МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$ $b = 2^2 \cdot 3^5$ $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$

Оценка: Пусть можно меньше, чем $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

Тогда введём обозначения: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot x$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot y$,
$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot z$.

Рассмотрим сначала степени 2.
~~Тогда~~ Из условие следует, что
$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$$
$$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$$
$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$$
И нам нужно получить минимальное значение $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$.

Сложим эти три неравенства $2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 36$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$
Заметим, что 18 достигается: $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 12$

Теперь рассмотрим степени 3.
Из условие следует, что
$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$$
$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 25$$
$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$$
Нам нужно получить минимальное значение $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$, для это сложим 3 неравенства: $2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 59$, т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ - целые ~~положит.~~ неотриц.
Тогда $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$. ~~Это~~ Равенство достигается.
Например $\alpha_2 = 9$, $\beta_2 = 5$, $\gamma_2 = 16$

Теперь рассмотрим степень 5.
Из условие следует, что
$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$$
$$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$$
$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$$
Сложим первое и третье неравенство: $\alpha_3 + 2\beta_3 + \gamma_3 \geq 24$
Так как $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ - ~~положительные~~ неотрицательные целые $\alpha_3 + 2\beta_3 + \gamma_3 \geq \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$
Равенство достигается если $\beta_3 = 0$, а $\alpha_3 + \gamma_3 = 28$. Например $\alpha_3 = 11$ $\gamma_3 = 17$
Тогда $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$.
Значит $a \cdot b \cdot c \geq \underbrace{2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$.

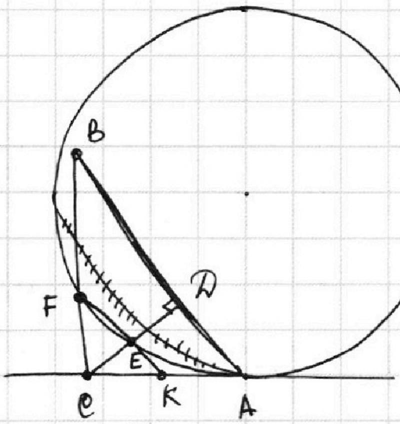
← это достигается.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

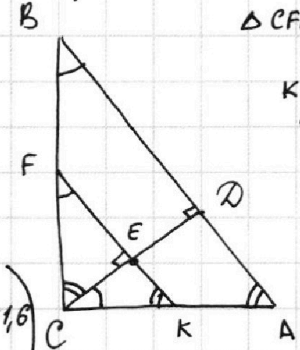
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжим FE до ~~Б~~ пересечения с AC. (точка K)

Заметим, что степень точки K равна $KE \cdot KF$ и равна KA^2



$\Delta CFK \sim \Delta ECK$, т.к. $\angle FCK = 90^\circ$, $\angle CEK = 90^\circ$, $\angle ECK = \angle CBD$, $\angle CFE = \angle CBD$

$\Downarrow$

$KE \cdot KF = CK^2$

и $KE \cdot KF = KA^2$

$\Downarrow$

$CK = AK$

$\Downarrow$

K - середина AC

$\Downarrow$

$\frac{CD}{CE} = 2$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{S_{CBD} \cdot \left(\frac{CE}{CD}\right)^2} = \frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} \cdot \left(\frac{CD}{CE}\right)^2 = 0{,}4 \cdot 4 = 1{,}6$$

$\Delta CFE \sim \Delta CBD$

т.к. $FE \parallel BD$ и $\angle C$ - общий

тогда $\frac{S_{CEF}}{S_{CBD}} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{\frac{AD \cdot CD}{2}}{\frac{BD \cdot CD}{2}} = \frac{AD}{BD} \quad \text{т.к.} \quad \frac{AB}{BD} = 1{,}4 \Rightarrow 1 + \frac{AD}{BD} = 0{,}4 + 1$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\left.\begin{aligned}&10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x\\ &\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$$

