}}{15})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) = \frac{3}{2} \log_7^4 x + 2 \log_7^4 x - 4 \\ \log_7^4(y) = \frac{5}{2} \log_7^4 x - 6 \log_7^4 x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2} \log_7^4 x - 4 = \log_7^4(6x) & (1) \\ -\frac{7}{2} \log_7^4 x - 4 = \log_7^4(y) \end{cases}$$

$$\frac{7}{2} (\log_7^4 x + \log_7^4 x) = 0$$
$$\log_7^4 6x + \log_7^4 y = 0$$

$$\frac{\log_7^4 y + \log_7^4 6x}{\log_7^4 6x \cdot \log_7^4 y} = 0$$

$$\log_7^4(y \cdot 6x) = 0$$

$$6xy = 7^0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\text{ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и прямые g параллельные прямые
и вертикаль h имеют равные
и тогда все прямые A имеют
на левой стороне h , все B на
правой и для A и B - любые
из пары из точек эти прямые
(целые координаты) (все A слева, т.к.
мы их вычитали, а B справа).

всегда ≥ 0 т.к. они внутри парам
и так, т.к. все медленные
прямые имеют h $h = 4$, то

на прямой Ox они проходят
через все точки $\frac{p}{4}$; где $p \in [0; 18 \cdot 4]$

и p - целое (это очевидно из того
что $y_x = k + 4n_x$, где k - целое)

теперь выберем 2 прямые из
того семейства.

$$\begin{cases} y = -4x + a = f(x) \\ y = -4x + b = g(x) \end{cases}$$

$g(0) - f(0) = b - a$, - искомого
разности вертикаль
линей.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что нам кардинально
уменьшится время с помощью.

ОК и ОР с уравнениями $y=x$ и $xy=-4x$
соответственно:

пусть y нас интересует

$$x_1 \text{ и } y_1, \text{ тогда } -(4x_1 + y_1) = k \text{ с } 0 \leq k \leq c.$$

$$4x_2 + y_2 = 40 - c.$$

$$y_2 = 40 - c - 4x_2 \text{ т. е. при } k \text{ заданном } c.$$

~~Итак как во время работы
мы через координаты внутри паралле-
лограммы это время пройдет
так-то где x_1, y_1 . то есть где
каждой паре x_1, y_1 точки с целыми
координатами x_1, y_1 все нужное
в момент на 1-ей прямой, параллель-
ной стороне, и где k тем выше.
тогда задача сводится к водо-
ру 2 прямой из всевозможных~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все наши кривые в точке 0 имеют
целое значение от 0 до $440 \cdot 18 \cdot 4$.

(т.к. уравнение прямой имеет $y = -4x + 18 \cdot 4$)

Итак, перейдем теперь кал-во

целых точек кривой $y = -4x + k$

внутри параллелограмма в зависимости
места от k , заметим, что при

единичном остатке при делении
на 4 $y = k$ это значение единично.

1) $k = 0$ - 17 точек ($\frac{68}{4}$)

2) $k = 1$ - 16 точек.

3) $k = 2$ - 16 точек.

4) $k = 3$ - 16 точек

Итак, кал-во возможных пар (x, y)

(разность в 40) - 37.

прислуживая со свободными членами

кратным 4 - 10 на каждой из них по

$44 \cdot 17$ нулевых точек, но оставшаяся по 16

\Rightarrow всего $17 \cdot 17 \cdot 10 + 16 \cdot 16 \cdot 27 = 7026 + 6812 + 2380 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

= 9302

ответ: 9302.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \theta \theta_1 &= \frac{\sqrt{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 88 - 4 \cdot 16 \cdot 10}}{4} = \frac{\sqrt{200 + 704 - 160}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{744}}{4} = \frac{\sqrt{186}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\sqrt{2 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 \cdot 2 - 4 \cdot 88}}{4} = \frac{\sqrt{550 + 80 - 88}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{42}}{2} \end{aligned}$$

иное.

$$\begin{aligned} A A_1 \cdot \theta \theta_1 \cdot \cos \varphi &= 15 \cdot \frac{\sqrt{42 \cdot 186}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \cdot \sqrt{21 \cdot 83}}{2} = \\ &= \frac{45 \cdot \sqrt{17 \cdot 31}}{2} = \frac{45}{2} \sqrt{217} \end{aligned}$$

ответ: $\frac{45}{2} \sqrt{217}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