или

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$x = -\frac{\pi}{2}$

или $x = \frac{9\pi}{2}$

тогда $0 = 0$

При подстановке $x = -\frac{\pi}{2}$

$10\arccos(-1) = 10\pi$

$10\pi = 10\pi$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

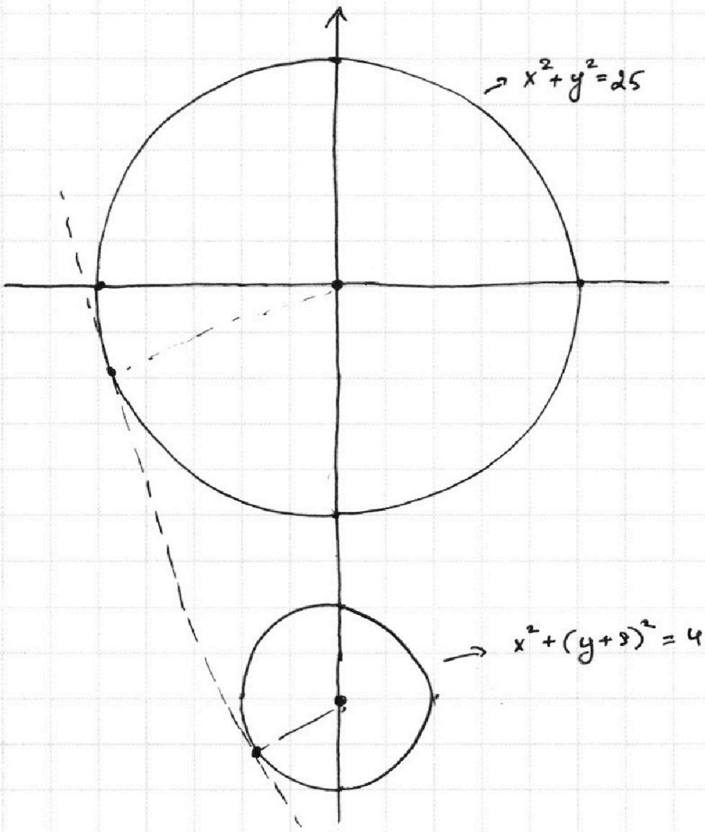
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \rightarrow \text{прямая} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \rightarrow \text{окружность с центром } (0;0) \text{ и радиусом } 5 \\ x^2+(y+9)^2=4 \rightarrow \text{окружность с центром } (0;-9) \text{ и радиусом } 2. \end{array} \right. \end{cases}$$



~~В/ общих касательных~~
в общих касательных к этим двум окружностям 2 решения

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Ответ: 2 и других решений нет.

ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1$

$0{,}5y>0$ и $0{,}5y\neq 1$

$\Updownarrow$

$y\neq 2$

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\frac{3\log_{11}^5 x + 15\log_{11} x - 16}{3\log_{11} x} = 0$$

(1) $3\log_{11}^5 x + 15\log_{11} x - 16 = 0$

$$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5$$

$t = 0{,}5y$ (замена) и будем искать не xy, а $2xt = xy$

$$\log_{11}^4 t + \frac{1}{\log_{11} t} = -\frac{13}{3\log_{11} t} - 5$$

$$\log_{11}^4 t + \frac{16}{3\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\frac{3\log_{11}^5 t + 15\log_{11} t + 16}{3\log_{11} t} = 0$$

(2) $3\log_{11}^5 t + 15\log_{11} t + 16 = 0$

(1) + (2): $3\left(\log_{11}^5 t + \log_{11}^5 x\right) + 15\log_{11} xt = 0$

Первое слагаемое: ~~Левая часть~~ $3\cdot \log_{11} xt \cdot \left(\log_{11}^4 t - \log_{11}^3 t\cdot \log_{11} x + \log_{11}^2 t\cdot \log_{11}^2 x - \log_{11} t\cdot \log_{11}^3 x + \log_{11}^4 x\right)$

Тогда $3\log_{11} xt \cdot \left(\log_{11}^4 t - \log_{11}^3 t\cdot \log_{11} x + \log_{11}^2 t\cdot \log_{11}^2 x - \log_{11} t\cdot \log_{11}^3 x + \log_{11}^4 x + 5\right) = 0$

Одно из решений: $xt = 1 \Rightarrow xy = 2xt = 2$.