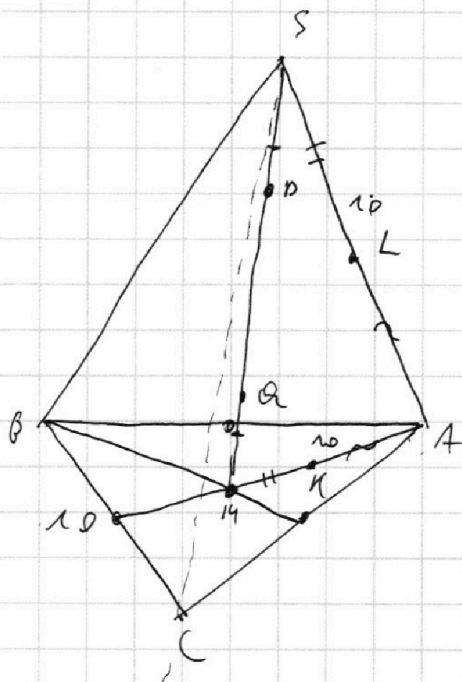
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6.



Решение: 1) Пусть W - ^{плоскость} сечение (SAM)

~~плоскость~~ W - ~~шара~~ сферы Ω , тогда
 W - z а касание Ω с SA в L и AM в K ,
 W кас SA в L и W кас AM в K .

2) $\triangle S.MA$: $\text{leg}(S; W) = SP \cdot SQ = SL^2$, т.к

$SL = r$ W кас AS в L ,

$\text{leg}(M; W) = MQ \cdot MP = MK^2$ т.к W кас
 AM в K , тогда в силу равенства

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SP = SQ, MP \cdot MQ = SP \cdot SQ \Rightarrow SL = MK.$$

3) в кос AS и AM в точках K и L . \Rightarrow

$$AL = SK, AL = AK \text{ (как кас из } AKW)$$

$$4) AL = AK, SL = MK \Rightarrow AM = AS = 10.$$

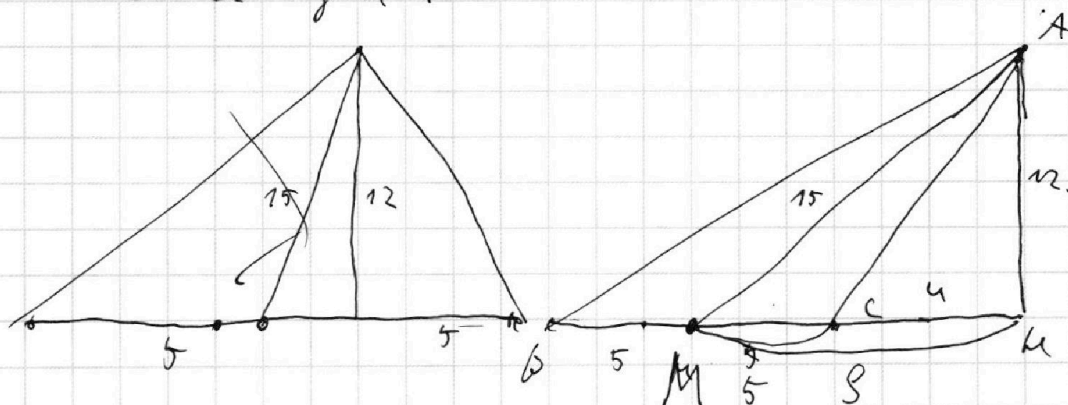
5) $\triangle ABC$: M - центр окружности ABC , $AM = 10 \Rightarrow$

$$AA_1 = 15, \text{ где } AA_1 \text{ - медиана } ABC.$$

6) $\triangle ABC$: $BC = 10$; $S_{ABC} = 60 \Rightarrow BK = 12$, где

BK - высота из B

7)



$$\triangle AMK \text{ - прямоугольный } \Rightarrow MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = 9, \text{ тогда}$$

$$SK = 9 - 5 = 4.$$

$$\triangle AKC \text{ - прямоугольный: } AC^2 = 12^2 + 4^2 = 4^2(1 + 9) = (4\sqrt{10})^2$$

$$AC = 4\sqrt{10}$$

$$\triangle ABK \text{ - прямоугольный: } AB^2 = 12^2 + 14^2 = 2^2(6^2 + 7^2) = (2\sqrt{85})^2.$$

тогда по формуле $\frac{\sqrt{2a^2b^2 - c^2}}{c}$ найдем $\cos \alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = kx \quad -17; 68$$

$$y = -\frac{1}{4}x$$

$$y = -4x$$

$$4x_2 + y_2 = 40 + k$$

$$\begin{array}{r} 100 + \dots - 520 \\ 200 + 320 \end{array} \begin{array}{l} 178 \\ 178 \end{array}$$

$$(2, 68)$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 24 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$y_2 = 40 + k - 4x_2$$

$$2(25 + 88 - 20)$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 4 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 204 \\ - 186 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times 3 \\ \hline 246 \end{array}$$

$$204$$

$$-11$$

$$\begin{array}{r} 186 \\ \times 2 \\ \hline 372 \end{array}$$

$$(18; 0) \quad y_2 = -4x_2 + 40 + k$$

$$\left(\frac{1}{2}, 68\right)$$

$$(-17; 68)$$

$$(0; 0)$$

$$(2, 68)$$

$$15^2 = 225$$

$$\frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{4}$$

$$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$$

$$4x_2 - 40 = 4x_1 + y_1 \quad 2(4 \cdot 81 + 4 \cdot 16)$$

$$y_1 = x_2 - 40 - 4x_1$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 42 \\ \hline 78 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \\ + 49 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 4 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 564 \\ + 160 \\ \hline 724 \\ \times 2 \\ \hline 1448 \\ + 186 \\ \hline 1634 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 380 \\ + 360 \\ \hline 740 \\ \times 2 \\ \hline 1480 \\ + 260 \\ \hline 1740 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(x) = \frac{7}{2} \log_7 x - 4 \\ \log_7^4(y) = -\frac{7}{2} \log_7 y - 4 \end{cases}$$

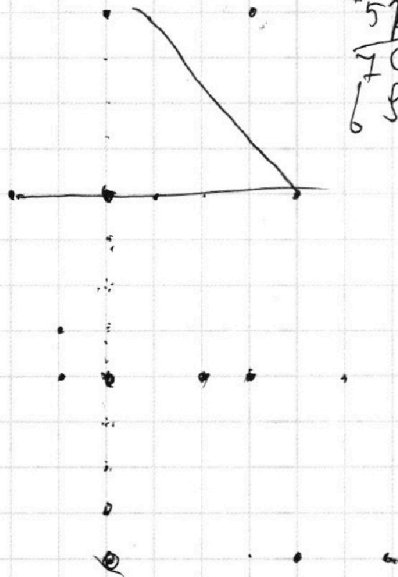
$$\begin{array}{r} 040 \\ 32 \\ \hline 3676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 178 \\ 64 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$a: \begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ + 27 \\ \hline 1792 \\ + 512 \\ \hline 7012 \\ 681 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ + 77 \\ \hline 118 \\ 17 \\ \hline 288 \\ 28 \end{array}$$