Посмотрим на скобку: Докажем что скобка больше 0 $\Rightarrow$ решение будет одно: $\log_{11} xt = 0$

$\log_{11}^4 t - \log_{11}^3 t\cdot \log_{11} x + \log_{11}^2 t\cdot \log^2 x - \log_{11} t\cdot \log_{11}^3 x + \log_{11}^4 x + 5$ $\quad a = \log_{11} t,\ b = \log_{11} x$

Докажем что $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq 0$, тогда мы докажем что скобка ≥ 5

$a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 = a^3(a-b) - b^3(a-b) = (a-b)\cdot(a^3-b^3) = (a-b)^2\cdot(a^2-ab+b^2)$

$a^2 - ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow$ скобка всегда хотя бы 5 $\Rightarrow \log_{11} xt = 0$

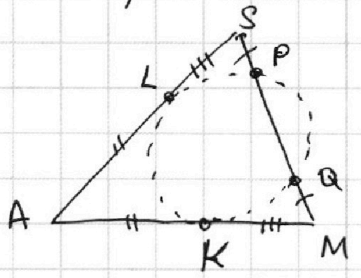
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим плоскость ASM.



$AL = AK$, т.к. отрезки касательных к окр.

Степень точки $S = SL^2 = SP \cdot SQ$

Степень точки $M = KM^2 = MQ \cdot MP$

Т.к. $SP = MQ \Rightarrow SQ = MP \Rightarrow SL^2 = KM^2 \Rightarrow SL = KM$

Тогда $AS = AM = 20$

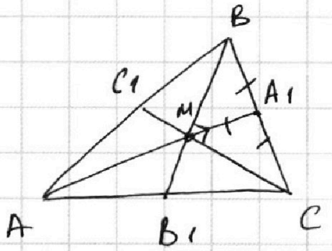
Т.к. AA_1 - медиана и, ~~то мед~~ M - точка пересечения медиан

значит M делит AA_1 в отношении 2:1.

Тогда $AA_1 = 30$

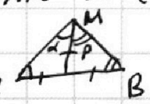
MA_1

Рассмотрим плоскость ABC.



$MA_1 = 10$, $BA_1 = 10$, $A_1C = 10$ (т.к. $BC = 20$)

значит $\angle BMC = 90$



$180 - 2\alpha + 180 - 2\beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

Заметим, что медианы делят треугольник на 6 равновеликих ему

Тогда $\underset{S_{BMC}}{\frac{BM \cdot MC}{2}} = \frac{180}{3} = 60$

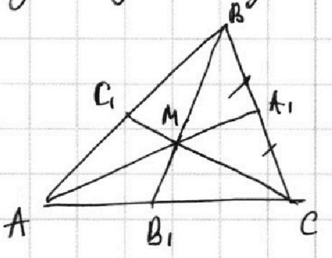
Т.е. $BM \cdot MC = 120 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3BM}{2} \cdot \frac{3CM}{2} =$

$= \frac{9 \cdot 120}{2} = 540$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 540 = 16200$

Ответ на пункт а: 16200

Почему медианы делят треугольник на 6 равновеликих:



$S_{ABA_1} = S_{ACA_1}$, т.к. общая высота на BC и основания равны

$S_{BMA_1} = S_{CMA_1}$, т.к. общая высота на BC и основания равны (аналогично для двух других пар)

Пусть $S_1 = S_{BMA_1} = S_{CMA_1}$

$S_2 = S_{AMB_1} = S_{CMB_1}$

$S_3 = S_{AMC_1} = S_{BMC_1}$

Тогда $S_{ABA_1} = 2S_3 + S_1 = 2S_2 + S_1 = S_{ACA_1}$

$\Downarrow$

$S_3 = S_2$ (аналогично доказываем, что $S_1 = S_2$)

Тогда $S_1 = S_2 = S_3 \Rightarrow$ 6 равновеликих Δ-ка.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 делимость, оценка + пример
№2 подобие?
№3 арктрига
№4 параметр
№5 логарифмы
№6 координатная плоскость
№7 стереома

$\frac{9\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

1

№1

$ab = 2^6 3^{13} 5^{11} k$

$bc = 2^{14} 3^{21} \cdot 5^{13} l$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} m$

$a^2b^2c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} klm$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \sqrt{3klm}$

$\alpha_3 = 11$
$\beta_3 = 17$
$\gamma_3 = 17$
$\alpha - \beta = 15$
$\alpha + \beta = 17$
$\alpha = 16 \quad \beta = 1$
32

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

$\alpha + \beta = 6$
$\alpha - \beta = 2$
$2\alpha = 8 \quad \alpha = 4.$

$\alpha + \beta = 11$
$\alpha - \beta = 15$
$2\alpha = 26$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot x$
$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot y$
$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot z$

$ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} \cdot xy$

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{16}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^1$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{12}$

$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$ $\quad \alpha_1 + \beta_1 \geq 6$ $\quad \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$
$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$ $\quad \alpha_2 + \beta_2 \geq 13$ $\quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25$
$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$ $\quad \alpha_3 + \beta_3 \geq 11$ $\quad \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 18 \Rightarrow$ достигается $a^2 = 2^2 3^{38} \cdot 5^{39} \cdot \frac{km}{l}$

$a = 2 \cdot 3^{19} \cdot 5^{19} \cdot \sqrt{\frac{5km}{l}}$

чётное $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases}$

неправда
$\alpha_3 + 2\beta_3 + \gamma_3 \geq \alpha_3 + \gamma_3$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{29}$

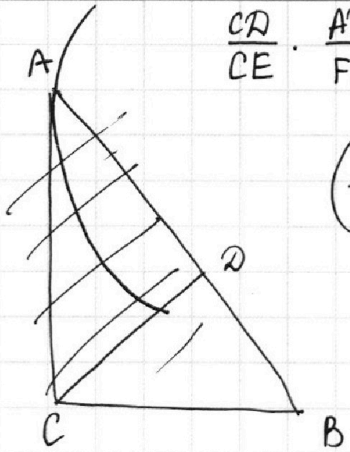
тогда ~~либо~~
~~$\alpha_1 + \beta_3$ либо $\beta_3 + \beta_3$ больше на~~
сумма их
больше на 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

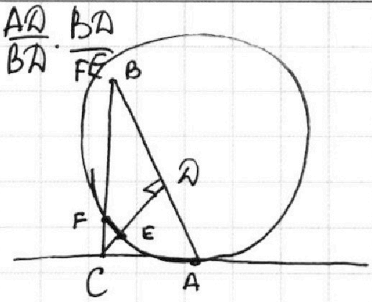
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{CD}{CE} \cdot \frac{AD}{FE} = \frac{BD}{FE} \cdot \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{FE}$

$\left(\frac{BD}{FE}\right)^2 - ?$

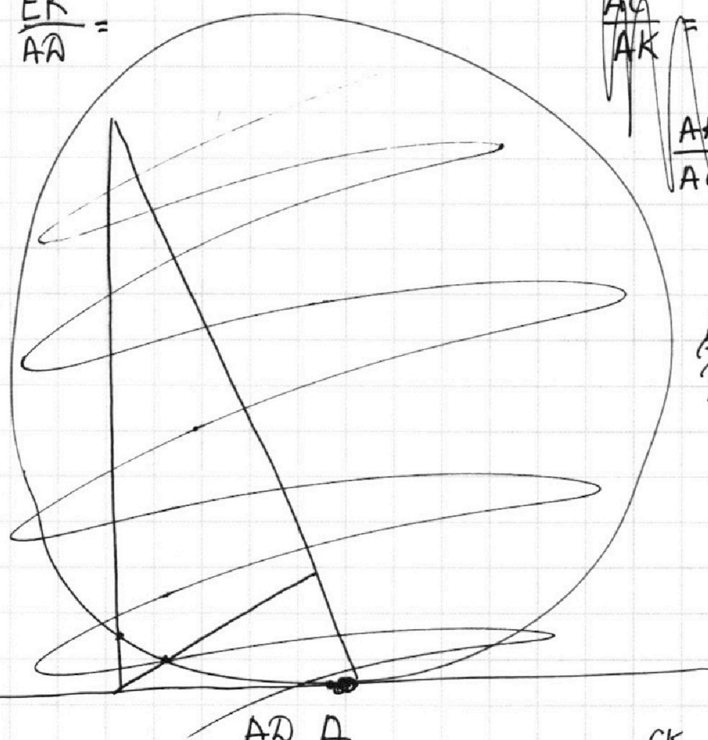


$\frac{CK}{KA} \cdot \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{FE}$

$\parallel$

$\frac{CK \cdot AK}{FK \cdot EK}$

$\frac{EK}{AD} =$



$\frac{AC}{AK} = 1 + \frac{CK}{AK}$

$\frac{AK}{AC} = 1 - \frac{CK}{AC}$

$\frac{CD}{CE} \cdot \frac{AD}{FE}$

$\cancel{\frac{AC}{AK}}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD}{FE \cdot CE} =$

$= \frac{CD}{CE} \cdot \frac{AD}{FE} =$

$= \frac{CK}{CA} \cdot \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{FE}$

$\parallel$ $\parallel$

$0,4$ $\frac{BC}{FC}$

$\frac{CK}{KA}$ $\frac{AC}{AK} - ?$ $\parallel$ $\frac{AC}{CK}$

Пусть $\frac{CK}{KA} = \frac{1}{k}$.