$$0 = -4 \cdot 18 + 6$$

$$6 = 4 \cdot 18$$

$$-4x +$$

$$\begin{array}{r} +6812 \\ 2880 \\ \hline 9802 \end{array}$$

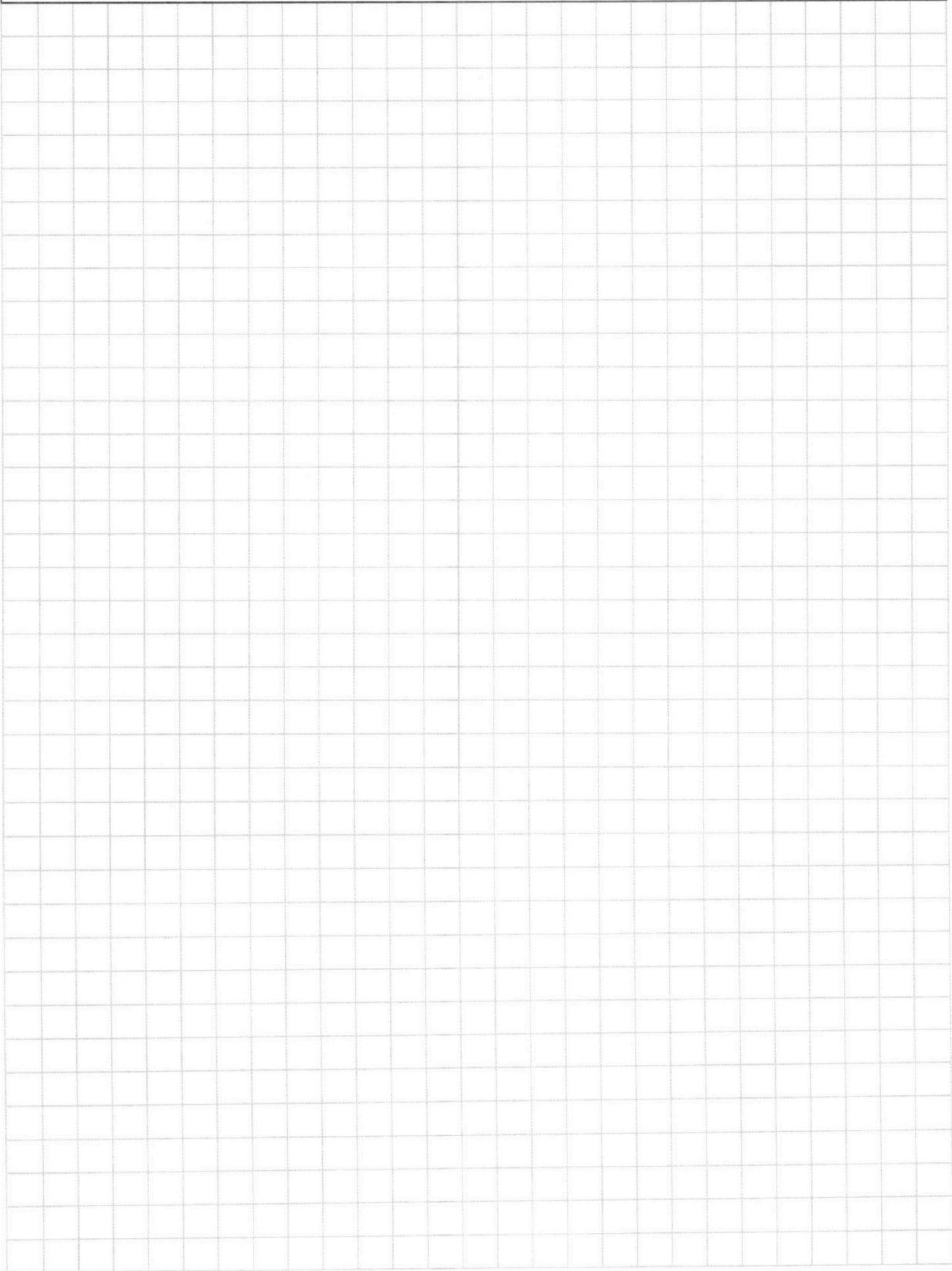


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

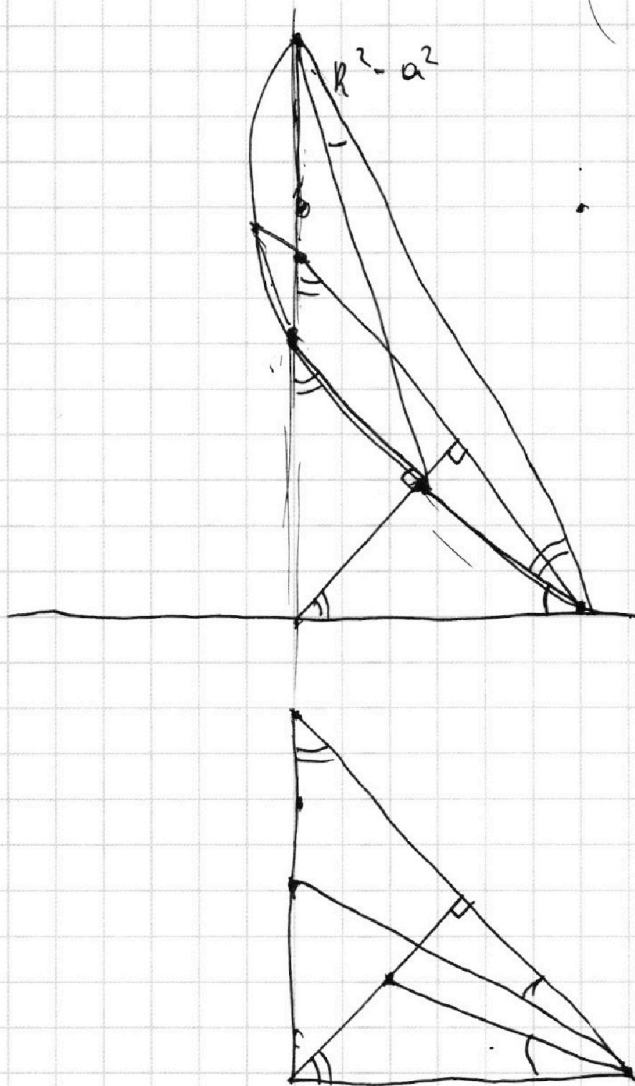
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\pi \left(\pi + 2\sqrt{R^2 - a^2} \right) = a^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ca: 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$abc \cdot b: 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{32}$$

$$bcb \cdot a: 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{37}$$

$$abc \cdot c: 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}$$

$$abc: 2^{17} \cdot 3^{215} \cdot 5^{12+8+29,5+8}$$

$$2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{33}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{26}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot x$$

abc - min?