$KA = k \cdot CK$

$\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{CK} \cdot \frac{BD}{FE}$

$\parallel$

$\frac{AD}{BD} =$

$\frac{CK}{CA} = \frac{CE}{CB}$

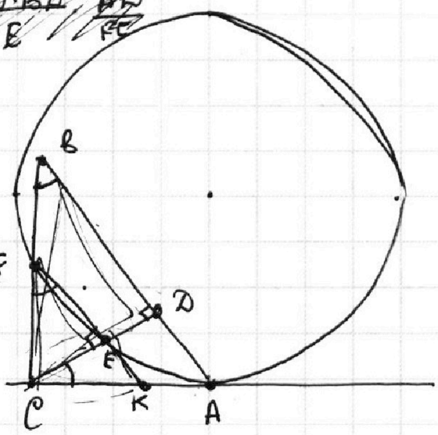
$\frac{AK}{CK} = \frac{BF}{FC}$

$\frac{CD}{CE} \cdot \frac{AD}{FE} = \cancel{\frac{AD \cdot BD}{CE}}, \cancel{\frac{AD}{FE}}$

$\parallel$

$\frac{BD}{FE} \cdot \frac{AD}{FE}$

$\cancel{\frac{AD}{FE}}$ $\cancel{AD}$



$\frac{AB}{BD} = 1,4$

$\frac{AD}{BD} = 0,4$

$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BD}$

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$\frac{KE}{AD} = \frac{FE}{BD}$

$AK^2 = FK \cdot EK$

$\frac{S_{CAD}}{S_{BCD}} = 0,4$

$KE \cdot KF = KA^2$

$\frac{KE}{KA} = \frac{KA}{KF}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3

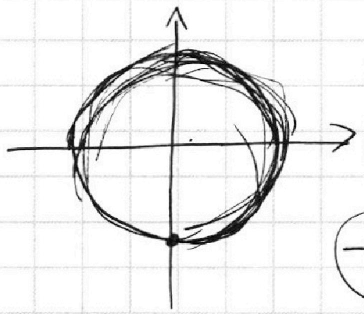
$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ $\qquad\qquad$ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$\cancel{-x} - 8x = 4\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$



-1

$18 = 2 \cdot 9$

$\cancel{16 \cdot 8 = 144}$

$\underline{324}$

$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 77 \\ 4 \\ \hline 308 \end{array}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \qquad x = \frac{-6ay + b}{5}$$

4 решения.

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y - 77) = 0$

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ $\quad$ или $\quad$ $x^2 + y^2 + 18y - 77 = 0$

отн. y. $\qquad\qquad$ отн. y.

$y^2 + x^2 - 25 = 0$ $\qquad$ $y^2 + 18y + (x^2 - 77) = 0$

$D = -4x^2 + 100$ $\qquad$ $D = 324 - 4x^2 + 308$

$y = \frac{\pm\sqrt{100 - 4x^2}}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{-18 \pm \sqrt{632 - 4x^2}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} 5x + 3a\sqrt{100 - 4x^2} - b = 0 \\ 5x - 3a\sqrt{100 - 4x^2} - b = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 5x + 3a \cdot (-18 + \sqrt{632 - 4x^2}) - b = 0 \\ 5x - 3a \cdot (-18 + \sqrt{632 - 4x^2}) - b = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\; 3a\sqrt{100 - 4x^2} = b - 5x \right.$$

$$\begin{cases} b - 5x \geq 0 \\ 9a^2(100 - 4x^2) = (b - 5x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b - 5x \geq 0 \\ 900a^2 - 36a^2x^2 = b^2 - \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

ОДЗ:
$x > 0$
$x \neq 1$

$\cancel{\log_x^4 11 - 6\log_x 11 = \frac{1}{3}\cdot(-2)\log_x 11 - 15}$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11}x} = -\frac{2}{3\log_{11}x} - 5$ $\cancel{\frac{13}{3}}$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = -\frac{13}{3\log_{11}(0{,}5y)} - 5$

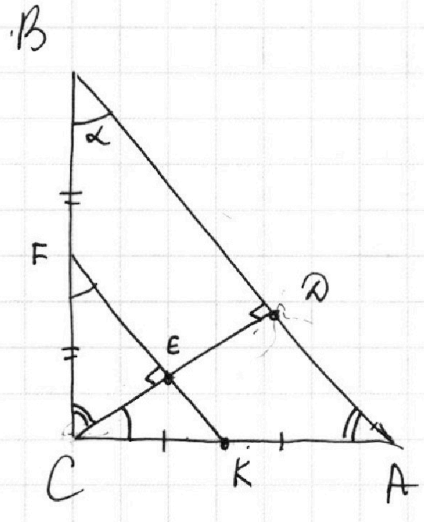
$2x\,t$ - ?

$\log_{11}^4 t + \frac{1}{\log_{11}t} = -\frac{13}{3\log_{11}t} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3\log_{11}x} + 5 = 0 \;\Big|\; \log_{11}^4 t + \frac{14}{3\log_{11}t} + 5 = 0$

$3\log_{11}^5 x - 16 + 15\log_{11}x = 0 \;\Big|\; 3\log_{11}^5 t + 14 + 15\log_{11}t = 0$

$3(\log_{11}^5 x + \log_{11}^5 t) + 15\log_{11}xt - 2 = 0$



$AK^2 = KE\cdot KF$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = \frac{AD}{CE} = \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BD}{CE}$

$\frac{BD}{CE} = \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{CD}\cdot$

$S_{CFE} = S_{CBD}\cdot\left(\frac{CE}{BD}\right)^2$ $\quad 0{,}4\cdot\frac{1}{4}$

$\cancel{\left(\frac{BD}{CE}\right)^2 - \frac{5}{1}}$

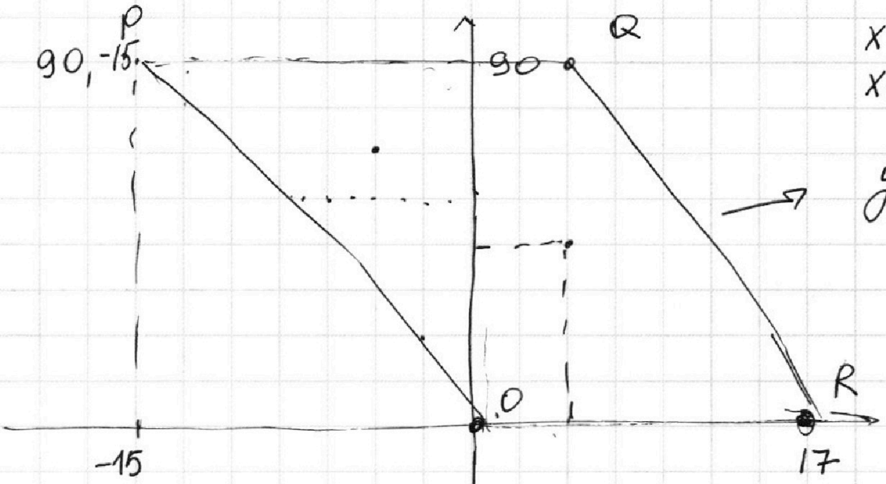
$KE\cdot KF = KC^2 = AK^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$x_1 = 2 \quad y_1 = 90$

$x_2 = 17 \quad y_2 = 0.$

$y = -6x + 102$

$(6x_2 + y_2) - (6x_1 + y_1) = 48.$

$b = 0$

$-6k.$

$2k + b = 90$

$17k + b = 0$

$-12 + b = 90$

$\underline{b = 102}$

$15k = -90$

$\underline{k = -6}$

$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 > 0.$

$-a^4b$

a^3b^2

$-a^2b^3$

$+ab^4$

0

$a^3(a-b) - b^3(a-b)$

$(a^3 - b^3)(a-b)$

$(a-b)^2 \cdot (a^2 + b^2 - ab)$

$f(x) = 3\log_{11}^5 x + 15\log_{11} x$

$3\log_{11} x\,(\cancel{3}\log_{11}^4 x + 5) = 16$

$3\log_{11} t\,(\log_{11}^4 t + 5) = -16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 5 = 0$