$$\begin{array}{r} 43 \\ +18 \\ \hline 61 \end{array} \quad \begin{array}{r} 57 \\ +61 \\ \hline 118 \end{array} \quad 120 | 30$$

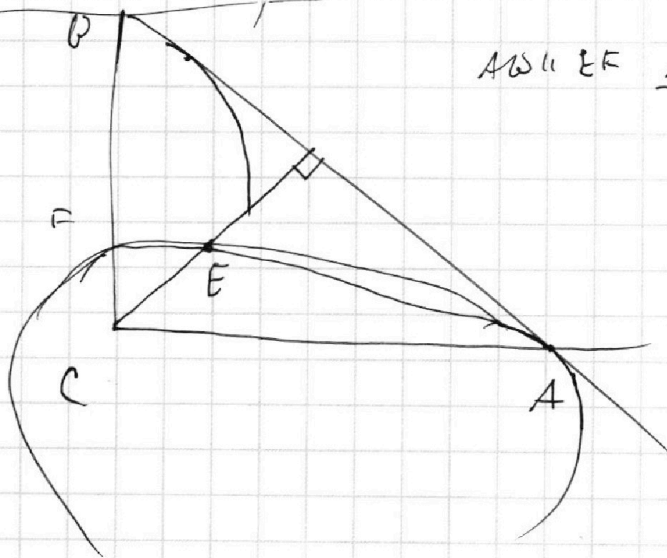
$$11+15+11+17+15+17$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ +2 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +8+6,5+21 \\ \hline 38,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ -14 \\ \hline 24 \end{array} \quad 37,5$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ +43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 93 \\ -29 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$AD \parallel EF \quad \frac{AD}{b_{EF}} = \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

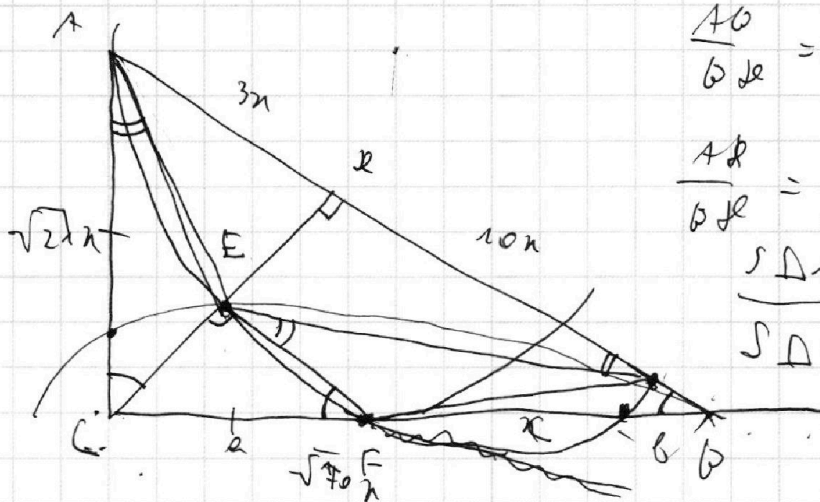
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{2} = \frac{12}{2}$$



$$\frac{AB}{BC} = 1,5 = \frac{15}{10}$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$\frac{-30}{-21} \frac{a(a+c)}{b(b+c)} = 21x^2$$

$$\frac{3x}{h} = \frac{h}{10x} \quad h = \sqrt{30}x$$

$$\log_7^4(6n) - 2 \log_7 6n^7$$

$$\arccos \alpha = n$$

$$\cos \alpha = \alpha$$

$$\cos n = \sin n$$

$$\arccos \sin n = n$$

$$\cos \alpha = \sin n$$

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

$$\alpha = \pi - n$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\right) = \sin n$$

$$\arccos \sin n = \frac{\pi}{2} - n$$

$$\log_7 36x^2 \cdot 7^3 - 4$$

$$\log_7^4(6n) - 2 \log_7 6n^7 =$$

$$= \frac{3}{2} \log_7 6n^7 - 4$$

$$\log_7^4(6n) = \frac{7}{2} \log_7 6n^7 - 4; \quad \log_7^4 y = -\frac{7}{2} \log_7 y - 4$$