$\log_{11}^5 x - 16 + 5\log_{11} x = 0$

$\log_{11} x\left(\log_{11}^4 x + 5\right) - 16 = 0$

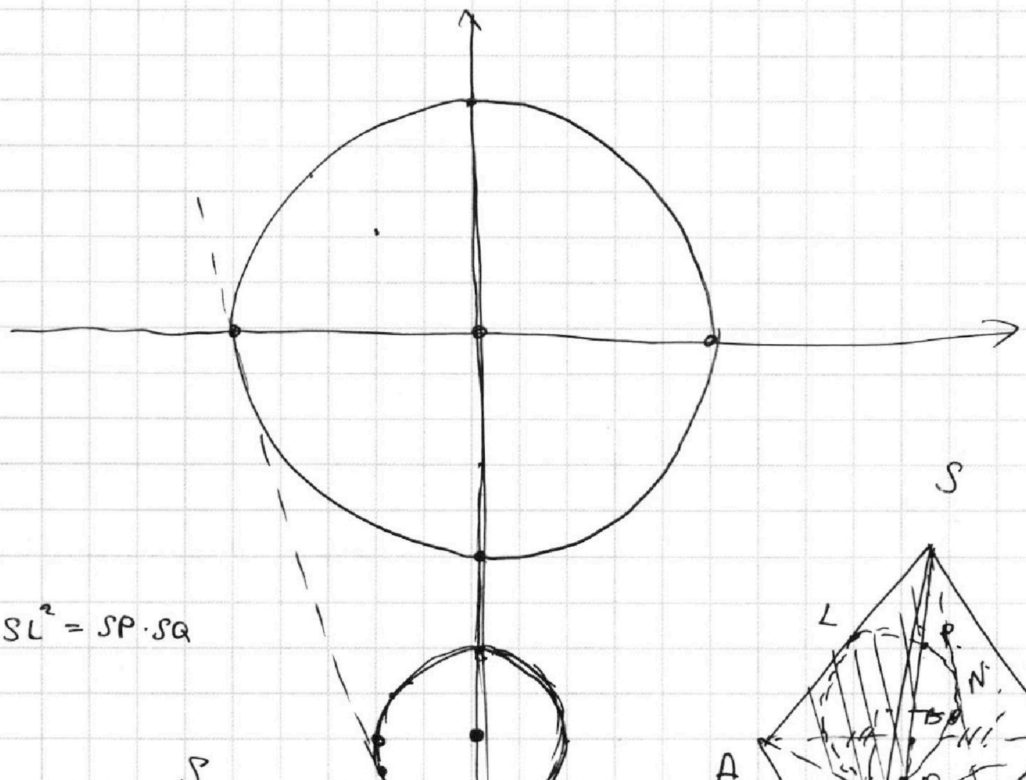
$\left(x^2 + (y+9)^2 - 4\right)$

Уравнение касательной

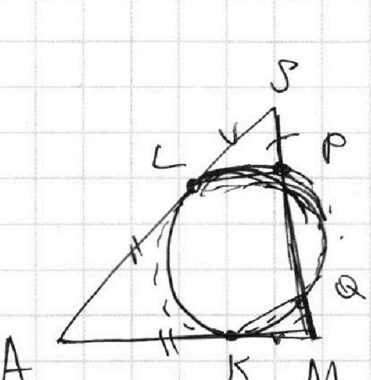
$g(x) = f(x_0)\cdot(x - x_0)f'(x_0)$

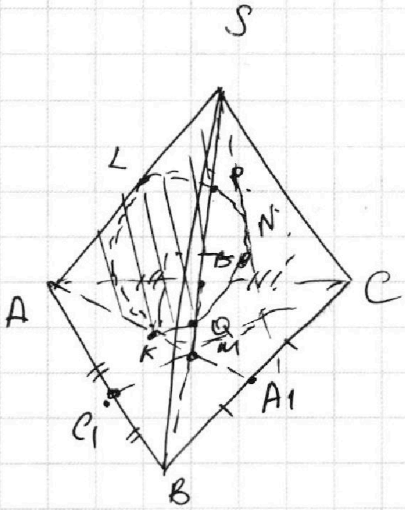
$y = -\frac{5}{\ln a} + \frac{b}{\ln a}$

$g(x) =$



$SL^2 = SP\cdot SQ$





$AM = BC = 20$

$AA_1 = 30$